实变函数与泛函分析

上 册

薛昌兴 编



高等教育出版社

(京)112号

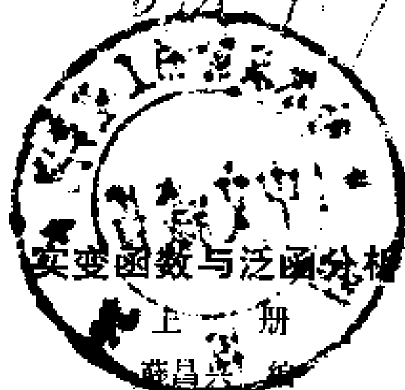
本书是作者参照高等师范院校和中学教师进修高等师范本科数学专业《实变函数与泛函分析教学大纲》编写的，超出要求部分用*表示，以供选择.

全书分上、下两册出版. 上册是实变函数，内容为集合与映射、点集、测度论、可测函数、积分论共五章. 其中后三章主要论述Lebesgue测度和积分，并且对抽象测度和积分作了扼要介绍. 书中列举了较多的例、反例和注，每节后均配有一定数量的习题，有助于读者加深对概念的理解.

本书结构紧凑，叙述详尽，论证严谨，语言通俗，重点突出，由浅入深，思路清晰，便于自学.

本书适用于师范院校、教育学院的数学系，理工类学校也可采用.

责任编辑　丁鹤龄



实变函数与泛函分析

上　册

薛昌兴　编

*

高等教育出版社出版

新华书店总店科技发行所发行

河北省香河县印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32　印张 7　字数 170 000

1993 年5月第1版　1993 年5月第1次印刷

印数 0001-7 566

ISBN 7-04-004150-2/O·1193

定价 2.80 元

序　　言

本书是根据高等学校理科数学、力学教材编审委员会于1980年5月审定的高等师范院校数学专业《实变函数与泛函分析教学大纲》和原教育部于1984年4月颁发的中学教师进修高等师范本科《实变函数论与泛函分析教学大纲》编写的. 书的初稿是1982年写成的，当时上述第二个大纲还未颁布，所以编写初稿时主要的依据是上述第一个大纲，后来在修改过程中注意且兼顾了上述第二个大纲的内容. 初稿写成后作为甘肃教育学院数学系《实变函数》和《泛函分析》两门课程的教材并已使用了十届，几年来在教学实践的基础上，又进行了多次修改. 这次出版前又根据1990年11月在南京大学召开的"实变函数论"与"泛函分析"教材编写大纲讨论会的精神以及有关专家、学者对书稿审阅时所提出的意见，再次作了修改. 为了使本书的适用范围能够稍广一些，在教学中有可供选择的余地，我们适当增加了一些内容，用星号"*"标出，以供教师教学时选用或学生课外阅读. 这些带星号"*"的内容在书中基本上是独立的，在教学中即便不讲，也不影响教材内容的衔接和系统性.

全书共九章分上、下两册出版. 上册是实变函数部分，内容包括集合与映射、点集、测度论、可测函数、积分论共五章；下册是泛函分析部分，内容包括度量空间、线性算子与线性泛函、内积空间和Hilbert空间、线性算子的谱共四章. 全书内容的安排注意了前后照应，自成体系.

考虑到实变函数与泛函分析这两门课的内容比较抽象，初学者往往有一定的困难. 为了减少教材的坡度，便于教与学，特别是便于自学，我们在内容的安排上注意贯彻由浅入深、循序渐进的原

测，对基本概念和定理都作了详细的叙述和严格的论证，在一些证明有难度的定理之前，编写了若干个引理或过渡性的定理，以使难度尽可能地分散．为了加深学生对概念的理解和掌握，书中列举了大量的正、反两个方面的例题．每节后还附有一定数量的可供选择的习题，其中有一部分习题是正文内容的补充，也有少数习题具有一定的难度，初学者可以不做．

根据我们的实践，授完上、下册各需72学时，共需144学时．如果泛函分析的课时较少，可只讲授下列章节中不带星号“*”的部分：第六章的1至8节，第七章的1至4节，第八章的1、2两节．这些章节仍自成一个体系．若尚有时间，还可讲授第七章5、6两节的部分或全部内容．

在本书的编写过程中，始终得到兰州大学陈文嫄教授和西北师范大学丁传松教授的热情关怀和指导，西北师范大学徐發洲教授和兰州大学范先令副教授、钟承奎博士都详细审阅了书稿，并提出了许多宝贵的修改意见，这些意见作者都采纳了，从而使本书增色不少．在出版过程中，承蒙北京师范大学钱佩玲先生仔细审查了书稿，并提出许多详尽的修改意见，对本书的最后定稿起了很重要的作用．在此我对上述各位先生和学者表示诚挚的感谢．我还要感谢我们学校、系的领导以及用此书稿试教过的同志，他们对本书的编写给予了许多方便和支持．

甘肃省教育委员会、甘肃省高等学校教材建设指导委员会和高等教育出版社，对此书的出版给予了极大的关怀和支持，在此作者表示深切的谢意．

由于作者水平有限，缺点和错误在所难免，敬请教学同仁和读者批评指正．

作　　者

1990年12月

上册目录

第一章 集合与映射……………………………………………………1

§1.1 集合及其运算……………………………………………………1

1.1.1 集合的概念及其表示(1) 1.1.2 集合的运算(4) 1.1.3 集列极限(8) 1.1.4 集的特征函数(10) 习题 1.1(11)

§1.2 映射与势……………………………………………………11

1.2.1 映射(11) 1.2.2 势(15) 习题 1.2(19)

§1.3 可数集……………………………………………………20

习题 1.3(24)

§1.4 不可数集……………………………………………………25

习题 1.4(28)

§1.5 半序集与Zorn引理……………………………………………………29

习题 1.5(34)

第二章 点集……………………………………………………35

§2.0 p进位表数法……………………………………………………35

§2.1 n 维欧几里得空间及其中的点集……………………………………38

习题 2.1(50)

§2.2 直线上的开集、闭集及完全集的构造…………………………………51

习题 2.2(54)

§2.3 点集间的距离与隔离性定理……………………………………54

习题 2.3(56)

第三章 测度论……………………………………………………58

§3.0 引言……………………………………………………58

§3.1 外测度与可测集……………………………………………………61

3.1.1 外测度(61) 3.1.2 可测集(66) 习题 3.1(72)

§3.2 可测集类与不可测集……………………………………………………73

3.2.1 $\mathscr{L}_n$ 的结构(73) *3.2.2 Lebesgue 测度的平移不变性(79) *3.2.3 不可测集(80) 习题 3.2(83)

*§3.3 抽象测度……………………………………………84
3.3.1 环与环上的测度(84) 3.3.2 外测度(94) 3.3.3 测度的延拓(95) 习题3.3(99)
§3.4 乘积测度……………………………………………99
习题3.4(107)
第四章 可测函数……………………………………………108
§4.1 可测函数的定义及性质………………………………108
习题4.1(117)
§4.2 可测函数列的收敛性…………………………………118
习题4.2(124)
§4.3 可测函数的结构………………………………………124
习题4.3(130)
*§4.4 抽象可测函数…………………………………………130
4.4.1 抽象可测函数的定义及其基本性质(131)
4.4.2 抽象可测函数列的收敛性(132)
第五章 积分论……………………………………………133
§5.1 Lebesgue积分的定义及初等性质……………………133
5.1.1 非负简单函数的积分(133) 5.1.2 非负可测函数的积分(136) 5.1.3 一般可测函数的积分(139) 5.1.4 积分的初等性质(141) 习题5.1(147)
§5.2 Lebesgue积分与Riemann积分的关系……………147
5.2.1 L积分与R积分的关系(148) *5.2.2 R可积函数的构造(150) 5.2.3 Lebesgue积分与广义Riemann积分的关系(153) 习题5.2 (155)
§5.3 逐项积分定理…………………………………………156
5.3.1 非负可测函数列的逐项积分定理(156) 5.3.2 可积函数列的逐项积分定理(158) 习题5.3(165)
§5.4 Fubini 定理……………………………………………167
习题5.4(172)
§5.5 微分与Lebesgue不定积分……………………………172
5.5.1 有界变差函数(172) 5.5.2 单调函数的微分性质(180)

5.5.3 Lebesgue 不定积分与绝对连续函数 (191) 5.5.4 Lebesgue 不定积分与微分的关系(193) 5.5.5 Lebesgue 积分的分部积分公式和换元积分公式(198) 习题 5.5(199)
*§5.6 一般测度空间$(X,\mathscr{S},\mu)$上可测函数的积分……199
*§5.7 Lebesgue-Stieltjes 积分……200
附录 5.8 Riemann-Stieltjes 积分……202
参考文献……205
符号索引……206
索引……210

附：下册目录

第六章　度量空间

§6.1　度量空间的定义及例

§6.2　赋范线性空间的定义及例

§6.3　度量空间中的点集及连续映射

§6.4　稠密性与可分性

§6.5　完备性

§6.6　压缩映射原理

§6.7　列紧性

§6.8　有限维赋范线性空间

第七章　线性算子与线性泛函

§7.1　线性算子(泛函)的概念及有界性

§7.2　Hahn-Banach 泛函延拓定理

§7.3　几个常用空间上连续线性泛函的表示

§7.4　逆算子定理、闭图象定理和共鸣定理

§7.5　自反空间与共轭算子

§7.6　弱收敛和弱列紧性

第八章　内积空间和 Hilbert 空间

§8.1　内积空间的基本概念和性质

§8.2　Riesz 表示定理

§8.3　Hilbert 空间上的几种有界线性算子

***第九章　线性算子的谱**

§9.1　有界线性算子的谱

§9.2　全连续算子的谱

§9.3　自共轭算子的谱

§9.4　自共轭全连续算子的谱分解

第一章　集合与映射

我们知道，数学分析研究的对象基本上是连续函数，由于它过多地依赖函数的连续性，而使得其理论应用起来不够灵便，在Riemann积分理论中，这个问题表现得很严重．对于一个函数项级数，要逐项积分，除了要求每一项都连续外，一般还要求一致收敛性，否则，一列可积函数的极限可能根本是不可积的，当然更谈不上逐项积分．可是在实际问题中，这个一致收敛的要求，常常或者是得不到满足，或者是招致繁复的论证，带来许多麻烦．另外，如重积分化成累次积分，或者交换两个无穷积分的次序，也发生类似的情况．所以，为了摆脱苛刻的限制，扩大研究的范围，力求更灵活的运算，就必须改进Riemann积分．

实变函数论的中心内容是Lebesgue积分，它正是为了克服Riemann积分的上述缺陷而提出来的，它不仅适用于连续函数，而且适用于比连续函数类更广泛的可测函数类，可测函数的定义域是n维Euclid空间中的可测点集，不必是区间或区域，积分的定义和运算依赖于对Euclid空间中的点集所建立的测度．为了把有关Lebesgue积分的各个环节逐个弄清楚，进而掌握积分的完整概念，我们将按照集合、点集、测度论、可测函数、积分论的次序来讨论，本章先介绍一些有关集合论的基本知识．

§1.1　集合及其运算

1.1.1　集合的概念及其表示

集合也称作集，它是数学中的一个基本概念，要把这个概念加以严格的规定并不是一件容易的事情．正象几何学中的“点”、“直

线"、"平面"一样，"集合"这个概念必须用若干公理组成的公理系统来规定．我们不准备在这里纠缠"集合"这个概念的严格规定，而是把集合看成是在一定场合所要考察和研究的某些对象的全体．构成集合的每一个对象称为这个集合的元素或元．例如，一个圆周上的点的全体构成一集合，这些点是此集合的元．以实数为系数的多项式全体成一集合，这些多项式是此集合的元．以集合作为成员(元素)的集合，也常称为集族或集类．例如，以闭区间$[0,1]$上的点为中心，以$\frac{1}{2}$为半径的开区间全体成一集族，这些开区间是此集族的元．

以后常用大写字母$A,B,C,X,Y,Z,\cdots$表示集合，用小写字母$a,b,c,x,y,z,\cdots$表示集合中的元素．

如果a是集合A的元素，就说a属于A，记作$a\in A$；或者说A含有a，记作$A\ni a$．

如果a不是集A的元素，就说a不属于A，记作$a\overline{\in}A$(或$a\notin A$)；或者说A不含有a，记作$A\overline{\ni}a$(或$A\not\ni a$)．

有些集合可用列举其元素的办法来具体表示．如：

只含有一个元素a的集合称为单元素集或独点集，可表示为$\{a\}$．

由有限个元素a_1，a_2，$\cdots$，a_n所组成的集合，可表示为$\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$．

由全体自然数所组成的集合称为自然数集，可表示为$\{1,2,\cdots,n,\cdots\}$．

当集A是具有某性质p的元素之全体时，我们往往用下面的形式表示A：

$$A=\{x|x\text{ 具有性质 }p\}.$$

例如方程$x^2-1=0$的解x的全体组成的数集是

$$\{x \mid x^2-1=0\}，实际上就是\{1,-1\}.$$

有时我们也把集$\{x \mid x \in E,\ x$ 具有性质 $p\}$改写成 $E[x$ 具有性质 $p]$.

例如，设 $f(x)$是定义在集合 E 上的一个实函数，a 是一个实数，我们把集$\{x \mid x \in E,\ f(x)>a\}$可写成 $E[f(x)>a]$或 $E[f>a]$.

不含任何元素的集合称为空集，记作$\varnothing$. 空集或只含有有限个元素的集合称为有限集. 不是有限集的集合称为无限集.

下面我们讨论集合的关系：

设 A, B 是两个集，若 A 和 B 的元素完全相同，就称 A 和 B 相等，记作 $A=B$(或 $B=A$). 例如，

$$\{x \mid x^2-1=0\}=\{1,-1\}.$$

若集合 A 的元素都是集合 B 的元素，就称 A 是 B 的子集，记作 $A \subset B$(或 $B \supset A$)，读作 A 包含于 B (或 B 包含 A).

若 $A \subset B$，而 B 中确有元素 b 不属于 A，就称 A 是 B 的真子集. 例如，整数集是有理数集的真子集. 我们规定空集是任何集的子集.

为了今后叙述问题方便起见，我们先介绍几个常用的记号.

$\Leftrightarrow$ 　表示当且仅当，等价或充分必要条件.

"$\Rightarrow$" 　表示必要性.

"$\Leftarrow$" 　表示充分性.

$\Rightarrow$ 　表示蕴含，如 $A \Rightarrow B$ 表示若 A 成立，则 B 一定成立.

$\forall$ 　表示对任意的，对每一个.

$\exists$ 　表示存在.

$\forall$ 和 $\exists$ 分别称为全称量词和存在量词. 存在量词不能省略，但全称量词往往省略.

由集的"相等"与"包含"的定义可立得如下两个定理：

定理 1.1.1 　设 A, B 是两个集合，则 $A=B \Leftrightarrow A \subset B$ 且 $B \subset A$.

定理 1.1.2 对任意集合 A, B, C，均有

1) $A\subset A$;

2) 若 $A\subset B, B\subset C$，则 $A\subset C$.

1.1.2 集合的运算

设 A, B 是两个集合. 集合

$$\{x \mid x\in A \text{ 或 } x\in B\}$$

称为 A 与 B 的并集或并，记作 $A\cup B$. 集合

$$\{x \mid x\in A \text{ 且 } x\in B\}$$

称为 A 与 B 的交集或交，记作 $A\cap B$. 特别地，若 $A\cap B=\varnothing$，称 A 与 B 不相交；反之，即若 $A\cap B\neq\varnothing$，则称 A 与 B 相交. 集合

$$\{x \mid x\in A \text{ 但 } x\overline{\in} B\}$$

称为集 A 减集 B 的差集或差，记作 $A-B$(或 $A\backslash B$). 当 $B\subset A$ 时，称差集 $A-B$ 为 B 关于 A 的余集，记作 $\mathscr{C}_A B$(图 1.1.1).

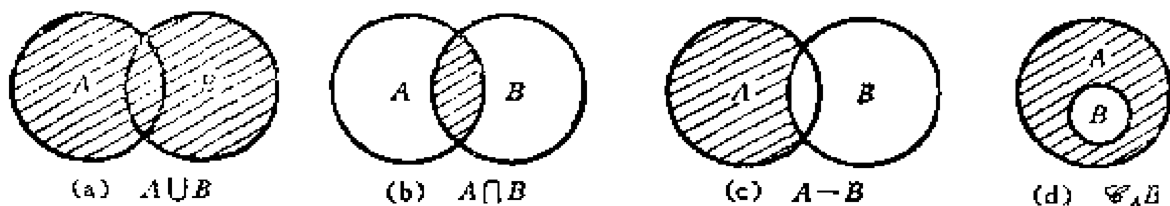


图 1.1.1

当我们研究一个问题时，如果所讨论的集合都是某个固定集 A 的子集时，就称 A 为基本集或全集，并把 A 的子集 B 关于 A 的余集 $\mathscr{C}_A B$ 简称为 B 的余集，记为 B^c 或 $\mathscr{C}B$.

并集与交集的概念可以推广到任意个集的情形. 设 Γ 为一非空集合，并且对每一个 $\alpha\in\Gamma$，指定了一个集合 A_α，此时我们称 $\{A_\alpha \mid \alpha\in\Gamma\}$ 是以 Γ 为指标集的集族. 集族 $\{A_\alpha \mid \alpha\in\Gamma\}$ 的并与交分别定义为：

$$\bigcup_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha=\{x \mid \exists\alpha\in\Gamma, \text{使} x\in A_\alpha\}.$$

$$\bigcap_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha=\{x\mid\forall\alpha\in\Gamma,\text{有}x\in A_\alpha\}.$$

特别地，当$\Gamma=\{1,2,\cdots,n\}$为有限集时，

$$\bigcup_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha=\bigcup_{\alpha=1}^{n}A_\alpha=\{x\mid\text{有某个自然数}\ \alpha\leqslant n,\text{使}\ x\in A_\alpha\},$$

$$\bigcap_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha=\bigcap_{\alpha=1}^{n}A_\alpha=\{x\mid\text{对每个自然数}\ \alpha\leqslant n,\text{有}\ x\in A_\alpha\};$$

当$\Gamma=\{1,2,\cdots,n,\cdots\}$为自然数集时，称$\{A_n\mid n=1,2,\cdots\}$为集列，简记为$\{A_n\}$. 此时，

$$\bigcup_{n\in\Gamma}A_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n=\{x\mid\text{有某个自然数}\ n\ ,\text{使}\ x\in A_n\},$$

$$\bigcap_{n\in\Gamma}A_n=\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n=\{x\mid\text{对一切自然数}\ n\ ,\text{有}\ x\in A_n\}.$$

例 1 设$\Gamma=[0,1]$为指标集，$\forall\alpha\in[0,1]$，令$A_\alpha=\left(\alpha-\frac{1}{2},\alpha+\frac{1}{2}\right)$，则

$$\bigcup_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha=\bigcup_{\alpha\in[0,1]}\left(\alpha-\frac{1}{2},\alpha+\frac{1}{2}\right)=\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right),$$

$$\bigcap_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha=\bigcap_{\alpha\in[0,1]}\left(\alpha-\frac{1}{2},\alpha+\frac{1}{2}\right)=\varnothing.$$

并，交运算具有以下性质：

定理 1.1.3 对任何集合A,B,C，恒有

1) $A\cup A=A,A\cap A=A$ （并、交的幂等性）；

2) $A\cup\varnothing=A$ （空集是加法的零元）；

3) $A\cup B=B\cup A,A\cap B=B\cap A$ （并、交的交换律）；

4) $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$ （并的结合律）；

$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$ （交的结合律）；

5) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$ （交对并的分配律）；

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$ （并对交的分配律）.

以上性质都可以从并与交的定义及定理1.1.1推导出来，其中有些性质还可以推广到任意个集的一般情形，如：

推论 1.1.4 对任意集 A 和集族 $\{B_\alpha|\alpha\in\Gamma\}$，有

1) $A\cap\left(\bigcup_{\alpha\in\Gamma}B_\alpha\right)=\bigcup_{\alpha\in\Gamma}\left(A\cap B_\alpha\right)$;

2) $A\cup\left(\bigcap_{\alpha\in\Gamma}B_\alpha\right)=\bigcap_{\alpha\in\Gamma}\left(A\cup B_\alpha\right)$.

现在证明2) 式，1) 的证明留为习题. 记 $A\cup\left(\bigcap_{\alpha\in\Gamma}B_\alpha\right)$ 为 E，$\bigcap_{\alpha\in\Gamma}(A\cup B_\alpha)$ 为 F，这样，只要证明 $E=F$ 即可.

$\forall x\in E$，则 $x\in A$ 或 $x\in\bigcap_{\alpha\in\Gamma}B_\alpha$，从而，$\forall\alpha\in\Gamma$，有 $x\in A\cup B_\alpha$，即 $x\in F$，所以 $E\subset F$.

反过来，$\forall x\in F$，则 $\forall\alpha\in\Gamma$，有 $x\in A\cup B_\alpha$，因此，$x\in A$ 或 $x\in\bigcap_{\alpha\in\Gamma}B_\alpha$，即 $x\in E$，这又说明 $F\subset E$. 据定理1.1.1，就得 $E=F$. 证毕.

定理 1.1.5 对于任意集族 $\{A_\alpha|\alpha\in\Gamma\}$，$\{B_\alpha|\alpha\in\Gamma\}$ 及集 C，有

1) $\bigcap_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha\subset A_{\alpha'}\subset\bigcup_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha$，$\forall\alpha'\in\Gamma$；

2) 若 $\forall\alpha\in\Gamma$，有 $A_\alpha\subset C$，则 $\bigcup_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha\subset C$；

3) 若 $\forall\alpha\in\Gamma$，有 $A_\alpha\supset C$，则 $\bigcap_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha\supset C$；

4) $\bigcup_{\alpha\in\Gamma}(A_\alpha\cup B_\alpha)=\left(\bigcup_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha\right)\cup\left(\bigcup_{\alpha\in\Gamma}B_\alpha\right)$；

5) $\bigcap_{\alpha\in\Gamma}(A_\alpha\cap B_\alpha)=\left(\bigcap_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha\right)\cap\left(\bigcap_{\alpha\in\Gamma}B_\alpha\right)$.

上述结果显然，证明从略.

"减法"和求余运算具有以下性质：

定理 1.1.6 设 X 为全集，A，B 及 $A_\alpha(\alpha\in\Gamma)$ 均为 X 的子集，则有

1) $X^c=\varnothing,\varnothing^c=X$;

2) $A\cup A^c=X,A\cap A^c=\varnothing$;

3) $(A^c)^c=A$;

4) $A\subset B\Leftrightarrow A^c\supset B^c$;

5) $A-B=A\cap B^c$;

6) $(A\cup B)^c=A^c\cap B^c,(A\cap B)^c=A^c\cup B^c$.

更一般地，有

$$\left(\bigcup_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha\right)^c=\bigcap_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha^c\ ; \tag{1.1.1}$$

$$\left(\bigcap_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha\right)^c=\bigcup_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha^c\ . \tag{1.1.2}$$

6) 常称为笛摩根(De Morgan) 法则，它提供一种对偶方法，能将已证明的关于集的某种性质转移到它们的余集上去. 此法则也称为对偶原理.

证明 我们只证式(1.1.1)及(1.1.2).

设 $x\in\left(\bigcup_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha\right)^c$，则 $x\in X$，且 $x\overline{\in}\bigcup_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha$，所以，$\forall\alpha\in\Gamma$，$x\in A_\alpha^c$，即 $x\in\bigcap_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha^c$. 这说明

$$\left(\bigcup_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha\right)^c\subset\bigcap_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha^c\ .$$

反之，设 $x\in\bigcap_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha^c$，则 $\forall\alpha\in\Gamma$，有 $x\in A_\alpha^c=X-A_\alpha$，所以，$x\in X-$

$\bigcup_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha=\left(\bigcup_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha\right)^c$. 这又说明

$$\bigcap_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha^c\subset\left(\bigcup_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha\right)^c.$$

据定理1.1.1,就得到式(1.1.1).

对(1.1.1)式两端取余集,得$\bigcup_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha=\left(\bigcap_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha^c\right)^c$. 再把 A_α换成 A_α^c,即得(1.1.2)式. 证毕.

定理 1.1.7 对任意集合 A,B,C,有

1) $A\subset B\Leftrightarrow A-B=\varnothing$;

2) $A\cap(B-C)=(A\cap B)-(A\cap C)$ (**"减法"分配律**);

3) $(A-B)-C=A-(B\cup C)$;

4) $A\cup B=(A\Delta B)\cup(A\cap B)$.

其中,$A\Delta B=(A-B)\cup(B-A)$ 称为集 A 和集 B 的对称差.

证明 以 3) 为例. 设 A, B, C 都是全集 X 的子集,据定理 1.1.6 的 5),

$$\begin{aligned}(A-B)-C&=(A\cap B^c)\cap C^c=A\cap(B^c\cap C^c)\\&=A\cap(B\cup C)^c=A-(B\cup C).\end{aligned}$$ 证毕.

1.1.3 集列极限

对任意集列$\{A_n\}$,其上限集和下限集分别定义为:

$\overline{\lim_n} A_n=\limsup_n A_n=\{x\mid x$ 属于无限多个集 $A_n\}$,

$\underline{\lim_n} A_n=\liminf_n A_n=\{x\mid\exists$ 自然数 $n_0=n_0(x)$,使 $x\in A_{n_0+k}$, $k=0,1,2,\cdots\}$.

即$\overline{\lim_n} A_n$为属于集列$\{A_n\}$ 中无限多个集的那种元素全体所组成的集;

$\underline{\lim_n} A_n$为属于集列$\{A_n\}$ 中从某个指标 $n_0(x)$(n_0 不是固定的,与元

素 x 有关)以后的一切集 A_{n_0+k} 的那种元素 x 全体所组成的集. 显然, $\underline{\lim_n} A_n \subset \overline{\lim_n} A_n$.

当 $\underline{\lim_n} A_n = \overline{\lim_n} A_n = A$ 时，就说集列 $\{A_n\}$ 收敛于 A，把 A 叫做 $\{A_n\}$ 的极限集，记作 $A = \lim\limits_{n\to\infty} A_n$.

从上限集与下限集的定义可得出以下两个表达式:

$$\limsup_n A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m, \tag{1.1.3}$$

$$\liminf_n A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m. \tag{1.1.4}$$

现在证明(1.1.4)式. 设

$$P = \liminf_n A_n, \quad Q = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m.$$

首先，由下限集的定义可以看出，$P=\varnothing \Leftrightarrow Q=\varnothing$. 因此只需讨论 P、Q 非空的情形. $\forall x \in P$, 则 $\exists$ 自然数 $n_0 = n_0(x)$, 使 $x \in A_{n_0+k}$, $k=0,1,2,\cdots$, 即

$$x \in \bigcap_{m=n_0}^{\infty} A_m, \text{ 所以 } x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m = Q.$$

这说明 $P \subset Q$.

反之, $\forall x \in Q$, 则 $\exists$ 某个自然数 n_0, 使 $x \in \bigcap\limits_{m=n_0}^{\infty} A_m$. 所以, $x \in A_{n_0+k}$, $k=0,1,2,\cdots$, 即 $x \in P$. 这又说明 $Q \subset P$. 据定理1.1.1, $P=Q$. 故(1.1.4)式成立.

(1.1.3)式的证明留为习题.

由定理 1.1.6 的 5) 和对偶原理可立即得到如下结果:

定理 1.1.8　对任意集列 $\{A_n\}$ 及集合 S，有

1) $S - \underline{\lim_n} A_n = \overline{\lim_n} (S - A_n)$;

2) $S-\overline{\lim_{n}}A_n=\underline{\lim_{n}}(S-A_n)$.

若集列$\{A_n\}$满足$A_n\subset A_{n+1}(A_n\supset A_{n+1})$, $n=1,2,\cdots$, 则称$\{A_n\}$是单调增加(单调减少)集列或渐张(渐缩)集列，单调增加与单调减少集列统称为单调集列.

定理1.1.9 **单调集列是收敛的. 并且若$\{A_n\}$是单调增加的，则** $\lim\limits_{n\to\infty}A_n=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$; **若$\{A_n\}$是单调减少的，则** $\lim\limits_{n\to\infty}A_n=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n$.

证明留为习题.

例2 设$A_i=\left[0,1+\frac{1}{i}\right)$, 则$\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i=[0,1]$.

证明 因为$A_1\supset A_2\supset\cdots\supset A_n\supset A_{n+1}\supset\cdots$, 所以，$\{A_n\}$是单调减少集列，故

$$\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i=\lim_{n\to\infty}A_n=\underline{\lim_{n}}A_n=[0,1].$$

1.1.4 集的特征函数

设X是一个固定的非空集，A是X的一个子集，作X上的函数

$$\chi_A(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } x\in A,\\ 0, & \text{当 } x\in X-A,\end{cases}$$

称$\chi_A(x)$为集A的特征函数.

显然，子集A完全由它的特征函数所确定，就是说，当$\chi_A(x)=\chi_B(x)$时，$A=B$.

特征函数与集之间有下面一些常见的重要关系：

定理1.1.10 **设X是一固定的非空集，A, B, A_α $(\alpha\in\Gamma)$, A_n $(n=1,2,\cdots)$都是X的子集，则有**

1) $A=X\Leftrightarrow\chi_A(x)\equiv1$; $A=\varnothing\Leftrightarrow\chi_A(x)\equiv0$.

2) $A\subset B\Leftrightarrow \chi_A(x)\leqslant \chi_B(x)$;

$A=B\Leftrightarrow \chi_A(x)=\chi_B(x)$.

3) $\chi_{\bigcup\limits_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha}(x)=\max\limits_{\alpha\in\Gamma}\chi_{A_\alpha}(x)$;　　$\chi_{\bigcap\limits_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha}(x)=\min\limits_{\alpha\in\Gamma}\chi_{A_\alpha}(x)$.

4) $\chi_{\overline{\lim\limits_n} A_n}(x)=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\chi_{A_n}(x)$;　　$\chi_{\underline{\lim\limits_n} A_n}(x)=\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\chi_{A_n}(x)$.

5) 极限$\lim\limits_{n\to\infty}A_n$存在的充要条件是$\lim\limits_{n\to\infty}\chi_{A_n}(x)$存在．而且当极限存在时，$\chi_{\lim\limits_{n\to\infty}A_n}(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\chi_{A_n}(x)$.

证明留为习题．

习　题　1.1

1. 证明定理 1.1.3 的 4)、5)以及推论 1.1.4 的 1)．
2. 证明定理 1.1.5 的 4)和 5)．
3. 证明定理 1.1.6 的 4)、5)及 6)中的一，二式．
4. 证明定理 1.1.7 的 2)、4)．
5. 证明等式(1.1.3)和定理 1.1.8．
6. 证明定理 1.1.9 和定理 1.1.10．
7. 证明 $B\subset A\Leftrightarrow (A-B)\bigcup B=A$.
8. 证明 $(A-B)\bigcup B=(A\bigcup B)-B\Leftrightarrow B=\varnothing$.

§1.2　映射与势

1.2.1　映射

如果我们把数学分析中函数的定义域与值域均换成一般的非空集合，就得到下面的概念．

定义 1.2.1　设 A, B 是两个非空集合，如果按照某个确定的法则 f，使对每个 $x\in A$，在 B 中都有唯一确定的元素 y 与 x 对应，记为

$$f: x\mapsto y,$$

则称 f 是从 A 到 B(中)的映射(或映照),元素 y 称为元素 x 在 f 下的象,记为 $y=f(x)$ 或 $y=fx$. 集 A 称为 f 的定义域,记为 $\mathscr{D}(f)$ 或 $\mathscr{D}_f$. 当 $C\subset A$ 时,称集合 $\{f(x)|x\in C\}$ 为集 C 在 f 下的象,[1] 记为 $f(C)$ 或 fC,并称 $f(A)=\{f(x)|x\in A\}$ 为 f 的值域,也记为 $\mathscr{R}(f)$ 或 $\mathscr{R}_f$. 对每个 $y\in B$,称集合 $\{x|x\in A, f(x)=y\}$ 为 y 在 f 之下的原象,记为 $f^{-1}(y)$. 当 $D\subset B$ 时,称集合 $\{x|x\in A$ 且 $f(x)\in D\}$ 为集 D 在 f 之下的原象,记为 $f^{-1}(D)$. 为简便起见,通常把从 $\mathscr{D}(f)=A$ 到 $\mathscr{R}(f)\subset B$ 的映射记成 $f:A\to B$ 或 $A\xrightarrow{f}B$.

如果 $f(A)=B$,就称 f 是 A 到 B 上的映射或 A 到 B 的满射.

设 A 是任意非空集,B 是实(或复)数集,则称 A 到 B 的映射 f 是集 A 上的实(或复)函数,集 A 上的实函数或复函数统称为 A 上的函数.

特别地,如果 A 是 n 维 Euclid 空间中的点集或区域,B 是实数集,这时映射 $f:A\to B$ 就是数学分析中所研究的 n 元函数. 可见映射概念就是函数概念的推广.

定义 1.2.2 设 $f:A\to C$, $g:B\to C$ 是两个映射,如果 $A\subset B$,且 $\forall x\in A$,都有 $g(x)=f(x)$,则称 g 是 f 在 B 上的延拓,记为 $f\subset g$,也称 f 为 g 在 A 上的限制,记为 $f=g|_A$.

例 1 设 $f(x)=\sin x$, $x\in[0,\pi]$, $g(x)=|\sin x|$, $x\in(-\infty,+\infty)$,则 g 是 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的延拓,或 $f=g|_{[0,\pi]}$.

定义 1.2.3 设 $f:A\to B$, $g:B\to C$ 是两个映射,$\forall x\in A$,令 $h: x\mapsto g(f(x))$,则 h 是从 A 到 C 的映射,称为 f 与 g 的复合映射,记作 $h=gf$.

定义 1.2.4 设 $f:A\to B$ 为一映射,若对每个 $y\in B$, $f^{-1}(y)=\{x|x\in A, f(x)=y\}$ 是单元素集或空集,就称 f 是 A 到 B(中)的一一映射或 A 到 B 的单射. 如果 f 是单射,且 $f(A)=B$,就称 f 是 A

到 B 上的一一映射或 A 到 B 的双射，记作 $f:A\underset{1-1}{\longrightarrow}B$ 或 $A\underset{1-1}{\overset{f}{\longrightarrow}}B$.

显然,如果 $f:A\to B$ 是 A 到 B(中)的一一映射，则 f 就是 A 到 $f(A)\subset B$ 上的一一映射.

例 2 设 $f:A\to A$ 为一映射,若对所有 $x\in A$,都有 $f(x)=x$,就称 f 为 A 上的恒等映射或单位映射, A 上的恒等映射常记为 i_A. 易见 i_A 是 A 到 A 上的一一映射.

定义 1.2.5 设 $f:A\to B$ 是 A 到 B 上的一一映射,对每个 $x\in A$,如果 $f:x\mapsto y$,令 $f^{-1}:y\mapsto x$,则 f^{-1} 是从 B 到 A 上的一一映射,称 f^{-1} 为 f 的逆映射.

显然,f^{-1} 和 f 互为逆映射,且有 $f^{-1}f=i_A$,$ff^{-1}=i_B$.

定理 1.2.1 **设 $f:X\to Y$ 为一映射,A,B,$A_\alpha(\alpha\in\Gamma)$ 都是 X 的子集，则有**

1) $A\subset B\Rightarrow f(A)\subset f(B)$;

2) $f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$,**更一般地，有**

$$f\Big(\bigcup_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha\Big)=\bigcup_{\alpha\in\Gamma}f(A_\alpha); \tag{1.2.1}$$

3) $f(A\cap B)\subset f(A)\cap f(B)$,**更一般地，有**

$$f\Big(\bigcap_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha\Big)\subset\bigcap_{\alpha\in\Gamma}f(A_\alpha). \tag{1.2.2}$$

证明 以(1.2.1)式为例. $\forall y\in f\Big(\bigcup\limits_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha\Big)$,则 $\exists x\in\bigcup\limits_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha$,使 $f(x)=y$. 于是 $\exists\alpha_0\in\Gamma$,使 $x\in A_{\alpha_0}$，所以，$y=f(x)\in f(A_{\alpha_0})$，即 $y\in\bigcup\limits_{\alpha\in\Gamma}f(A_\alpha)$,这说明 $f\Big(\bigcup\limits_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha\Big)\subset\bigcup\limits_{\alpha\in\Gamma}f(A_\alpha)$.

另一方面,由于 $A_\alpha\subset\bigcup\limits_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha(\forall\alpha\in\Gamma)$,据1),$f(A_\alpha)\subset f\Big(\bigcup\limits_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha\Big)$

$(\forall \alpha\in\Gamma)$，从而 $\bigcup\limits_{\alpha\in\Gamma} f(A_\alpha)\subset f\left(\bigcup\limits_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha\right)$. 据定理1.1.1，(1.2.1)式成立．证毕．

定理 1.2.2 **设 $f:X\to Y$ 为一映射，$A\subset X$，C、D、$C_\alpha(\alpha\in\Gamma)$ 都是 Y 的子集，则有**

1) $C\subset D\Rightarrow f^{-1}(C)\subset f^{-1}(D)$；

2) $f^{-1}(C\cup D)=f^{-1}(C)\cup f^{-1}(D)$，更一般地，有

$$f^{-1}\left(\bigcup_{\alpha\in\Gamma} C_\alpha\right)=\bigcup_{\alpha\in\Gamma} f^{-1}(C_\alpha); \tag{1.2.3}$$

3) $f^{-1}(C\cap D)=f^{-1}(C)\cap f^{-1}(D)$，更一般地，有

$$f^{-1}\left(\bigcap_{\alpha\in\Gamma} C_\alpha\right)=\bigcap_{\alpha\in\Gamma} f^{-1}(C_\alpha); \tag{1.2.4}$$

4) $f^{-1}(C-D)=f^{-1}(C)-f^{-1}(D)$；

5) $f^{-1}(C^c)=[f^{-1}(C)]^c$ (其 中，$C^c=Y-C$，$[f^{-1}(C)]^c=X-f^{-1}(C)$)；

6) $A\subset f^{-1}[f(A)]$；

7) $f[f^{-1}(C)]\subset C$.

证明 以(1.2.4)式为例．$\forall x\in f^{-1}\left(\bigcap\limits_{\alpha\in\Gamma} C_\alpha\right)$，则 $f(x)\in\bigcap\limits_{\alpha\in\Gamma} C_\alpha$，即 $\forall\alpha\in\Gamma$，有 $f(x)\in C_\alpha$，于是 $\forall\alpha\in\Gamma$，有 $x\in f^{-1}(C_\alpha)$，即 $x\in\bigcap\limits_{\alpha\in\Gamma} f^{-1}(C_\alpha)$．这说明

$$f^{-1}\left(\bigcap_{\alpha\in\Gamma} C_\alpha\right)\subset\bigcap_{\alpha\in\Gamma} f^{-1}(C_\alpha).$$

反之，$\forall x\in\bigcap\limits_{\alpha\in\Gamma} f^{-1}(C_\alpha)$，则$\forall\alpha\in\Gamma$，有$x\in f^{-1}(C_\alpha)$，于是$\forall\alpha\in\Gamma$，有$f(x)\in C_\alpha$，所以 $f(x)\in\bigcap\limits_{\alpha\in\Gamma} C_\alpha$，即 $x\in f^{-1}\left(\bigcap\limits_{\alpha\in\Gamma} C_\alpha\right)$．这又说明

$$\bigcap_{\alpha\in\Gamma} f^{-1}(C_\alpha)\subset f^{-1}\left(\bigcap_{\alpha\in\Gamma} C_\alpha\right).$$

故(1.2.4)式成立. 证毕.

1.2.2 势

对于一个集合来说,其中元素的多少是最基本的问题之一. 如何比较两个集合元素的多少呢? 在有限集的情况下, 我们也可以不必一一数出两个集中元素的个数,而采用在两集元素之间建立"一一对应"的方法. 例如,我们要比较某教室里的学生数与座位数谁多谁少? 如果每个学生都有一个座位, 而且每个座位上都有一个学生,那么我们根本用不着一个一个地去数学生与座位,便可断定学生数和座位数是相同的;若每个学生都坐一个座位后,还有空座位多出来,则可断定座位数比学生数多;若每个座位上都坐一个学生后,还有学生没有座位坐,则可断定座位数比学生数少. 现在我们把这种方法推广到比较无限集元素的多少. 为此, 先引入对等的概念.

定义1.2.6 设A,B是两个非空集,若存在A到B上的一一映射f, 则称A与B是对等的(或称A与B成一一对应). 记为$A\overset{f}{\sim}B$. 或简记为$A\sim B$.

我们规定空集和自身对等,即$\varnothing\sim\varnothing$.

显然,对等关系"$\sim$"具有下面三个基本性质:

1) $A\sim A$(自反性);

2) 若$A\sim B$,则$B\sim A$(对称性);

3) 若$A\sim B$,$B\sim C$,则$A\sim C$(传递性).

例3 证明$(0,1)\sim(0,+\infty)$.

证明 如图1.2.1所示,$\forall x\in(0,1)$, 令$f(x)=\frac{x}{1-x}$, 则f是

$(0,1)$到$(0,+\infty)$上的一一映射，故$(0,1)\sim(0,+\infty)$.

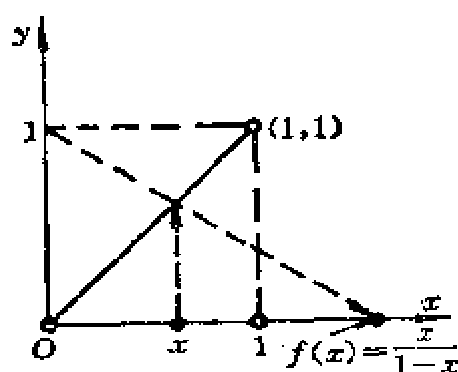


图 1.2.1

例 3 说明无限集可以和它的一个真子集一一对应，这对于有限集来说是永远办不到的.

定理 1.2.3 设$\{A_\alpha|\alpha\in\Gamma\}$, $\{B_\alpha|\alpha\in\Gamma\}$ **是两个集族，若** $\forall\alpha\in\Gamma$, $A_\alpha\sim B_\alpha$，且$A_\alpha\cap A_\beta=\varnothing$, $B_\alpha\cap B_\beta=\varnothing(\alpha\neq\beta,\alpha,\beta\in\Gamma)$，则$\bigcup_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha\sim\bigcup_{\alpha\in\Gamma}B_\alpha$.

证明留为习题.

定义 1.2.7 设A,B是两个集合.

(i) 如果A和B对等，则称A和B具有相同的势(或基数). 记集A的势为$\overline{\overline{A}}$，A和B有相同的势时，记为$\overline{\overline{A}}=\overline{\overline{B}}$;

(ii) 如果A对等于B的某个子集B_1，则称A的势小于或等于B的势，或称B的势大于或等于A的势. 记为$\overline{\overline{A}}\leqslant\overline{\overline{B}}$，或$\overline{\overline{B}}\geqslant\overline{\overline{A}}$; 如果$\overline{\overline{A}}\leqslant\overline{\overline{B}}$，并且$\overline{\overline{A}}\neq\overline{\overline{B}}$(即$A$与$B$不对等)，则称$A$的势小于$B$的势，或称$B$的势大于$A$的势，记为$\overline{\overline{A}}<\overline{\overline{B}}$，或$\overline{\overline{B}}>\overline{\overline{A}}$.

由此定义可以看出，凡是相互对等的集都具有相同的势，而不对等的两集其势不同.

我们在§1.1曾经把空集或只含有有限个元素的集合称为有限集. 在没有明确规定"有限"这个概念之前，这个说法是不严格的. 有了对等的概念，我们就可以给有限集下一个严格的定义：设A是一个集，如果存在某个自然数n，使得$A\sim\{1,2,\cdots,n\}$，则称A为有限集，称n为A的元素的个数. 规定空集为有限集，0为其元素的个数.

显然，两个有限集相互对等的充要条件是它们的元素个数相

等. 因而,元素个数是所有互相对等的有限集的公共特征.

规定有限集 A 的势就是其元素的个数,即若 A 的元素个数为自然数 n,则规定 $\overline{\overline{A}}=n$;若$A=\varnothing$,则规定 $\overline{\overline{A}}=0$.

由此可见,势的概念就是有限集元素个数概念的推广,它反映出一切相互对等的集所仅有的共性(数量属性).

判断两集是否对等,常用下面的定理.

定理 1.2.4(F. Bernstein 定理) **设 A, B 是两个集, 若有 A 之子集 A^* 及 B 之子集 B^* 存在,使 $A\sim B^*$,且 $B\sim A^*$,则 $A\sim B$.**

注 利用势的说法此定理可叙述为: 若 $\overline{\overline{A}}\leqslant\overline{\overline{B}}$, $\overline{\overline{B}}\leqslant\overline{\overline{A}}$, 则 $\overline{\overline{A}}=\overline{\overline{B}}$.

证明 根据题设, 存在 A 到 B^* 上的一一映射 f 及 B 到 A^* 上的一一映射 g(图 1.2.2).

如图,令

$$A-A^*=A_1,\quad f(A_1)=B_1,$$
$$g(B_1)=A_2,\quad f(A_2)=B_2,$$
$$g(B_2)=A_3,\quad f(A_3)=B_3,$$
$$\cdots\cdots,\quad \cdots\cdots.$$

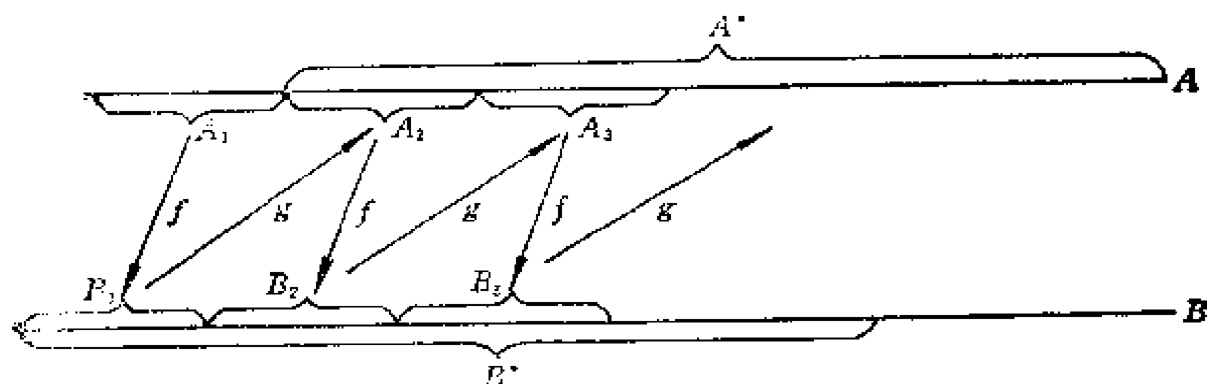


图 1.2.2 Bernstein 定理证明示意图

由 $g(B)=A^*$ 知 $A_2=g(B_1)\subset A^*$, 而 $A_1=A-A^*$, 故 A_1,A_2 不相交,从而 A_1,A_2 在 f 下的象集 B_1,B_2 不相交,从而 B_1,B_2 在 g 下的

象集 A_2，A_3 不相交．由 A_3 包含于 A^* 知 A_1 与 A_3 不相交，故 A_1，A_2，A_3 两两不相交，从而 A_1，A_2，A_3 在 f 之下的象集 B_1，B_2，B_3 两两不相交，这样一直递推下去，便知 $A_1,A_2,A_3,\cdots$ 两两不相交，且它们都是 A 的子集；$B_1,B_2,B_3,\cdots$ 也两两不相交，且它们也都是 B 的子集．由于 $A_n\overset{f}{\sim}B_n(n=1,2,\cdots)$，所以 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n\overset{f}{\sim}\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}B_n$．

由于 $B_k\overset{g}{\sim}A_{k+1}(k=1,2,\cdots)$，所以，$\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}B_k\overset{g}{\sim}\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_{k+1}$．又由于 $B\overset{g}{\sim}A^*$，所以

$$B-\bigcup_{k=1}^{\infty}B_k\overset{g}{\sim}A^*-\bigcup_{k=1}^{\infty}A_{k+1}.$$

而

$$A^*-\bigcup_{k=1}^{\infty}A_{k+1}=(A-A_1)-\bigcup_{k=1}^{\infty}A_{k+1}=A-\left[A_1\cup\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}A_{k+1}\right)\right]$$

$$=A-\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k,$$

故

$$B-\bigcup_{k=1}^{\infty}B_k\sim A-\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k.$$

从而

$$A=\left(A-\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k\right)\cup\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k\right)\sim\left(B-\bigcup_{k=1}^{\infty}B_k\right)\cup\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}B_k\right)=B.$$

证毕．

推论 1.2.5 设 $A\subset B\subset C$，若 $A\sim C$，则 $B\sim C$．

证明 因为 $C\sim A$，$A\subset B$，又 $B\sim B$，$B\subset C$，据定理 1.2.4，$B\sim C$．证毕．

推论 1.2.6 设 A,B 是任意二集，则下面三个关系式

$$\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{B}},\ \overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}},\ \overline{\overline{A}} > \overline{\overline{B}}$$

的任意两个不能同时成立.

证明 1°. 当 $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$ 时, $\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{B}}$ 及 $\overline{\overline{A}} > \overline{\overline{B}}$ 都不会成立. 即 $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$ 和 $\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{B}}$, $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$ 和 $\overline{\overline{A}} > \overline{\overline{B}}$ 都不会同时成立.

2°. 假若 $\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{B}}$ 和 $\overline{\overline{A}} > \overline{\overline{B}}$ 同时成立, 由 $\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{B}}$ 知, 存在 $B^* \subset B$, 使 $A \sim B^*$; 由 $\overline{\overline{A}} > \overline{\overline{B}}$ 知, 存在 $A^* \subset A$, 使 $B \sim A^*$, 由定理 1.2.4 知, $A \sim B$. 此事与 A 和 B 不对等矛盾. 故 $\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{B}}$ 和 $\overline{\overline{A}} > \overline{\overline{B}}$ 也不能同时成立. 证毕.

实际上, 推论 1.2.6 中的三个关系式有且仅有一个成立. 此性质叫做势的三歧性. 剩下的工作是要证明其中至少有一个关系成立. 但限于篇幅, 我们不再论证, 可参看参考文献[7].

推论 1.2.7 **设 A, B, C 是三个集合, 若 $\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{B}}$, $\overline{\overline{B}} < \overline{\overline{C}}$, 则 $\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{C}}$. (即关系"<"对于势满足传递性).**

证明 由 $\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{B}}$ 知, 存在 $B^* \subset B$, 使 $A \sim B^*$; 由 $\overline{\overline{B}} < \overline{\overline{C}}$ 知, 存在 $C^* \subset C$, 使 $B \sim C^*$. 于是存在 B 到 C^* 上的一一映射 φ, 令 $\varphi(B^*) = C^{**}$, 则 $C^{**} \subset C^*$, 且 $B^* \sim C^{**}$, 于是 $A \sim C^{**}$. 剩下的只要证明 A 与 C 不对等就可以了. 假若 $A \sim C$, 则由 $A \sim C^{**}$, 得 $C \sim C^{**}$, 因为 $C^{**} \subset C^* \subset C$, 由推论 1.2.5 知, $C \sim C^*$, 从而 $B \sim C$, 即 $\overline{\overline{B}} = \overline{\overline{C}}$. 此与 $\overline{\overline{B}} < \overline{\overline{C}}$ 矛盾. 证毕.

习 题 1.2

1. 证明定理 1.2.1 的 3), 并试作 $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$ 的例子 (其中, $f: X \to Y$ 是映射, $A, B \subset X$).
2. 证明定理 1.2.2 的 2), 4), 5), 6), 7).
3. 设 $f: X \to Y$ 是一映射, 则 $f(X) = Y \Leftrightarrow$ 对一切 $C \subset Y$, 有 $f[f^{-1}(C)] = C$.
4. 设 $f: X \to Y$ 是一映射, 则下列四件事彼此等价:

(1) f 是 X 到 Y(中) 的一一映射.

(2) $\forall A,B\subset X, f(A\cap B)=f(A)\cap f(B)$.

(3) $\forall A\subset X, A=f^{-1}[f(A)]$.

(4) $\forall A\subset X, f(X-A)=f(X)-f(A)$.

5. 试作一个$(-1,1)$到$(-\infty,+\infty)$上的一一映射，并写出这个映射的解析表达式.

6. 证明将一球面去掉一点以后，余下的点所成之集和整个平面上的点所成之集是对等的.

7. 证明定理 1.2.3.

8. 设 $f_n(x)(n=1, 2, \cdots)$ 及 $f(x)$ 都是定义在集合E上的实函数，$\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)\ (x\in E)$，则对任意实数 a，有

$$E[f\geqslant a]=\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{N=1}^{\infty}\bigcap_{n=N}^{\infty}E\left[f_n>a-\frac{1}{k}\right].$$

9. 设 $f_n(x)(n=1,2,\cdots)$及$f(x)$都是定义在集合E上的实函数，则

(1) $$\{x\,|\,x\in E, \lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)\}=\bigcap_{\varepsilon>0}\bigcup_{N=1}^{\infty}\bigcap_{n=N}^{\infty}E[|f_n-f|<\varepsilon]$$
$$=\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{N=1}^{\infty}\bigcap_{n=N}^{\infty}E\left[|f_n-f|<\frac{1}{k}\right].$$

(2)

$$\{x\,|\,x\in E, f_n(x)\not\to f(x),\ n\to\infty\}=\bigcup_{\varepsilon>0}\bigcap_{N=1}^{\infty}\bigcup_{n=N}^{\infty}E[|f_n-f|\geqslant\varepsilon]$$
$$=\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{N=1}^{\infty}\bigcup_{n=N}^{\infty}E\left[|f_n-f|\geqslant\frac{1}{k}\right].$$

§1.3 可 数 集

今后我们常用N表示全体自然数构成的集；用Z表示全体整数构成的集；用Q表示全体有理数构成的集；用R表示全体实数构成的集，即 $\mathbf{R}=(-\infty,+\infty)$.

定义 1.3.1 凡能与自然数集N对等之集均称为可数集或可列集. 可数集的势记为 $\aleph_0$（读作“阿列夫零”）.

若 A 是有限集或可数集，就说 A 是至多可数集.

因为自然数集 $\mathbf{N}=\{1,2,\cdots,n,\cdots\}$ 的元素可以排成无穷序列的形式，由此可立得以下事实：

定理 1.3.1　集 A 可数 $\Leftrightarrow A$ 的元素可以排成无穷序列的形式：

$$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots\}.$$

例 1　整数集 $\mathbf{Z}=\{0,1,-1,2,-2,3,-3,\cdots\}$ 是可数集.

定理 1.3.2　任何无限集 M 均包含一可数子集.

证明　从 M 中任取一元素记为 e_1，则 $M-\{e_1\}\neq\varnothing$，在 $M-\{e_1\}$ 中取一元素 e_2，自然 $e_1\neq e_2$，设已取出互不相同的 n 个元素：

$$e_1,e_2,\cdots,e_n\ (e_i\in M,i=1,2,\cdots,n).$$

由于 $M-\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}\neq\varnothing$. 因而可在 $M-\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$ 中取一元素 e_{n+1}，它自然不同于 $e_1,e_2,e_3,\cdots,e_n$，所以，由归纳法，我们得出了一个由 M 中互异的元素作成的无穷序列：

$$e_1,e_2,\cdots,e_n,\cdots.$$

而 $M^*=\{e_1,e_2,\cdots,e_n,\cdots\}\subset M$ 是可数的. 证毕.

定理 1.3.2 说明可数集的势是无限集的势中之最小者.

定理 1.3.3　可数集的任何无限子集可数.

证明　设 A 可数，则 A 中之元素可以排成一无穷序列：

$$a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots.$$

若 A^* 是 A 的无限子集，则 A^* 中的元素必是上述叙列中的一个无穷子序列：

$$a_{n_1},a_{n_2},\cdots,a_{n_k},\cdots.$$

由定理 1.3.1 知，$A^*=\{a_{n_1},a_{n_2},\cdots,a_{n_k},\cdots\}$ 是可数集. 证毕.

定理 1.3.4　设 $A_n\ (n=1,2,\cdots)$ 都是可数集，令

$$S=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n, \tag{1.3.1}$$

则 S 是可数集(即可数个可数集的并集是可数集).

证明 由于 S 包含可数集 A_1，所以 S 是无限集，于是只要讨论 $A_i \cap A_j = \varnothing (i \neq j)$ 的情形就可以了. 设 $A_n = \{a_{n1}, a_{n2}, \cdots, a_{nk}, \cdots\}, n=1,2,\cdots$. 考虑无限阵列

$$\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots \\ & \swarrow & \swarrow & \swarrow & \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \cdots \\ & \swarrow & \swarrow & \swarrow & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \cdots \\ & \swarrow & \swarrow & \swarrow & \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array} \tag{1.3.2}$$

在这个阵列里，A_n 的元素构成第 n 行，这个阵列含有 S 的一切元素，这些元素可以按箭头所指出的顺序排成一无穷序列:

$$a_{11}; a_{12}, a_{21}; a_{13}, a_{22}, a_{31}; a_{14}, a_{23}, a_{32}, a_{41}; \cdots\cdots. \tag{1.3.3}$$

其排列规则是 a_{11} 排第 1 位，当 $i+j>2$ 时，a_{ij} 排在第 n 位，其中

$$n = i + \sum_{k=1}^{i+j-2} k,$$

因此 S 是可数集. 证毕.

推论 1.3.5 **设 Γ 是至多可数的，且对每个 $\alpha \in \Gamma$，B_α 是至多可数的，令 $T = \bigcup_{\alpha \in \Gamma} B_\alpha$，则 T 是至多可数的.**

这是因为 T 与(1.3.1)中的一个子集对等.

推论 1.3.6 **全体有理数之集 $\mathbb{Q}$ 是可数集.**

证明 用 Q^+, Q^- 分别表示正，负有理数集，则

$$\mathbb{Q} = Q^+ \cup Q^- \cup \{0\}.$$

设 $A_i = \left\{\frac{1}{i}, \frac{2}{i}, \frac{3}{i}, \cdots\right\} (i=1, 2, \cdots)$，则 A_i 是可数集. 于是，$Q^+ = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ 可数，同理可证，Q^- 可数. 故 $\mathbb{Q} = Q^+ \cup Q^- \cup \{0\}$ 是可

数集. 证毕.

定理 1.3.7 **若集 A 中每个元素由 k 个互相独立的指标所决定,而每一个指标各自跑遍一个可数集,即**

$$A=\{a_{x_1,x_2,\cdots,x_k}\,|\,x_i=x_i^{(1)},x_i^{(2)},\ \cdots;i=1,2,\cdots,k\},\qquad(1.3.4)$$

则 A 是可数集.

证明 用数学归纳法证明:

1) 当 $k=1$ 时,定理显然成立;

2) 假设当 $k=n$ 时定理成立,即

$\{a_{x_1,x_2,\cdots,x_n}\,|\,x_i=x_i^{(1)},x_i^{(2)},\cdots;i=1,2,\cdots,n\}$ 可数. 下证 $k=n+1$ 时,定理也成立.

令 $A_j=\{a_{x_1,x_2,\cdots,x_n,\ x_{n+1}^{(j)}}\,|\,x_i=x_i^{(1)},\ x_i^{(2)},\ \cdots;\ i=1,\ 2,\cdots,n\}$,

则 A_j 可数. 故

$\bigcup\limits_{j=1}^{\infty}A_j=\{a_{x_1,x_2,\cdots,x_n,x_{n+1}}\,|\,x_i=x_i^{(1)},\ x_i^{(2)},\cdots;\ i=1,2,\cdots,n,$ $n+1\}$ 也可数. 这说明当 $k=n+1$ 时,定理确实成立.

由 1),2) 知,定理对任意自然数 k 成立. 证毕.

例 2 平面上坐标为有理数的点所成之集 A 是可数集.

证明 因为 $A=\{(a,b)\,|\,a,b\in\mathbf{Q}\}$,据定理 1.3.7,集 A 可数. 证毕.

例 3 整系数多项式的实数根称为代数数. 证明代数数全体是可数集.

证明 用P表示整系数多项式全体所成之集. 因为每一个整系数多项式的实数根全体是一个有限集, 1 次整系数多项式全体的实数根所成之集$\left\{x=-\frac{a_1}{a_0}\,\middle|\,a_0\neq0,\ a_0,\ a_1\in\mathbf{Z}\right\}$是可数集. 所以只要证明$P$是可数集即可. 令

$$P_n=\{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n\,|\,a_0\neq0,a_i\in\mathbf{Z};i=0,1,2,\cdots,n\}.$$

据定理 1.3.7,P_n可数. 从而 $P=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}P_n$可数. 证毕.

定理 1.3.8 若集 A 中的元素都可以用有限多个自然数作成的数组来标号，则 A 是至多可数的.

证明 令 $B_k=\{b_{m_1,m_2,\cdots,m_k}|m_i=1,2,\cdots;\ i=1,2,\cdots,k\}$，则 B_k 可数. 从而 $B=\bigcup_{k=1}^{\infty}B_k$ 也可数. 但 A 和 B 的一个子集对等，故 A 是至多可数的. 证毕.

例 4 设 A 是一个无限集，则必有 $A^*\subset A$，使 $A^*\sim A$，而 $A-A^*$ 可数.

证明 据定理 1.3.2，A 包含可数子集 $\{e_1,e_2,e_3,\cdots\}$. 令 $A_0=A-\{e_1,e_2,e_3,\cdots\}$，$A^*=A-\{e_1,e_3,e_5,\cdots\}=A_0\cup\{e_2,e_4,e_6,\cdots\}$，则 $A^*\subset A$. 证毕.

$$A^*=A_0\cup\{e_2,e_4,e_6,\cdots\}\sim A_0\cup\{e_1,e_2,e_3,\cdots\}=A.$$

且 $A-A^*=\{e_1,e_3,e_5,\cdots\}$ 是可数集. 证毕.

例 4 告诉我们，无限集必与它的一个真子集对等.

例 5 设 A 是无限集，B 是可数集，则 $A\cup B\sim A$.

证明 设 $A^*\subset A$，A^* 可数，则 $A=(A-A^*)\cup A^*$. 令 $B^*=B-A$，则 B^* 至多可数，且 $A\cap B^*=\varnothing$，从而，$A\cup B=A\cup B^*=(A-A^*)\cup(A^*\cup B^*)\sim(A-A^*)\cup A^*=A$. 证毕.

习 题 1.3

1. 证明直线上互不相交的开区间所成之集至多可数.
2. 证明系数为有理数的多项式全体组成一个可数集.
3. 证明定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的单调函数的间断点所成之集至多可数.
4. 设 A 是可数集，则 A 的所有有限子集作成的集合也是可数集.
5. 试作一个 $(0,1)$ 到 $[0,1]$ 上的一一映射.
6. 试作一个无理数集到实数集上的一一映射.

§1.4 不可数集

不是可数集的无限集称为不可数集.

定理 1.4.1 **区间$[0,1]$是一个不可数集.**

证明 假设$[0, 1]$可数，则$[0, 1]$上的点可以排成一个无穷序列:

$$x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots.$$

记$[0,1]$为I_0，把I_0三等分，于其中取一不含x_1的闭区间，记为I_1，则I_1的长度$|I_1|=\frac{1}{3}$. 再把I_1三等分，于其中取一不含x_2的闭区间，记为I_2，则$|I_2|=\frac{1}{3^2}$. 设符合上述要求的闭区间$I_1, I_2, \cdots, I_n$已经作出，即

$$I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_n,\ |I_i|=\frac{1}{3^i}, x_i \overline{\in} I_i \quad (i=1,2,\cdots,n),$$

则将I_n三等分，于其中取一不含x_{n-1}的闭区间，记为I_{n+1}，$|I_{n+1}|=\frac{1}{3^{n+1}}$. 由数学归纳法，我们就得到了一个闭区间套:

$$I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_n \supset \cdots,\ |I_n|=\frac{1}{3^n}, x_n \overline{\in} I_n (n=1,2,\cdots).$$

因为$|I_n|=\frac{1}{3^n} \to 0 (n \to \infty)$，由数学分析中的闭区间套定理知，存在唯一点$x_0 \in I_n \subset I_0=[0,1] (n=1,2,\cdots)$. 根据假设，应有自然数$n_0$，使$x_0=x_{n_0}$. 因$x_{n_0} \overline{\in} I_{n_0}$，从而$x_0 \overline{\in} I_{n_0}$，这与$x_0 \in I_n (n=1,2,\cdots)$矛盾，故$[0,1]$是不可数集. 证毕.

定理 1.4.1 说明，不可数集是存在的.

定义 1.4.1 与区间$[0,1]$对等的集的势称为连续势，这个势记作$\aleph$(读作"阿列夫")，或记作c.

推论 1.4.2 $\aleph > \aleph_0$.

证明 由定理 1.4.1 知，$\aleph \neq \aleph_0$，但

$$[0,1]\supset\left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots\right\}\sim\{1,2,3,\cdots\}$$，故 $\aleph>\aleph_0$. 证毕.

推论 1.4.3 **开区间 $(0,1)$ 的势也是 $\aleph$.**

证明 见习题 1.3 的 5.

定理 1.4.4 **全体实数所成之集 $\mathbb{R}$ 的势是 $\aleph$.**

证明 令 $\varphi(x)=\operatorname{tg}\frac{2x-1}{2}\pi,x\in(0,1)$.

则 φ 是 $(0,1)$ 到 $\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$ 上的一一映射，所以 $\mathbb{R}$ 的势是 $\aleph$. 证毕.

推论 1.4.5 **全体无理数所成之集的势是 $\aleph$.**

证明 见习题 1.3 的 6.

不是代数数的实数称为超越数. 由 § 1.3 例 3 可以得到

推论 1.4.6 **超越数全体所成之集的势为 $\aleph$.**

在 Cantor 创立集合论以前，好多数学家用了很长时间才证明个别的数如 e 是超越数，而集合论一出现，立即证明超越数很多，远比代数数多. 当然，势的理论并不能给我们具体地指出那些数是超越数，但尽管如此，却并不因此而失去它的重要意义.

定理 1.4.7 **实数列全体所成之集 E_∞ 的势是 $\aleph$.**

证明 作

$$B=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)\mid x_i\in(0,1),i=1,2,\cdots\}\subset E_\infty.$$

令

$$\varphi: B\ni(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)\mapsto\left\{\operatorname{tg}\left(x_1-\frac{1}{2}\right)\pi,\ \operatorname{tg}\left(x_2-\frac{1}{2}\right)\pi,\cdots,\right.$$

$$\left.\operatorname{tg}\left(x_n-\frac{1}{2}\right)\pi,\ \cdots\right\}\in E_\infty.$$

则 $B\overset{\varphi}{\sim}E_\infty$，即 $\overline{\overline{B}}=\overline{\overline{E}}_\infty$. 以下只要证明 $B\sim(0,1)$ 即可.

令

$$\chi:(0,1)\ni x\mapsto(x,x,x,\cdots)\in B,$$

则

$$(0,1)\overset{\chi}{\sim}B^*=\{(x,x,x,\cdots)\mid x\in(0,1)\}\subset B.$$

反之，$\forall x=(x_1,\ x_2,\ \cdots,x_n,\cdots)\in B$. 按十进位无限小数表示 x_n，有

$$x_1=0.x_{11}\ \ x_{12}\ \ x_{13}\ \cdots\ \ x_{1n}\ \cdots$$



$$x_2=0.x_{21}\ \ x_{22}\ \ x_{23}\ \cdots\ \ x_{2n}\ \cdots$$



$$x_3=0.x_{31}\ \ x_{32}\ \ x_{33}\ \cdots\ \ x_{3n}\ \cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_n=0.x_{n1}\ \ x_{n2}\ \ x_{n3}\ \cdots\ \ x_{nn}\ \cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

令

$$\psi(x)=\psi[(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)]=0.x_{11}x_{12}x_{21}x_{13}x_{22}x_{31}\cdots\cdots,$$

$$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)\in B,$$

则 $\mathscr{R}(\psi)=\{\psi(x)\mid x\in B\}\subset(0,\ 1)$. 且 $\forall x,\ y\in B$. 当 $x\neq y$ 时，有 $\psi(x)\neq\psi(y)$，于是 $B\overset{\psi}{\sim}\mathscr{R}(\psi)\subset(0,\ 1)$. 由定理 1.2.4 知，$B\sim(0,1)$. 证毕.

定理 1.4.8 设 $\mathbb{R}^n=\{(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)\mid x_i\in(-\infty,\ +\infty),\ i=1,2,\cdots,n\}$，则 $\mathbb{R}^n$ 的势是 $\aleph$.

证明 令 $\varphi:\mathbb{R}^n\ni(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mapsto(x_1,x_2,\cdots,x_n,0,0,\cdots)\in E_\infty$，则 $\mathbb{R}^n\overset{\varphi}{\sim}\varphi(\mathbb{R}^n)\subset E_\infty$，又 $E_\infty\sim\mathbb{R}^1$，所以 $\exists\mathbb{R}^*\subset\mathbb{R}^1$，使 $\mathbb{R}^n\sim\mathbb{R}^*$.

反之，令 $\psi:\mathbb{R}^1\ni x\mapsto(x,0,\cdots,0)\in\mathbb{R}^n$，则 $\mathbb{R}^1\overset{\psi}{\sim}\psi(\mathbb{R}^1)\subset\mathbb{R}^n$. 由定理 1.2.4 知，$\mathbb{R}^n\sim\mathbb{R}^1=(-\infty,\ +\infty)$，故 $\mathbb{R}^n$ 的势是 $\aleph$.

证毕.

如果 A 是一个集合，我们今后常用 2^A 表示 A 的所有子集构成的集族. 例如，

$$2^{\{1,2\}}=\{\varnothing,\{1\},\{2\},\{1,2\}\}.$$

定理 1.4.9 **设 A 是任意的一个集合，则 $\overline{\overline{2^A}}>\overline{\overline{A}}$.**

证明 显然，$A\sim\{\{a\}\mid a\in A\}\subset 2^A$. 只要再证 A 与 2^A 不对等即可. 假设 $A\sim 2^A$，则存在 A 到 2^A 上的一一映射 φ. 令

$$A'=\{a\mid a\in A, a\overline{\in}\varphi(a)\}\subset A.$$

因与 2^A 中的空集对应的元素不属于此空集，所以 A' 非空，且 $A'\in 2^A$. 从而应有 $a'\in A$，使 $\varphi(a')=A'$.

1° 若 $a'\in A'$，则与 A' 之定义矛盾，因 A' 是由 A 中使 $a\overline{\in}\varphi(a)$ 的元素全体构成的，可见 $a'\overline{\in}A'$.

2° 若 $a'\overline{\in}A'$，说明 $a'\overline{\in}\varphi(a')$，据 A' 之定义，a' 应是 A' 中的元素，这正好又说明 $a'\in A'$，矛盾.

故 A 与 2^A 不对等. 证毕.

定理 1.4.9 告诉我们，不可能存在一个最大的势.

如果 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ 是由 n 个元素组成的有限集，因为 2^A 含 C_n^0 个空集，C_n^1 个单元素集，C_n^2 个二元素集，$\cdots$，C_n^n 个 n 元素集，所以 2^A 的元素个数是 $C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n=2^n$. 一般地，如果 $\overline{\overline{A}}=\alpha$，我们规定 $\overline{\overline{2^A}}=2^\alpha$. 定理 1.4.9 说明 $2^\alpha>\alpha$.

定理 1.4.10 $\aleph=2^{\aleph_0}$.

此定理留待第二章再予证明.

习 题 1.4

1. 证明 $[0,1]$ 上的无理数所成之集是不可数集.

2. 设 F 是 $[0,1]$ 上的全体实函数所作成的集，则 $F\sim 2^{[0,1]}$，从而，$\overline{\overline{F}}>\aleph$.

3. 证明数轴上一切闭区间所成之集的势为$\aleph$.

4. 证明平面上一切圆所成之集的势为$\aleph$.

5. 证明区间$[0,1]$上的连续函数全体所成之集的势是$\aleph$.

6. 证明：实数集 R 的子集(a,b)、$(a,b]$、$[a,b)$、$[a,b]$ $(a,b\in\mathbf{R}$，且 $a<b)$ 及$(a,+\infty)$、$[a,+\infty)$、$(-\infty,b)$、$(-\infty,b]$ $(a,b\in\mathbf{R})$的势都是$\aleph$.

7. 设$\{A_\alpha \mid \alpha\in\Lambda\}$是一族势为$\aleph$的集，证明当$\Lambda$是有限集、可数集、势为$\aleph$的集时，$\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha$ 的势都是$\aleph$.

8. 若集A中每个元素由n个互相独立的记号所决定，而每一个记号各自跑遍一个势为$\aleph$的集，即

$$A=\{a_{x_1,x_2,\cdots,x_n} \mid x_i\in X_i,\ \overline{\overline{X_i}}=\aleph;\ i=1,2,\cdots,n\},$$

则集A的势是$\aleph$.

9. 若集A中每个元素由可数个互相独立的记号所决定，而每一个记号各自跑遍一个势为$\aleph$的集，即

$$A=\{a_{x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots} \mid x_i\in X_i,\ \overline{\overline{X_i}}=\aleph,\ i=1,2,\cdots,n,\cdots\},$$

则集A的势为$\aleph$.

§1.5 半序集与 Zorn 引理

定义 1.5.1 对于给定的集 X，若在它的元素之间，能引进关系"$\leqslant$"(这里作为序的记号，可读成"小于或等于")，满足序公理：

1) $a\leqslant a$,

2) 若 $a\leqslant b, b\leqslant a$，则 $a=b$,

3) 若 $a\leqslant b, b\leqslant c$，则 $a\leqslant c$,

其中 $a,b,c\in X$，则称X为带有序"$\leqslant$"的半序集.

若对半序集X的任何两个元素 a，b，关系式 $a\leqslant b$ 与 $b\leqslant a$ 中必有一个成立，则称X为带有序"$\leqslant$"的全序集.

记号"$a\leqslant b$"也可写成"$b\geqslant a$". 记号$a<b$表示"$a\leqslant b$ 但 $a\neq b$".

例 1 自然数集、整数集、有理数集、实数集都依实数的大小

关系成为全序集.

定义 1.5.2 设X为半序集，X_0为X的子集. 若有$b\in X$，使对一切$x\in X_0$，都有$x\leqslant b$，则称b为X_0的上界. 如果b为X_0的上界，且对X_0的任一上界b'，均有$b\leqslant b'$，则称b为X_0的上确界. X_0的下界、下确界可以类似地定义. X_0的上、下确界分别记为$\sup X_0$、$\inf X_0$.

注意 X_0的上、下确界未必属于X_0，X_0也可以没有上界和下界，从而没有上、下确界.

例 2 设$X=(0,3)$，X按实数的通常大小关系成为半序集.

1° 取$X_0=(1,2)\subset X$，则$[2,3)$中每一点都是X_0的上界，$(0,1]$中每一点都是X_0的下界，而$\sup X_0=2\overline{\in}X_0$，$\inf X_0=1\overline{\in}X_0$.

2° 取$X_1=(0,3)\subset X$，则X_1在X中既不存在上界，也不存在下界，当然也就不存在上、下确界.

例 3 设E为一非空集，2^E依平常集的包含关系（$A,B\in 2^E$，$A\leqslant B$的意义是指$A\subset B$）成一半序集，但不是全序集. 设$X_0\subset 2^E$，显然，$\sup X_0=\bigcup\limits_{A\in X_0}A$，$\inf X_0=\bigcap\limits_{A\in X_0}A$.

为了证明在本节讨论中起基本作用的一条定理，我们还需引入下面的定义：

定义 1.5.3 设X为非空半序集，它的每个非空全序子集均有上确界，取定元$a\in X$与映射f：$X\to X$. 称X的子集A为容许集，如果满足下列三条件：

1) $a\in A$，

2) $f(A)\subset A$，

3) A的每一全序子集的上确界均属于A.

显然，X本身满足 1)—3)，故容许集存在.

定理1.5.1 设X为非空半序集，且X的每一非空全序子集均有一上确界，再设映射$f: X\to X$满足$f(x)\geqslant x(x\in X)$，那么必有一元$c\in X$，使得$f(c)=c$.

*证明 分以下四步进行讨论：

第一步，设一切容许集的交为P，则有关系式

$$a\leqslant x \quad (x\in P), \tag{1.5.1}$$

其中a是X中取定的一个元.

其实，P是最小的容许集. 因为$\{x\mid x\in X, x\geqslant a\}\subset X$是一容许集，所以，$\{x\mid x\in X, x\geqslant a\}\supset P$，故(1.5.1)成立.

第二步，令

$$B=\{x\mid x\in P;\text{由 } y\in P,\ y<x \text{ 即有 } f(y)\leqslant x\}\cup\{a\}.$$

我们证明，由$x\in B, z\in P$，即有

$$z\leqslant x \quad \text{或} \quad z\geqslant f(x). \tag{1.5.2}$$

其实，固定$x\in B$，令

$$C=\{z\mid z\in P; z\leqslant x \text{ 或 } z\geqslant f(x)\}.$$

可以验证C满足容许集的条件1)—3). 由(1.5.1)知1)成立. 设$z\in C$，则当$z\in P, z\geqslant f(x)$时，由于$f(z)\geqslant z$，所以$f(z)\geqslant f(x)$；当$z\in P, z\leqslant x$时，有$f(z)=f(x)$(对于$z=x$)或$f(z)\leqslant x$(对于$z<x$，注意到$x\in B$). 又因为$z\in P$，P是容许集，所以$f(z)\in P$. 从而$f(z)\in C$，即$f(C)\subset C$. 2) 得证. 最后，设C_0为C的任一非空全序子集，$c_0=\sup C_0$. 那么，或对一切$z\in C_0$，有$z\leqslant x$；或有某一$z\in C_0$，使$z\geqslant f(x)(z\in P)$. 在前一情形，得$c_0\leqslant x$；在后一情形，有$c_0\geqslant f(x)$. 又因为$C_0\subset C\subset P$，P是容许集，所以$c_0\in P$. 这说明$c_0\in C$. 3) 得证. 因而C为容许集. 由于$C\subset P$，而P为最小容许集，故$C=P$，从而看出(1.5.2)成立.

第三步，证明第二步中的B为容许集. 仍然验证B满足容许集的条件1)—3). 1) 据B的定义，$a\in B$. 2) 设$x\in B, y\in P$，则

由(1.5.2)知，$y \leqslant x$ 或 $y \geqslant f(x)$. 从而推出，当 $y < f(x)$ 时有 $y \leqslant x$. 如果 $y = x$，那么 $f(y) = f(x)$；如果 $y < x$，就有 $f(y) \leqslant x$（由于 $x \in B$），从而据定理中关于 f 的假设，有 $f(y) \leqslant x \leqslant f(x)$. 总之，当 $y < f(x)$ 时，得到 $f(y) \leqslant f(x)$. 又由 $x \in P$ 知 $f(x) \in P$，故 $f(x) \in B$，即 $f(B) \subset B$. 2) 得证. 3) 设 B_0 为 B 的任一非空全序子集，$b_0 = \sup B_0$. 由于 $B_0 \subset B \subset P$，P 是容许集，所以 $b_0 \in P$. 设 $y \in P$，$y < b_0$，则据 (1.5.2)，$\forall x \in B_0$，有 $y \leqslant x$ 或 $y \geqslant f(x)$. 后者不可能对每一 $x \in B_0$ 成立. 否则，将有 $y \geqslant f(x) \geqslant x$，从而 y 将为 B_0 的上界，于是 $y \geqslant b_0$，这是不可能的. 故对上述 y，必有某一 $x \in B_0$，使 $y \leqslant x$. 当 $y < x$ 时，据 B 与 b_0 的定义，$f(y) \leqslant x \leqslant b_0$；当 $y = x$ 时，因 y 不是 B_0 的上确界 b_0，应有某一 $z \in B_0$，使 $y < z$，此时将有 $f(y) \leqslant z \leqslant b_0$. 总之，得到 $f(y) \leqslant b_0$. 这说明 $b_0 \in B$. 从而 3) 得证.

第四步，令 $c = \sup P$. 我们证明 $f(c) = c$.

据第三步所证，B 为容许集，故 $B \supset P$，但 B 中的元均属于 P，故 $B = P$. 从而据(1.5.2)，对任何 $x, z \in P$，有 $z \leqslant x$ 或 $z \geqslant f(x)$. 由于 $f(x) \geqslant x$，从而得到 $z \leqslant x$ 或 $z \geqslant x$，即 x 与 z 可以比序，这说明 P 是全序集. 因 $c = \sup P$，$P \subset P$，P 是容许集，所以 $c \in P$，从而 $f(c) \in P$，故 $f(c) \leqslant c$；同时据定理中关于 f 的假设，$f(c) \geqslant c$. 再据关于半序集的条件 2)，得 $f(c) = c$. 证毕.

定义 1.5.4 设 X 为一非空半序集，$x \in X$，称 x 为 X 的极大元，如果 $y \in X$，且 $y \geqslant x$，则必有 $y = x$.

关于极小元可以类似地定义.

注意 一个集的极大元、极小元未必是唯一的.

例 4 设 E 为一非空集，2^E 依平常集的包含关系(意义同例3)成一半序集. 容易看出 2^E 的极大元为 E，极小元为 $\varnothing$. 若考虑 2^E 的一子集 $X = 2^E - \{\varnothing\}$，则把 E 中任一元素所成的单元素集看成 X 的元时，都是 X 的极小元.

Zermelo 选择公理 设X是非空集，$\{A_\alpha|\alpha\in\Gamma\}$是$X$的一族两两不相交的非空子集，则有$X$的子集$B$，使得$\forall\alpha\in\Gamma$，$B\cap A_\alpha$是单元素集.

由 Zermelo 选择公理可得下面的定理.

定理 1.5.2 设X是非空集，$\{A_\alpha|\alpha\in\Gamma\}$是$X$的一族非空子集，则有映射$\varphi$：$\Gamma\to X$使得$\varphi(\alpha)\in A_\alpha(\forall\alpha\in\Gamma)$.

证明 令

$$\tilde{X}=\{(\alpha,x)\,|\,\alpha\in\Gamma,x\in X\},$$

$$B_\alpha=\{(\alpha,x)\,|\,x\in A_\alpha\}\quad(\alpha\in\Gamma),$$

则$\tilde{X}$非空，且$\{B_\alpha|\alpha\in\Gamma\}$是$\tilde{X}$的一族两两不相交的非空子集. 据 Zermelo 选择公理，必有$\tilde{X}$的子集B使得$\forall\alpha\in\Gamma$，$B\cap B_\alpha$是单元素集. 令$\varphi(\alpha)$是使$\{(\alpha,\varphi(\alpha))\}=B\cap B_\alpha$的那个($A_\alpha$中的)元，$\varphi$即合要求. 证毕.

定理 1.5.3 每一半序集都含有极大全序子集.

证明 设X是所给带有序$\leqslant$的半序集，用$\mathscr{A}$表示X的一切全序子集所成的类，$\mathscr{A}$中的元依平常集的包含关系$\subset$成一半序集. 我们要证明，$\mathscr{A}$有一极大元.

假如不然，$\mathscr{A}$中无极大元，那么对$\mathscr{A}$中任一元A，由于不是极大元，都存在$\mathscr{A}$的一元$A_1\neq A$，使$A_1\supset A$. 令

$$\mathscr{B}_A=\{A_1\,|\,A_1\in\mathscr{A},A_1\neq A,A_1\supset A\}\quad(A\in\mathscr{A}),$$

则$\{\mathscr{B}_A|A\in\mathscr{A}\}$是$\mathscr{A}$的一族非空子类. 据定理 1.5.2，存在映射$f$：$\mathscr{A}\to\mathscr{A}$使得$f(A)\in\mathscr{B}_A(A\in\mathscr{A})$. 由$\mathscr{B}_A$的定义即知，$f(A)\neq A$，$f(A)\supset A(A\in\mathscr{A})$. 据本节例 3，$\mathscr{A}$的每一非空全序子集恒存在上确界，于是根据定理 1.5.1，存在一个元$A_0\in\mathscr{A}$，使$f(A_0)=A_0$. 据映射f的定义，$f(A_0)\supset A_0$，但$f(A_0)\neq A_0$，矛盾. 故定理的结论为真. 证毕.

Zorn 引理 设X为非空半序集，若X的每一非空全序子集有

上确界，则X有极大元.

证明 根据定理1.5.3，X有一极大全序子集X_0，令$x_0=\sup X_0$，任取一元$x\in X$，满足$x_0\leqslant x$，若$x\notin X_0$，则集$X_0\cup\{x\}$为一全序子集，它包含X_0作为真子集.这与X_0为极大全序子集矛盾，故$x\in X_0$. 又因为x_0为X_0的上确界，故$x\leqslant x_0$. 据半序集的条件2)，$x=x_0$. 故x_0为X的极大元. 证毕.

类似地有关于下确界和极小元(存在性)的引理.

Zorn引理在泛函分析的基本理论中常要用到，是证明别的一些定理的基础. Zorn引理和Zermelo选择公理是等价的，剩下的证明可参看参考文献[11].

习　题　1.5

试证：设X为非空半序集，若X的每一非空全序子集有上界，则X有极大元(*Zorn*引理的另一种形式).

第二章　点　　集

因为我们要研究的是一般的 n 个自变数的实值函数，所以，必须对 n 维欧几里得(Euclid)空间中的点集(简称点集)的理论加以讨论. 同时，这也是为讨论点集的测度问题做准备工作. 第一章关于集合的一般结果，自然对点集适用，本章将进一步讨论点集所特有的一些性质，其中有些性质我们在数学分析中已有所了解. 为了讨论问题的需要，本章先介绍 p 进位表数法，作为预备知识，然后再讨论点集.

§2.0　p 进位表数法

本节先介绍 p 进位表数法，然后再建立一个定理.

设 p 是大于 1 的任一正整数，$x\in(0,1)$. 用分点 $C_0^1=0, C_1^1, C_2^1, C_3^1, \cdots, C_{p-1}^1, C_p^1=1$ 将闭区间$[0,1]$均分为 p 段（图 2.0.1 是 $p=3$

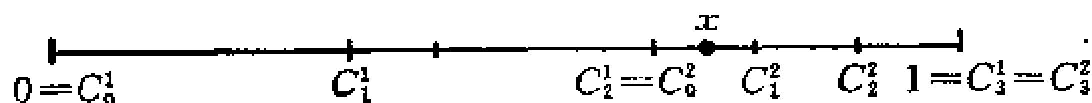


图　2.0.1

的情形)，若 x 不是分点，即 x 属于某个$(C_{a_1}^1, C_{a_1+1}^1)$(a_1 是小于 p 的非负整数)，则 x 的第一位小数记为 a_1；若 $x=C_i^1(1\leqslant i\leqslant p-1)$ 是一个分点，即 $x\in[C_{i-1}^1, C_i^1]\cap[C_i^1, C_{i+1}^1]$，此时 x 的第一位小数的取法有两个，即 $i-1$ 和 i. 我们称取 $a_1=i-1$ 时为第一种表示法，取 $a_1=i$ 时为第二种表示法. 现设已取定了其中一种，于是又可用分点 $C_0^2=C_{a_1}^1, C_1^2, \cdots, C_{p-1}^2$，$C_p^2=C_{a_1+1}^1$ 将闭区间$[C_{a_1}^1, C_{a_1+1}^1]$均分为 p 段，若 x 不是第一次分割时的分点，也不是第二次分割时的分点，即 x 属于某个$(C_{a_2}^2, C_{a_2+1}^2)$(a_2 是小于 p 的非负整数)，则 x

的第二位小数记为 a_2；若 x 不是第一次分割时的分点，但却是第二次分割时的分点，即 $x\in[C^2_{j-1},C^2_j]\cap[C^2_j,C^2_{j+1}]$ $(1\leqslant j\leqslant p-1)$，则 x 的第二位小数的取法有两个，即 $j-1$ 和 j. 若 x 是第一次分割时的分点，且 x 的第一位小数取为 $i-1$ 时，即取 $[C^1_{a_1},C^1_{a_1+1}]=[C^1_{i-1},C^1_i]$ 时，则 x 的第二位及第二位以后的小数均为 $p-1$；若 x 是第一次分割时的分点，且 x 的第一位小数取为 i 时，即取 $[C^1_{a_1},C^1_{a_1+1}]=[C^1_i,C^1_{i+1}]$ 时，则 x 的第二位及第二位以后的各位小数均为 0. 如此无休止地作下去，如果 x 永远不是分点，则

$$x=0.a_1a_2a_3\cdots\cdots.$$

的表示法是唯一的，如果 x 是第 k 次的分点，而不是第 $k-1$ 次的分点，则

$$x=\begin{cases}0.a_1a_2\cdots a_{k-1}b_k(p-1)(p-1)\cdots\\0.a_1a_2\cdots a_{k-1}(b_k+1)00\cdots\end{cases}\tag{2.0.1}$$

有两种表示法.

显然，x 是第 k 次分割的分点 $\Leftrightarrow x=\dfrac{m}{p^k}$（$m$ 是小于 p^k 的正整数）. 因此，$\forall x\in(0,1)$，若 $x\neq\dfrac{m}{p^k}$（m 是小于 p^k 的正整数，$k=1,2,\cdots$），则 x 可唯一地表成 p 进位无穷小数的形式：

$$x=0.a_1a_2a_3\cdots\cdots.$$

而如果 x 是 $\dfrac{m}{p^k}$ 之形式，则它就有两种表示法.

下面我们来说明，对于任意一个由小于 p 的非负整数作成的"序列"

$$0.a_1a_2a_3\cdots\cdots,\tag{2.0.2}$$

也都表示 $[0,1]$ 上的一个确定的点. 令

$$A=\{y=0.a_1a_2a_3\cdots a_i\cdots\mid a_i\text{为小于 }p\text{ 的非负整数}, i=1,2,\cdots\}.\tag{2.0.3}$$

$\forall y=0.a_1a_2a_3\cdots\in A$，我们总可以按照 $a_1,a_2,a_3,\cdots$ 出现的次序，从上述的区间分割过程中挑出一串逐个包含的闭区间序列：

$$[0,1]\supset[C^1_{a_1},C^1_{a_1+1}]\supset[C^2_{a_2},C^2_{a_2+1}]\supset\cdots\supset[C^n_{a_n},C^n_{a_n+1}]\supset\cdots,$$

其中，a_n 是小于 p 的非负整数，$[C^n_{a_n},C^n_{a_n+1}]$ 的长度为 $\frac{1}{p^n}(n=1,2,\cdots)$. 由于 $\frac{1}{p^n}\to 0\ (n\to\infty)$，据数学分析中的闭区间套定理，存在唯一的点 $x\in[C^n_{a_n},C^n_{a_n+1}]\subset[0,1]\ (n=1,2,\cdots)$. 记 ψ：$A\ni y\mapsto x\in[0,1]$. 则 ψ 是 A 到 $[0,1]$ 上的映射. 但当 $y_1=0.a_1a_2\cdots a_{k-1}b_k(p-1)(p-1)\cdots$，$y_2=0.a_1a_2\cdots a_{k-1}(b_k+1)00\cdots$，$y_1,y_2\in A,y_1\neq y_2$ 时，却有 $\psi(y_1)=\psi(y_2)$，这说明 ψ 不是 A 到 $[0,1]$ 上的一一映射，这里需要特别指出的是：

$$\psi:\ A\ni 0.(p-1)(p-1)\cdots\cdots\mapsto 1\in[0,1],$$

$$\psi:\ A\ni 0.00\cdots\cdots\mapsto 0\in[0,1].$$

若 $p=10$，则所有 a_i 都是由数字 $0,1,2,\cdots,9$ 作成的，得出的就是普通的十进位表示法. 如果 $p=2$，则 a_i 是 0 或 1，这就是二进位表示法.

定理 2.0.1　设 B 是由 $0,1,2,\cdots,(p-1)$（p 是大于 1 的任意正整数）这 p 个数字所排序列之全体，即

$$B=\{(a_1,a_2,\cdots,a_i,\cdots)\,|\,a_i\in\{0,1,2,\cdots,(p-1)\},i=1,2,\cdots\},\tag{2.0.4}$$

则 $\overline{\overline{B}}=\aleph$.

证明　显然 $\overline{\overline{B}}=\overline{\overline{A}}$（$A$ 指集(2.0.3)），于是只要证明 $\overline{\overline{A}}=\aleph$ 即可. 在 p 进位表数法中我们约定遇到 x 是分点的情形，都用第一种表示法，按此约定，$\forall x\in(0,1)$ 有唯一的 p 进位小数 $0.a_1a_2a_3\cdots a_i\cdots$（其中 a_i 为小于 p 的非负整数，$i=1,2,\cdots$）与之对应. 记

$$\varphi:\ (0,1)\ni x\mapsto 0.a_1a_2a_3\cdots a_i\cdots\in A,$$

则 φ 是从 $(0,1)$ 到 A 中的一一映射. 令

$$A^*=\mathscr{R}(\varphi)=\{\varphi(x)\mid x\in(0,1)\}\subset A,$$

则$(0,1)\overset{\varphi}{\sim}A^*$. 故$\overline{\overline{A^*}}=\aleph$. 令

$$T=\left\{x=\frac{m}{p^k}\middle| m\text{ 为小于 }p^k\text{ 的正整数}, k=1,2,\cdots\right\},$$

则T是可数集. 但$A-A^*\sim T\cup\{0,1\}$,即$A-A^*$是可数集. 又因为$A=(A-A^*)\cup A^*\sim A^*$,故$\overline{\overline{A}}=\aleph$. 证毕.

推论 2.0.2 设

$$D=\{(a_1,a_2,\cdots,a_i,\cdots)\mid a_i\in\{0,1\}, i=1,2,\cdots\}, \quad (2.0.5)$$

则$\overline{\overline{D}}=\aleph$.

这是因为D是 (2.0.4) 中 $p=2$ 的情形. 此推论今后常要用到.

例 证明定理 1.4.10,即证明 $\aleph=2^{\aleph_0}$.

证明 因为$\overline{\overline{2^{\mathrm{N}}}}=2^{\aleph_0}$(N 为自然数集), 所以只要证明 $2^{\mathrm{N}}\sim D$ (D 指集(2.0.5))即可. $\forall N^*\in 2^{\mathrm{N}}$,令

$$\varphi:\ N^*\mapsto(a_1,a_2,\cdots,a_k,\cdots)\in D,$$

其中 $a_k=\begin{cases}1, \text{当 } k\in N^*,\\ 0, \text{当 } k\overline{\in} N^*;\end{cases}$ $k=1,2,\cdots$.

则$2^{\mathrm{N}}\overset{\varphi}{\sim}D$. 证毕.

§2.1 n 维欧几里得空间及其中的点集

所谓n维欧几里得空间, 是指由n个实数所作成的有序数组$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的全体所成之集合 R^n,即

$$\mathrm{R}^n=\{x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid x_i\in(-\infty,+\infty), i=1,2,\cdots,n\}.$$

R^n 中任两点 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$, $y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 之间的距离定义为:

$$\rho(x,y)=\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

容易证明，对任意的 $x,y,z\in\mathbb{R}^n$，函数 $\rho(\cdot,\cdot)$ 满足：

1) $\rho(x,y)\geqslant0,\rho(x,y)=0\Leftrightarrow x=y$ （非负性）；

2) $\rho(x,y)=\rho(y,x)$ （对称性）；

3) $\rho(x,y)\leqslant\rho(x,z)+\rho(z,y)$ （三角不等式）.

一般地，如果对一个非空集能引进满足条件 1)—3)的函数 ρ，则称此集合为以 ρ 为距离的度量空间（或称距离空间）. $\mathbb{R}^n$ 是度量空间的一个简单的例子.

我们先引进点集的一些基本概念，并对其性质进行一些讨论.

定义 2.1.1 设 $x_0\in\mathbb{R}^n$，$\delta>0$. 集合 $\{x|x\in\mathbb{R}^n$，且 $\rho(x,x_0)<\delta\}$ 叫做点 x_0 的 δ-邻域，记为 $O(x_0,\delta)$.

定义 2.1.2 设 $x_k(k=1,2,\cdots),x\in\mathbb{R}^n$. 若 $\forall\varepsilon>0$，$\exists$ 自然数 k_0，当 $k\geqslant k_0$ 时，$x_k\in O(x,\varepsilon)$，就称点列 $\{x_k\}$ 收敛于 x，称 x 为点列 $\{x_k\}$ 的极限，记作 $\lim\limits_{k\to\infty}x_k=x$ 或 $x_k\to x(k\to\infty)$.

显然，$\lim\limits_{k\to\infty}x_k=x\Leftrightarrow\lim\limits_{k\to\infty}\rho(x_k,x)=0$.

定义 2.1.3 设点集 $M\subset\mathbb{R}^n$，$d(M)=\sup\limits_{x,y\in M}\rho(x,y)$ 称为 M 的直径，当 $d(M)<+\infty$ 时，称 M 为有界集.

显然，$\mathbb{R}^n$ 中点集 M 有界 $\Leftrightarrow\exists O(x_0,\delta)\subset\mathbb{R}^n$，使 $M\subset O(x_0,\delta)$，其中 x_0 是 $\mathbb{R}^n$ 中的某一点，$\delta>0$ 是某一个常数.

定义 2.1.4 设点集 $E\subset\mathbb{R}^n$，$P_0\in\mathbb{R}^n$. 若 $\exists\delta>0$，使 $O(P_0,\delta)\subset E$，就称 P_0 为点集 E 的一个内点.

E 的全部内点所成之集称为 E 的内域，记为 E^0.

若 $E=E^0$，就称 E 为开集. 规定空集是开集.

开集的基本性质是：

定理 2.1.1

1) 空集和全空间 $\mathbb{R}^n$ 是开集；

2) 任意多个开集之并为开集;

3) 有限个开集之交是开集.

证明 1) 是显然的. 现在证明 2), 设 $\{G_\alpha \mid \alpha\in\Gamma\}$ 是任意一族开集, 要证 $G=\bigcup\limits_{\alpha\in\Gamma} G_\alpha$ 是开集. 设 $x\in G$, 则 $\exists\alpha\in\Gamma$, 使 $x\in G_\alpha$. 因 G_α 是开集, 所以 $\exists\delta>0$, 使 $O(x,\delta)\subset G_\alpha\subset G$, 故 $x\in G^0$, 即 $G\subset G^0$. 但是自然有 $G^0\subset G$, 所以 $G=G^0$. 这说明 G 是开集.

再证明 3), 设 $G_1,G_2,\cdots,G_k$ 为开集, 要证 $G=\bigcap\limits_{i=1}^{k} G_i$ 是开集. 不失一般性, 只要就 G 非空的情形证明即可. 任取 $x\in G$, 则 $x\in G_i$ $(i=1,2,\cdots,k)$, 从而有正数 δ_i, 使 $O(x,\delta_i)\subset G_i$, $i=1,2,\cdots,k$. 取 $\delta=\min\limits_{1\leqslant i\leqslant k}\delta_i$, 则 $\delta>0$, 且 $O(x,\delta)\subset\bigcap\limits_{i=1}^{k} G_i=G$. 故 $x\in G^0$, 即 $G\subset G^0$. 但是自然有 $G^0\subset G$, 所以 $G=G^0$. 这说明 $G=\bigcap\limits_{i=1}^{k} G_i$ 是开集. 证毕.

注意, 无限个开集的交不一定是开集. 例如 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}\left(-\dfrac{1}{i},\dfrac{1}{i}\right)=\{0\}$. 其中每一项 $\left(-\dfrac{1}{i},\dfrac{1}{i}\right)$ 都是 $\mathbb{R}^1$ 中的开集, 但它们的交却不是 $\mathbb{R}^1$ 中的开集.

定义 2.1.5 设 $a=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$, $b=(b_1,b_2,\cdots,b_n)\in\mathbb{R}^n$. 且 $a_i\leqslant b_i(i=1,2,\cdots,n)$.

点集 $\{x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid a_i<x_i<b_i,\ i=1,2,\cdots,n\}$ (2.1.1)

称为 $\mathbb{R}^n$ 中的开区间, 记为 (a,b) 或 $(a_1,b_1;a_2,b_2;\cdots;a_n,b_n)$.

点集 $\{x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid a_i\leqslant x_i\leqslant b_i,\ i=1,2,\cdots,n\}$

称为 $\mathbb{R}^n$ 中的闭区间, 记为 $[a,b]$ 或 $[a_1,b_1;a_2,b_2;\cdots;a_n,b_n]$.

点集 $\{x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid a_i<x_i\leqslant b_i,\ i=1,2,\cdots,n\}$

称为 $\mathbb{R}^n$ 中的左开右闭区间, 记为 $(a,b]$ 或 $(a_1,b_1;a_2,b_2;\cdots;a_n,b_n]$.

点集 $\{x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid a_i\leqslant x_i<b_i,\ i=1,2,\cdots,n\}$

称为$\mathbb{R}^n$中的左闭右开区间，记为$[a,b)$或$[a_1,b_1;a_2,b_2;\cdots;a_n,b_n)$.

$\mathbb{R}^n$中的左开右闭区间或左闭右开区间统称为$\mathbb{R}^n$中的半开半闭区间.

点集(2.1.1)以及把(2.1.1)中的任意个“<”号换成“≤”号所得到的点集统称为区间，当无必要区别是何种区间时，就统记作$\langle a,b\rangle$或$\langle a_1,b_1;a_2,b_2;\cdots;a_n,b_n\rangle$.

对于区间$I=\langle a_1,b_1;a_2,b_2;\cdots;a_n,b_n\rangle$，我们把$b_i-a_i(i=1,2,\cdots,n)$称为区间$I$的第$i$个边长；把$\left[\sum_{i=1}^{n}(b_i-a_i)^2\right]^{\frac{1}{2}}$称为区间$I$的对角线长；把边长积$\prod_{i=1}^{n}(b_i-a_i)$称为区间$I$的体积，记作$|I|$. 特别地，当$n=1$时，$|I|$就是区间的长度，当$n=2$时，$|I|$就是区间的面积. 规定空集的体积为零.

注1 定义2.1.5中允许$a_i=b_i$. 因此，独点集是一个闭区间，空集$\varnothing$是除闭区间外的任何一种区间. 另外，按照上述定义，所有区间都是有界集.

注2 初等数学和数学分析中所说的无限区间，例如$(-\infty,+\infty)$、$(a,+\infty)$、$[a,+\infty)$、$(-\infty,b)$、$(-\infty,b]$ (a,b为任意实数)，按照定义2.1.5的规定，都不是区间，今后凡说区间，若无特别声明，均指在定义2.1.5的意义下. 但在专门讨论$\mathbb{R}^1$中的点集时，为了叙述方便起见，往往将上述几种类型的集合仍看作（或称作）是$\mathbb{R}^1$中的(无限)区间.

定理2.1.2 $\mathbb{R}^n$中的任意一个非空开集G均可表示为可数个互不相交的左开右闭区间之并.

证明 首先，$\forall l>0$，令

$$I_{k_1k_2\cdots k_n}=\{x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid k_il<x_i\leqslant(k_i+1)l,\quad i=1,2,\cdots,n\},$$

其中 $k_i\in\mathbf{Z}$(整数集), $i=1,2,\cdots,n$. 由于这些区间所成之集

$$\{I_{k_1k_2\cdots k_n}\mid k_i\in\mathbf{Z},i=1,2,\cdots,n\}$$

可数，因而可将这可数个左开右闭区间重新编号记作 $I_1,I_2,\cdots,I_i,\cdots$. 显然 $\mathbb{R}^n=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}I_i$, 且 $I_i\cap I_j=\varnothing(i\neq j)$. 于是 $\mathbb{R}^n$ 被分成了可数个互不相交的各个边长均为 l 的左开右闭区间 $I_1,I_2,\cdots$ 之并，并且其中有一个区间为$(0,l;0,l;\cdots;0,l]$. (我们把这样的一列左开右闭区间 $\{I_i\}(i=1,2,\cdots)$称为 $\mathbb{R}^n$ 的起点为原点(即 $0=(0,0,\cdots,0)\in\mathbb{R}^n$)边长为 l 的左开右闭区间分解).

其次, $\forall$ 自然数 k, 设 $\mathbb{R}^n$ 的起点为原点、边长为$\frac{1}{2^k}$的左开右闭区间分解为$\{I_i^k\}$.

在$\{I_i^1\}$ 中取所有包含于 G 的左开右闭区间记作 $\{J_j^1\}$, 再在$\{I_i^2\}$ 中取所有包含于 $G-\left(\bigcup\limits_j J_j^1\right)$的左开右闭区间记作$\{J_j^2\}$, 然后在$\{I_i^3\}$ 中取所有包含于$G-\left(\bigcup\limits_j J_j^1\right)-\left(\bigcup\limits_j J_j^2\right)$的左开右闭区间记作$\{J_j^3\}$, 如此继续下去.

显然, $\{J_j^1\},\{J_j^2\},\cdots,\{J_j^k\},\cdots$中大大小小的所有左开右闭区间为可数个，并且这些左开右闭区间互不相交，把所有这些左开右闭区间重新编号记作 $J_1,J_2,\cdots,J_m,\cdots$. 下证 $G=\bigcup\limits_{m=1}^{\infty}J_m$.

由上面的选取过程立即知$\bigcup\limits_{m=1}^{\infty}J_m\subset G$, 再证$G\subset\bigcup\limits_{m=1}^{\infty}J_m$: $\forall x_0\in G$, 由 G 是开集知, $\exists\delta>0$, 使 $O(x_0,\delta)\subset G$. 另一方面，对每个自然数 k, $\mathbb{R}^n$ 的左开右闭区间分解$\{I_i^k\}$ 中显然有唯一的一个左开右闭区间 $I_{i_k}^k$ 包含 x_0, 并且 $I_{i_1}^1\supset I_{i_2}^2\supset I_{i_3}^3\supset\cdots$, 当 $k\to\infty$时, $I_{i_k}^k$ 的对角线长趋于 0. 所以, $\exists$ 自然数 k_0, 使 $I_{i_{k_0}}^{k_0}\subset O(x_0,\delta)\subset G$. 不妨设 k_0 是满足 $I_{i_k}^k\subset G$ 的最小的 k, 则 $I_{i_{k_0}}^{k_0}$ 是 $\{J_j^{k_0}\}$ 中的左开右闭区间,

故 $x_0\in I_{i_{k_0}}^{k_0}\subset\bigcup\limits_{m=1}^{\infty}J_m$. 从而 $G\subset\bigcup\limits_{m=1}^{\infty}J_m$. 总之，$G=\bigcup\limits_{m=1}^{\infty}J_m$. 证毕.

注 $\mathbb{R}^n$ 中非空开集 G 的左开右闭区间分解显然不是唯一的.

定义 2.1.6 设点集 $E\subset\mathbb{R}^n$, $P_0\in\mathbb{R}^n$, 若任给 $\delta>0$, 都有 $O(P_0,\delta)\cap E\neq\varnothing$, 且 $O(P_0,\delta)\cap E^c\neq\varnothing$, 就称 P_0 是 E 的一个边界点.

E 的边界点的全体叫做 E 的边界. 记为 E^b.

显然, $E^b=(E^c)^b$.

定义 2.1.7 设点集 $E\subset\mathbb{R}^n$, $P_0\in\mathbb{R}^n$, 若 $\forall\delta>0$, 都有

$$(O(P_0,\delta)-\{P_0\})\cap E\neq\varnothing,$$

则称 P_0 为 E 的极限点.

E 的全部极限点所成的集合称为 E 的导集, 记为 E'.

显然, $P_0\in E'\Leftrightarrow\forall\delta>0$, $O(P_0,\delta)\cap E$ 是无限集.

定义 2.1.8 设点集 $E\subset\mathbb{R}^n$, $P_0\in E$, 若 $\exists\delta>0$, 使

$$(O(P_0,\delta)-\{P_0\})\cap E=\varnothing,$$

则称 P_0 是 E 的孤立点.

若集 E 的每一点都是孤立点, 则 E 就称为孤立点集.

显然, $\qquad E$ 为孤立点集 $\Leftrightarrow E\cap E'=\varnothing$.

定义 2.1.9 设点集 $E\subset\mathbb{R}^n$, $P_0\in\mathbb{R}^n$, 若 $\forall\delta>0$, $O(P_0,\delta)\cap E\neq\varnothing$. 就称 P_0 为 E 的接触点.

E 的一切接触点所成之集叫做 E 的闭包, 记为 $\bar{E}$.

显然, $\bar{E}=E\cup E'=E^0\cup E^b=E\cup E^b=[(E^c)^0]^c$.

定理2.1.3 **$P_0\in E'\Longleftrightarrow E$ 中有各项互异的点列 $\{P_k\}$ $(P_k\neq P_0$, $k=1,2,\cdots)$ 收敛于 P_0.**

证明 "$\Leftarrow$": $\forall\varepsilon>0$, $\exists$ 自然数 k_0, 当 $k\geq k_0$ 时, 有 $P_k\in O(P_0,\varepsilon)$, 即 $O(P_0,\varepsilon)\cap E$ 为无限集, 故 $P_0\in E'$.

“$\Rightarrow$”：令 $\delta_k=\frac{1}{k}>0$，由于 $O(P_0,\delta_1)\cap E$ 是无限集，任取一点 $P_1\in O(P_0,\delta_1)\cap E-\{P_0\}$，又由于 $O(P_0,\delta_2)\cap E$ 是无限集，任取一点 $P_2\in O(P_0,\delta_2)\cap E-\{P_0,P_1\}$，则 $P_1\neq P_2$，且 $P_i\neq P_0(i=1,2)$. 一般说来，设符合上述要求的 $P_1,P_2,\cdots,P_k$ 已经取出，

$$P_i\in O(P_0,\delta_i)\cap E-\{P_0,P_1,\cdots,P_{i-1}\}\quad(i=1,2,\cdots,k).$$

由于 $O(P_0,\delta_{k+1})\cap E$ 是无限集，从而可取

$$P_{k+1}\in O(P_0,\delta_{k+1})\cap E-\{P_0,P_1,P_2,\cdots,P_k\}.$$

由数学归纳法，我们就从 E 中得到了一个各项互不相同的点列 $\{P_k\}$，

$$P_i\in O(P_0,\delta_i)\cap E-\{P_0,P_1,\cdots,P_{i-1}\}\,(i=1,2,\cdots).$$

$\forall\varepsilon>0$，$\exists$ 自然数 k_0，使 $\frac{1}{k_0}<\varepsilon$，从而，当 $k\geqslant k_0$ 时，有

$$P_k\in O\left(P_0,\frac{1}{k}\right)\subset O\left(P_0,\frac{1}{k_0}\right)\subset O(P_0,\varepsilon).$$

故 $\lim\limits_{k\to\infty}P_k=P_0$. 证毕.

定理 2.1.4 设 $A\subset B$，则 $A'\subset B'$，$A^0\subset B^0$，$\bar{A}\subset\bar{B}$.

证明 可由定义直接推得.

定理 2.1.5 $(A\cup B)'=A'\cup B'$，$\overline{A\cup B}=\bar{A}\cup\bar{B}$.

证明 1° 因 $A\subset A\cup B$，$B\subset A\cup B$，由定理 2.1.4 知，$A'\subset(A\cup B)'$，$B'\subset(A\cup B)'$，从而 $A'\cup B'\subset(A\cup B)'$. 另一方面，任取 $P\in(A\cup B)'$，假设 $P\bar{\in}A'\cup B'$，则 $P\bar{\in}A'$，且 $P\bar{\in}B'$，于是，$\exists\varepsilon_1>0$，使 $(O(P,\varepsilon_1)-\{P\})\cap A=\varnothing$；$\exists\varepsilon_2>0$，使 $(O(P,\varepsilon_2)-\{P\})\cap B=\varnothing$. 取 $\varepsilon=\min\{\varepsilon_1,\varepsilon_2\}$，则

$$\begin{aligned}&[(O(P,\varepsilon)-\{P\})\cap A]\cup[(O(P,\varepsilon)-\{P\})\cap B]\\=&(O(P,\varepsilon)-\{P\})\cap(A\cup B)=\varnothing.\end{aligned}$$

这说明 $P\bar{\in}(A\cup B)'$，与 $P\in(A\cup B)'$ 矛盾，所以 $P\in A'\cup B'$. 即 $(A\cup B)'\subset A'\cup B'$. 综合以上两个方面，即得 $(A\cup B)'=A'\cup B'$.

2° $\overline{A\cup B}=(A\cup B)\cup(A\cup B)'=(A\cup B)\cup(A'\cup B')$

$=(A\cup A')\cup(B\cup B')=\bar{A}\cup\bar{B}$. 证毕.

定理2.1.6 (Bolzano-Weierstrass定理) $\mathbf{R}^n$ 中的有界点列必有收敛子列.

证明 设$\{x^{(k)}\}=\{(x_1^{(k)},x_2^{(k)},\cdots,x_n^{(k)})\}$是 $\mathbf{R}^n$ 中的任一有界点列,则每个$\{x_i^{(k)}\}$ $(i=1,2,\cdots,n)$都是有界数列,据 $\mathbf{R}^1$ 上的Bolzano-Weierstrass 定理,$\{x_1^{(k)}\}$有收敛子列$\{x_1^{(k_1)}\}$,其中$\{k_1\}$是自然数列$\{k\}$的子数列. 作$\{x^{(k)}\}$的子列

$$\{x^{(k_1)}\}=\{(x_1^{(k_1)},x_2^{(k_1)},\cdots,x_n^{(k_1)})\},$$

其中$\{x_1^{(k_1)}\}$是收敛数列. 同理,由于$\{x_2^{(k_1)}\}$是有界数列,所以,$\{x^{(k_1)}\}$有子列

$$\{x^{(k_2)}\}=\{(x_1^{(k_2)},x_2^{(k_2)},\cdots,x_n^{(k_2)})\},$$

其中$\{x_2^{(k_2)}\}$是收敛数列. 此时,由于$\{x_1^{(k_2)}\}$是$\{x_1^{(k_1)}\}$的子列. 从而$\{x_1^{(k_2)}\}$也是收敛数列. 如此一直进行至第 n 步,就得到$\{x^{(k)}\}$的子列

$$\{x^{(k_n)}\}=\{(x_1^{(k_n)},x_2^{(k_n)},\cdots,x_n^{(k_n)})\},$$

其中$\{x_i^{(k_n)}\}$ $(i=1,\ 2,\ \cdots,n)$都是收敛数列. 设$\{x_i^{(k_n)}\}$收敛于 $x_i^{(0)}$ $(i=1,2,\cdots,n)$,记 $x^{(0)}=(x_1^{(0)},x_2^{(0)},\cdots,x_n^{(0)})$,由不等式

$$\rho(x^{(k_n)},\ x^{(0)})=\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i^{(k_n)}-x_i^{(0)}|^2\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant\sqrt{n}\max_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i^{(k_n)}-x_i^{(0)}|$$

知$\{x^{(k_n)}\}$收敛于 $x^{(0)}$. 证毕.

注 设$\{x^{(k)}\}=\{(x_1^{(k)},x_2^{(k)},\cdots,x_n^{(k)})\}$是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个点列,$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$是 $\mathbf{R}^n$ 中的一点,由不等式

$$\max_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i^{(k)}-x_i|\leqslant\rho(x^{(k)},\ x)=\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i^{(k)}-x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant\sqrt{n}\max_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i^{(k)}-x_i|\quad(\forall k\in\mathbf{N})$$

可以看出，

$$\lim_{k\to\infty} x^{(k)}=x \Leftrightarrow \lim_{k\to\infty} x_i^{(k)}=x_i \quad (i=1,2,\cdots,n).$$

即 $\mathbf{R}^n$ 中点列的收敛等价于按(每个)坐标收敛.

由定理 2.1.6 立即得到

推论 2.1.7 $\mathbf{R}^n$ 中的有界无限点集至少有一个极限点.

证明 设 E 是 $\mathbf{R}^n$ 中的任一有界无限点集，则可从 E 中取出一个各项互异的有界点列 $\{x_k\}$，于是 $\{x_k\}$ 有收敛子列 $\{x_{k_i}\}$，设其收敛于 x_0，由于 $\{x_{k_i}\}$ 也是 E 中各项互异的点列，因此，x_0 是 E 的极限点. 证毕.

定义 2.1.10 设点集 $E\subset\mathbf{R}^n$. 若 $E\supset E'$，则称 E 为闭集；若 $E\subset E'$，则称 E 为自密集；若 $E=E'$，则称 E 为完全集.

从定义可知，空集既是闭集，也是完全集.

定理 2.1.8 点集 E'，$\bar{E}$ 是闭集.

证明 1° 设 $P\in(E')'$，则 $\forall\varepsilon>0$，$O\left(P,\dfrac{\varepsilon}{2}\right)\cap E'$ 是无限集，任取 $P_1\in O\left(P,\dfrac{\varepsilon}{2}\right)\cap E'-\{P\}$，则 $P_1\neq P$，且 $P_1\in E'$，于是 $O\left(P_1,\dfrac{\varepsilon}{2}\right)\cap E$ 是无限集. 但 $O\left(P_1,\dfrac{\varepsilon}{2}\right)\subset O(P,\varepsilon)$，所以 $O(P,\varepsilon)\cap E$ 是无限集，从而，$P\in E'$. 这说明 $(E')'\subset E'$. 故 E' 是闭集.

2° 因为 $(\bar{E})'=(E\cup E')'=E'\cup(E')'=E'\subset\bar{E}$，故 $\bar{E}$ 是闭集. 证毕.

推论 2.1.9 点集 E 是闭集 $\Leftrightarrow \bar{E}=E$.

证明 “$\Rightarrow$”：E 是闭集，即 $E\supset E'$，于是 $\bar{E}=E\cup E'=E$.

“$\Leftarrow$”：因 $E=\bar{E}=E\cup E'$，所以 $E\supset E'$. 故 E 是闭集. 证毕.

定理 2.1.10 点集 F 是闭集 $\Leftrightarrow F^c$ 是开集.

证明 “$\Rightarrow$”：因为 $(F^c)^0=(\bar{F})^c=F^c$，故 F^c 是开集.

“$\Leftarrow$”：因为 $\bar{F}=[(F^c)^0]^c=(F^c)^c=F$. 故 F 是闭集. 证毕.

其实,定理 2.1.10 也就是说,闭集的余集是开集.开集的余集是闭集.

闭集的基本性质如下:

定理 2.1.11

1) **空集和全空间 $\mathbb{R}^n$ 是闭集;**

2) **任意多个闭集之交是闭集;**

3) **有限个闭集之并是闭集.**

证明 1) 显然.

2) 设 $\{F_\alpha | \alpha \in \Gamma\}$ 是任意一族闭集,要证 $F = \bigcap_{\alpha \in \Gamma} F_\alpha$ 是闭集.因为,$F^c = \bigcup_{\alpha \in \Gamma} F_\alpha^c$ 是开集,故 $F = \bigcap_{\alpha \in \Gamma} F_\alpha$ 是闭集.

3) 设 $F_1, F_2, \cdots, F_k$ 是闭集.要证 $F = \bigcup_{i=1}^{k} F_i$ 是闭集.因为 $F^c = \bigcap_{i=1}^{k} F_i^c$ 是开集,故 $F = \bigcup_{i=1}^{k} F_i$ 是闭集.证毕.

注意 无限个闭集之并不一定是闭集.例如 $\bigcup_{i=3}^{\infty} \left[\frac{1}{i}, 1-\frac{1}{i}\right] = (0, 1)$.其中每一项 $\left[\frac{1}{i}, 1-\frac{1}{i}\right]$ 都是 $\mathbb{R}^1$ 中的闭集,而它们的并 $(0,1)$ 却是 $\mathbb{R}^1$ 中的开集,不是闭集.

定义 2.1.11 设 E 是一集合,$\mathscr{U} = \{M_\alpha | \alpha \in \Gamma\}$ 是一族集合,若 $\bigcup_{\alpha \in \Gamma} M_\alpha \supset E$,则称 $\mathscr{U}$ 是 E 的一个覆盖,其中当 Γ 是有限集或可数集时,分别称 $\mathscr{U}$ 是 E 的有限覆盖或可数覆盖.如果 $\mathscr{U}$ 是 E 的覆盖,并且 $\mathscr{U}$ 的子族 $\mathscr{U}_1$ 也是 E 的覆盖,则称 $\mathscr{U}_1$ 是覆盖 $\mathscr{U}$(关于 E)的子覆盖.

如果 $\mathbb{R}^n$ 中的开(闭)集族 $\mathscr{U}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的子集 E 的覆盖,则称 $\mathscr{U}$ 是 E 的开(闭)覆盖.

定理 2.1.12(Borel 有限覆盖定理) **$\mathbb{R}^n$ 中有界闭集的每一**

开覆盖都有有限子覆盖.

证明　设F是$\mathbb{R}^n$中的一有界闭集，$\mathscr{U}=\{G_\alpha|\alpha\in\Gamma\}$是$F$的任一开覆盖. $\forall\sigma>0$，作$\mathbb{R}^n$的起点为原点、边长为$\frac{\sigma}{2\sqrt{n}}$的左开右闭区间分解$\{I_i\}$，令$F_i=F\cap I_i, i=1,2,\cdots$. 由$F$有界知最多只有有限个$F_i$不空，设这些不空的$F_i$为$F_1,F_2,\cdots,F_s$，则$F$被分成了有限个两两不交而直径小于$\sigma$的集合$F_1$，$F_2$，$\cdots$，$F_s$之并：$F=\bigcup_{i=1}^{s}F_i$. 我们称此分解是$F$的一个直径小于$\sigma$的有限分解.

反证法. 假设$\mathscr{U}$中任意有限个开集都不能覆盖F，$\forall$自然数k，作F的直径小于$\frac{1}{k}$的有限分解：$F=\bigcup_{i=1}^{t}F_i$，则至少有一个F_i不能被$\mathscr{U}$中任意有限个开集所覆盖，记此F_i为F_k. 任取$x_k\in F_k$ $(k=1,2,\cdots)$，作点列$\{x_k\}$，由F有界知$\{x_k\}$是有界点列，从而$\{x_k\}$有收敛子列$\{x_{k_i}\}$，设其收敛于x_0. 由F是闭集知$x_0\in F$，于是有$\alpha_0\in\Gamma$，使$x_0\in G_{\alpha_0}$. 因G_{α_0}是开集，所以$\exists\varepsilon>0$，使$O(x_0,\varepsilon)\subset G_{\alpha_0}$. 由于$\lim\limits_{i\to\infty}x_{k_i}=x_0$，所以$\exists i_0$，使$x_{k_{i_0}}\in O\left(x_0,\frac{\varepsilon}{2}\right)$，且$\frac{1}{k_{i_0}}<\frac{\varepsilon}{2}$. 又因为$\forall x\in O\left(x_{k_{i_0}},\frac{1}{k_{i_0}}\right)$，有

$$\rho(x,x_0)\leqslant\rho(x,x_{k_{i_0}})+\rho(x_{k_{i_0}},x_0)<\frac{1}{k_{i_0}}+\frac{\varepsilon}{2}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

所以，$F_{k_{i_0}}\subset O\left(x_{k_{i_0}},\frac{1}{k_{i_0}}\right)\subset O(x_0,\varepsilon)\subset G_{\alpha_0}\in\mathscr{U}$. 这与$F_{k_{i_0}}$的定义矛盾，于是定理得证. 证毕.

定义 2.1.12　设A,E是$\mathbb{R}^n$中的两个点集，若E中每个点的任一邻域中都含有集A的点，就称A在E中稠密. 当$E=\mathbb{R}^n$时，即A在$\mathbb{R}^n$中处处稠密时，就称A是$\mathbb{R}^n$中的稠密集.

定理2.1.13　1)　**点集A在E中稠密$\Leftrightarrow\bar{A}\supset E$;**

2)　**点集A在E中稠密$\Leftrightarrow\forall x\in E$，有$A$中的点列$\{x_k\}$，$x_k\to x$**

$(k\to\infty)$.

证明留为习题.

定义 2.1.13 设点集 $A\subset\mathbf{R}^n$，若 A 不在 $\mathbf{R}^n$ 的任何一个非空的开集中稠密，就称 A 为疏朗集，或称为无处稠密集.

这个定义中的非空开集可以换成邻域.

下面举一个 $\mathbf{R}^1$ 中的重要的疏朗完全集的例子.

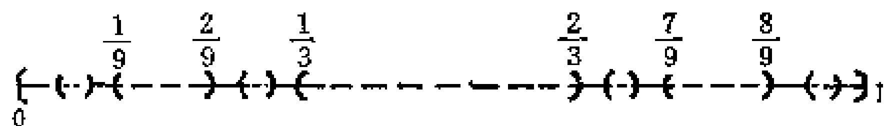


图 2.1.1 Cantor 疏朗完全集构造示意图

Cantor 三分集 将闭区间 $[0,1]$ 用分点 $\frac{1}{3}$，$\frac{2}{3}$ 三等分，删去中间的开区间 $I_1^{(1)}=\left(\frac{1}{3},\ \frac{2}{3}\right)$，剩下两个闭区间 $\left[0,\frac{1}{3}\right]$，$\left[\frac{2}{3},1\right]$，其长度均为 $\frac{1}{3}$；把剩下的两个闭区间分别再三等分，再各删去中间的开区间：$I_1^{(2)}=\left(\frac{1}{9},\frac{2}{9}\right)$，$I_2^{(2)}=\left(\frac{7}{9},\ \frac{8}{9}\right)$，剩下四个闭区间：$\left[0,\frac{1}{9}\right]$，$\left[\frac{2}{9},\frac{3}{9}\right]$，$\left[\frac{6}{9},\frac{7}{9}\right]$，$\left[\frac{8}{9},1\right]$，其长度均为 $\frac{1}{3^2}$，如此继续作下去，在第 n 次三等分时删去的 2^{n-1} 个开区间（称为第 n 级区间）是：$I_1^{(n)}=\left(\frac{1}{3^n},\frac{2}{3^n}\right)$，$I_2^{(n)}=\left(\frac{7}{3^n},\frac{8}{3^n}\right)$，$\cdots$，$I_{2^{n-1}}^{(n)}=\left(\frac{3^n-2}{3^n},\frac{3^n-1}{3^n}\right)$ $(n=1,\ 2,\cdots)$，剩下的 2^n 个闭区间的长度均为 $\frac{1}{3^n}$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$. 这样便得到所谓Cantor三分集 P_0 与 Cantor开集 G_0（所有被删去的开区间之并）：

$$G_0=I_1^{(1)}\cup I_1^{(2)}\cup I_2^{(2)}\cup\cdots\cup I_1^{(n)}\cup I_2^{(n)}\cup\cdots\cup I_{2^{n-1}}^{(n)}\cup\cdots,$$

$P_0=[0,1]-G_0=[0,1]\cap G_0^c$ 是闭集.

Cantor 三分集 P_0 有如下性质：

1° P_0 是完全集. 只需再证 P_0 是自密集，即 $P_0\subset P_0'$. 由 P_0 的定义知，在第 n 次删去 2^{n-1} 个开区间后，剩下的 2^n 个闭区间

的长度均为$\frac{1}{3^n}(n=1,2,\cdots)$，记这 2^n 个闭区间分别为$I_n^i(i=1,2,\cdots,2^n)$，于是 $\forall x\in P_0$,及 $\forall \varepsilon>0$,总有自然数 n_0 存在，使$\frac{1}{3^{n_0}}<\varepsilon$,且 $x\in$某个$I_{n_0}^i(1\leqslant i\leqslant 2^{n_0})$. 从而,$I_{n_0}^i\subset O(x,\varepsilon)$,因闭区间 $I_{n_0}^i$的两个端点都是属于 P_0 的点，因此$(O(x,\varepsilon)-\{x\})\cap P_0\neq\varnothing$. 即 $x\in P_0'$. 这说明 P_0 是自密集,又因为 P_0 是闭集,故 P_0 是完全集.

2° P_0 是疏朗集. 因 $P_0=\bar{P}_0$ 不能包含 $\mathbb{R}^1$ 中的任何一个邻域,所以,P_0 不在 $\mathbb{R}^1$ 的任何一个邻域中稠密,故 P_0 是疏朗集.

由 1°、2° 知,Cantor 三分集 P_0 是 $\mathbb{R}^1$ 中的疏朗完全集.

3° $\overline{\overline{P}}_0=\aleph$. 事实上，若对于(0, 1)上的点使用三进位表数法,则第一次三等分区间[0,1]后删去的点是第一位小数出现 1 的点，第二次三等分所剩闭区间后删去的点是第二位小数出现 1 的点,依次类推,在[0,1]中取出 G_0(G_0 是所有被删去的开区间之并)后,所余下的点除三等分区间的“分点”外,用三进位小数 $0.a_1a_2\cdots a_n\cdots\cdots$表示时,$a_n\neq1(n=1,2,\cdots)$，而对于“分点”总可选定适当的表示法,使其各位小数 $a_n\neq1(n=1,2,\cdots)$,于是

$$P_0=\{(0.a_1a_2a_3\cdots a_k\cdots)\mid a_k\in\{0,2\},k=1,2,\cdots\}.$$

令 $f:P_0\ni 0.a_1a_2\cdots a_k\cdots\mapsto\left(\frac{a_1}{2},\frac{a_2}{2},\cdots,\frac{a_k}{2},\cdots\right)\in D$($D$指集 (2.0.5))，则$P_0\overset{f}{\sim}D$. 故 $\overline{\overline{P}}_0=\aleph$. 证毕.

习 题 2.1

1. 试举出满足以下要求的点集的例子;
   (1) 完全没有边界点的平面点集;
   (2) 有边界点但所有边界点不属于此集的平面点集;
   (3) 包含其部分边界点的平面点集;
   (4) 仅由边界点组成的不可数的平面点集.
2. 设点集 $E\subset\mathbb{R}^2$,E 是由函数

$$y=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$$

的图形上的点所作成的集合，求 $E^0, E', \bar{E}, E^b$.

3. 证明：$\bar{E}$ 恰是包含 E 的所有闭集的交。

4. 设点集 $A\subset \mathbf{R}^n, x\in\mathbf{R}^n$，则下列三件事彼此等价：

   (1) $x\in\bar{A}$;

   (2) x 的每个邻域中有 A 的点；

   (3) 在 A 中存在点列 $\{x_k\}$ 收敛于 x.

5. 证明定理 2.1.13.

6. 证明：(1) $P_0\in E'\Leftrightarrow$ 任意含有 P_0 的邻域 $O(P,\delta)$（不一定以 P_0 为中心）中都有无穷多个属于 E 的点.

   (2) $P_0\in E^0\Leftrightarrow\exists$ 含有 P_0 的邻域 $O(P,\delta)$（不一定以 P_0 为中心），使 $O(P,\delta)\subset E$.

7. 设 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的实值连续函数，则对于任意实数 a，集 $\{x|x\in(-\infty,+\infty), f(x)>a\}$ 总是一开集，而集 $\{x|x\in(-\infty,+\infty), f(x)\geqslant a\}$ 总是一闭集.

8. 设 E 是 $\mathbf{R}^n$ 中任一点集，$\mathscr{M}$ 是一族开邻域，它完全覆盖 E，则在 $\mathscr{M}$ 中存在至多可数个开邻域 $O_1, O_2, O_3, \cdots$，它们已经完全覆盖了 E.

9. 试用 Borel 有限覆盖定理证明 Bolzano-Weierstrass 定理.

10. Borel 有限覆盖定理中集 F 是"有界"、"闭集"之条件能否再减弱？如能，请证明；如不能，请举出反例.

11. 设 E 是 $\mathbf{R}^n$ 中的点集，则下列三件事彼此等价：

    (1) E 是疏朗集，(2) $(\bar{E})^\circ=\varnothing$，(3) $\overline{(E^c)^\circ}=\mathbf{R}^n$.

12. 证明：(1) 若 E 是 $\mathbf{R}^n$ 中疏朗集，则 E^c 在 $\mathbf{R}^n$ 中处处稠密.

    (2) Cantor 开集 G_0 在 $[0,1]$ 中稠密.

§2.2 直线上的开集、闭集及完全集的构造

本节所讨论的点集都是一维欧几里得空间 $\mathbf{R}^1$ 的子集，以下不再声明.

定义 2.2.1 设 G 是开集，若开区间 $(\alpha,\beta)\subset G$，且 $\alpha,\beta\bar{\in} G$，就

称(α, β)是G的一个构成区间，α,β称为这个构成区间的端点.

特别地，当G是全直线或无界时，$(-\infty, +\infty)$或$(-\infty, \alpha)$与$(\beta, +\infty)$(α,β为实数)都看作构成区间，$-\infty$，$+\infty$看作构成区间的端点.

定理 2.2.1　任何非空开集G均可表成至多可数个互不相交的构成区间之并. 又当非空开集G表成互不相交的开区间之并时，这些开区间必是构成区间.

证明　设A是由G的所有构成区间组成的集合，即

$$A=\{(\alpha,\beta)\mid(\alpha,\beta)\subset G, 且\ \alpha,\beta\overline{\in}G\}.$$

分以下三步来证明：

1) 先证$G=\bigcup\limits_{(\alpha,\beta)\in A}(\alpha,\beta)$. 任取$x_0\in G$，令

$$B_{x_0}=\{(\alpha,\beta)\mid(\alpha,\beta)\subset G, 且\ x_0\in(\alpha,\beta)\},$$

因G是非空开集，所以B_{x_0}不空. 令$\alpha_0=\inf\limits_{(\alpha,\beta)\in B_{x_0}}\alpha$，$\beta_0=\sup\limits_{(\alpha,\beta)\in B_{x_0}}\beta$(这里，$\alpha_0$可以为$-\infty$，$\beta_0$可以为$+\infty$)，作开区间$(\alpha_0,\beta_0)$，显然，$x_0\in(\alpha_0, \beta_0)$. 下面证明$(\alpha_0, \beta_0)\in A$. $\forall x\in(\alpha_0,\beta_0)$，若$x\in(\alpha_0, x_0]$，由下确界的定义知，存在$(\alpha,\beta)\in B_{x_0}$，使$\alpha_0\leqslant\alpha<x$，所以，$x\in(\alpha, x_0]\subset(\alpha,\beta)\subset G$；若$x\in(x_0,\beta_0)$，可仿上同样证明$x\in G$，因此$(\alpha_0,\beta_0)\subset G$，从而$(\alpha_0, \beta_0)\in B_{x_0}$. 再证$\alpha_0\overline{\in}G$. 若$\alpha_0=-\infty$，自然$\alpha_0$是$G$的构成区间的一个左端点，它不属于$G$；若$\alpha_0>-\infty$是有限数，并且假设$\alpha_0\in G$，因$G$是开集，必有开区间$(\alpha', \beta')$，使$\alpha_0\in(\alpha', \beta')\subset G$，于是

$$x_0\in(\alpha_0,\beta_0)\subset(\alpha',\beta_0)\subset(\alpha',\beta')\cup(\alpha_0,\beta_0)\subset G,$$

即$(\alpha', \beta_0)\in B_{x_0}$，而$\alpha'<\alpha_0$，这与$\alpha_0$的定义矛盾，所以$\alpha_0\overline{\in}G$. 同理可证$\beta_0\overline{\in}G$. 故$(\alpha_0, \beta_0)\in A$. 又因为$x_0\in(\alpha_0, \beta_0)$，所以$x_0\in\bigcup\limits_{(\alpha,\beta)\in A}(\alpha,\beta)$. 这说明$G\subset\bigcup\limits_{(\alpha,\beta)\in A}(\alpha,\beta)$. 另一方面，据集$A$之定义

知，$\bigcup\limits_{(\alpha,\beta)\subset A}(\alpha,\beta)\subset G$. 故$G=\bigcup\limits_{(\alpha,\beta)\in A}(\alpha,\beta)$.

2) 再证集A中任何两个不同的开区间不相交，且A至多可数. 设(α_1,β_1)，(α_2,β_2)是A中两个不同的开区间，假若$(\alpha_1,\beta_1)\cap(\alpha_2,\beta_2)\neq\varnothing$，则必有$\alpha_1\in(\alpha_2,\beta_2)\subset G$，或$\alpha_2\in(\alpha_1,\beta_1)\subset G$，这均与$\alpha_1,\alpha_2\overline{\in}G$矛盾. 因此，$A$中任何两个不同的开区间不相交. 再由习题1.3的第1题可知，集A至多可数.

3) 设$G=\bigcup\limits_i(\alpha_i,\beta_i)$是一组互不相交的开区间的并集，我们证明每个$(\alpha_i,\beta_i)$都是$G$的构成区间.

显然，$(\alpha_i,\beta_i)\subset G$，只要再证$\alpha_i$、$\beta_i\overline{\in}G$即可. 假设$\alpha_i\in G$，则必有$j\neq i$，使$\alpha_i\in(\alpha_j,\beta_j)$，因而$(\alpha_i,\beta_i)$与$(\alpha_j,\beta_j)$相交，这和假设矛盾. 所以$\alpha_i\overline{\in}G$. 同理可证$\beta_i\overline{\in}G$. 故$(\alpha_i,\beta_i)$是$G$的构成区间. 证毕.

因此，任何非空开集G必然唯一地表示成至多可数个互不相交的开区间之并：$G=\bigcup\limits_i(\alpha_i,\beta_i)$.

注 定理2.2.1在$\mathbf{R}^n(n\geq2)$中不成立. $\mathbf{R}^n(n\in\mathbf{N})$中的开集的构造定理是2.1.2.

定义 2.2.2 设F是闭集，称F的余集$F^c=\mathbf{R}^1-F$的构成区间为F的余区间.

定理 2.2.2 闭集F或是全直线，或是从直线上挖掉至多可数个互不相交的开区间(即F的余区间)所得到的集.

证明 设闭集F是$\mathbf{R}^1$的真子集，因$F^c=\mathbf{R}^1-F$是非空开集，据定理2.2.1，F^c可唯一地表示成至多可数个互不相交的开区间之并：

$$F^c=\bigcup_i(\alpha_i,\beta_i).$$

故$F=\mathbf{R}^1-F^c=\mathbf{R}^1-\bigcup\limits_i(\alpha_i,\beta_i)$. 证毕.

定义 2.2.3 设 E 是非空有界集，令 $\alpha=\inf E,\beta=\sup E$，称 $[\alpha,\beta]$ 为包含 E 的最小闭区间.

显然，当 E 为有界闭集时，$\alpha,\beta\in E$.

推论 2.2.3 **非空有界闭集 F 是从包含它的最小闭区间中去掉至多可数个互不相交的开区间而成之集.**

推论 2.2.4 **设 F 是非空闭集，则 x_0 是 F 的孤立点 $\Leftrightarrow x_0$ 是 F 的某两个余区间的公共端点.**

由定理 2.2.2 及推论 2.2.4 可立得如下结果:

定理 2.2.5 **不是全直线的非空闭集 F 是完全集的充要条件是 F 的余区间彼此无公共的端点.**

此外，还可以证明：任何非空完全集的势为 $\aleph$（证明可参看参考文献[3]）.

习　题　2.2

1. 证明：直线上的孤立点集至多可数.
2. 证明：若 A 是直线上非空的既开又闭集，则 A 必是整个直线.
3. 证明：直线不能表为可数个两两互不相交的闭区间之并.
4. 证明：如果 A 是直线上的非空疏朗完全集，则 A 的任何两个余区间中间必夹着至少一个余区间.
5. 直线上开集全体所成集类的势是 $\aleph$.

§2.3　点集间的距离与隔离性定理

本节所讨论的都是 $q\,(q\in\mathbf{N})$ 维欧几里得空间 $\mathbf{R}^q$ 中的点集，以下不再声明.

定义 2.3.1 设 A，B 是任二非空点集，称 $\rho(A,B)=\inf\limits_{\substack{x\in A\\ y\in B}}\{\rho(x,y)\}$ 为 A,B 之间的距离.

特别，当 $A=\{x\}$ 为单点集时，A,B 之间的距离

$$\rho(A,B)=\rho(x,B)=\inf_{y\in B}\{\rho(x,y)\}$$

也称为点 x 到点集 B 的距离.

显然,若 $A\cap B\neq\varnothing$,则 $\rho(A,B)=0$,但反之不然.

例如,$A=(0,3)$,$B=[3,5)$,$\rho(A,B)=0$,但 $A\cap B=\varnothing$.

点 x 到点集 B 的距离有以下简单性质:

1) $x\in\overline{B}\Leftrightarrow\rho(x,B)=0$;

2) $x\in B'\Leftrightarrow\rho(x,B-\{x\})=0$.

这些性质的证明都比较简单,留作习题.

定理 2.3.1　设 A,B 为两个非空闭集,且其一有界,则必有 $x_0\in A$,$y_0\in B$,使 $\rho(x_0,y_0)=\rho(A,B)$.

证明　不妨设 A 有界,即存在 $P_0\in\mathbb{R}^q$ 及正实数 δ,使 $A\subset O(P_0,\delta)$. 由 $\rho(A,B)$ 的定义知,对每个自然数 n,$\exists x_n\in A$,$y_n\in B$,使

$$\rho(A,B)\leqslant\rho(x_n,y_n)<\rho(A,B)+\frac{1}{n}.$$

于是得到一个序列:$\{(x_n,y_n)\}$ $(n=1,2,\cdots)$. 因 A 中的点列 $\{x_n\}$ 有界,故 $\{x_n\}$ 有收敛子列 $\{x_{n_i}\}$,设 $\lim\limits_{i\to\infty}x_{n_i}=x_0$,则 $x_0\in\overline{A}=A$(据习题 2.1 的第 4 题).

现在再考察与 $\{x_{n_i}\}$ 对应的 $\{y_n\}$ 的子列 $\{y_{n_i}\}$. 由于

$$\begin{aligned}\rho(y_{n_i},P_0)&\leqslant\rho(y_{n_i},x_{n_i})+\rho(x_{n_i},P_0)\\&<\rho(A,B)+\frac{1}{n_i}+\delta\leqslant\rho(A,B)+1+\delta.\end{aligned}$$

所以 $\{y_{n_i}\}$ 也是有界的,于是,$\{y_{n_i}\}$ 有收敛子列 $\{y_{n_{i_k}}\}$,设 $\lim\limits_{k\to\infty}y_{n_{i_k}}=y_0$. 则 $y_0\in\overline{B}=B$. 由于与 $\{y_{n_{i_k}}\}$ 对应的 $\{x_{n_i}\}$ 的子列 $\{x_{n_{i_k}}\}$ 也收敛于 x_0,即 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_{i_k}}=x_0$,从而

$$\begin{aligned}\rho(A,B)&\leqslant\rho(x_0,y_0)\leqslant\rho(x_0,x_{n_{i_k}})+\rho(x_{n_{i_k}},y_{n_{i_k}})\\&\quad+\rho(y_{n_{i_k}},y_0)<\rho(x_0,x_{n_{i_k}})+\rho(A,B)+\frac{1}{n_{i_k}}\end{aligned}$$

$$+\rho(y_{n_{i_k}},y_0)\to\rho(A,B)\ (k\to+\infty).$$

故 $\rho(x_0,y_0)=\rho(A,B)$. 证毕.

推论 2.3.2　当 A,B 都是非空闭集且其一有界时,则

$$A\cap B=\varnothing\Leftrightarrow\rho(A,B)>0;\ A\cap B\neq\varnothing\Leftrightarrow\rho(A,B)=0.$$

定义 2.3.2　E_1,E_2 两个集称为互相隔离的是指:存在两个开集 G_1,G_2,使 $G_1\supset E_1$, $G_2\supset E_2$,且 $G_1\cap G_2=\varnothing$.

定理 2.3.3(隔离性定理)　任两个不交非空闭集 F_1,F_2 互相隔离.

证明　作 $G_1=\bigcup\limits_{x\in F_1}O\left(x,\dfrac{\rho_x}{2}\right)$,其中,$\rho_x=\rho(x,F_2)$;

$$G_2=\bigcup_{y\in F_2}O\left(y,\frac{\rho_y}{2}\right),\text{其中},\rho_y=\rho(y,F_1).$$

因 F_1,F_2 是闭集,且 $F_1\cap F_2=\varnothing$. 所以 $\forall x\in F_1$, $\rho_x=\rho(x,F_2)>0$; $\forall y\in F_2$, $\rho_y=\rho(y,F_1)>0$. 故 G_1,G_2 是开集,且 $G_1\supset F_1$, $G_2\supset F_2$. 现证 $G_1\cap G_2=\varnothing$:假设 $\exists z_0\in G_1\cap G_2$,则据 G_1,G_2 之定义,$\exists x_0\in F_1$,使 $\rho(x_0,z_0)<\dfrac{\rho_{x_0}}{2}$; $\exists\ y_0\in F_2$,使 $\rho(y_0,z_0)<\dfrac{\rho_{y_0}}{2}$. 若 $\rho_{x_0}\geqslant\rho_{y_0}$,则

$$\rho_{x_0}=\rho(x_0,F_2)\leqslant\rho(x_0,y_0)\leqslant\rho(x_0,z_0)+\rho(y_0,z_0)$$

$$<\frac{\rho_{x_0}}{2}+\frac{\rho_{y_0}}{2}\leqslant\rho_{x_0}.$$

矛盾. 若 $\rho_{x_0}<\rho_{y_0}$,则又得

$$\rho_{y_0}=\rho(y_0,F_1)\leqslant\rho(y_0,x_0)\leqslant\rho(y_0,z_0)+\rho(x_0,z_0)$$

$$<\frac{\rho_{y_0}}{2}+\frac{\rho_{x_0}}{2}<\rho_{y_0}.$$

这也矛盾. 故 $G_1\cap G_2=\varnothing$. 证毕.

习　题　2.3

1. 证明下列各题:

(1) $x\in B\Leftrightarrow\rho(x,B)=0$;

(2) $x\in B'\Leftrightarrow\rho(x,B-\{x\})=0$;

(3) $x\in B^0\Leftrightarrow\rho(x,B^c)>0$;

(4) $x\in B^b\Leftrightarrow\rho(x,B)=\rho(x,B^c)=0$.

2. 设E是一非空点集，$d>0$，作点集

$$O(E,d)=\{x\mid x\in\mathbf{R}^q,\ \rho(x,E)<d\},$$

则$O(E,d)$是包含E的一个开集(我们称此开集为集E的d-邻域，简称集E的邻域)。

提示：证明$O(E,d)=\bigcup\limits_{x\in E}O(x,d)$.

3. 证明：(1) 任何非空闭集均可表成可数个开集的交；

(2) 任何非空开集均可表成可数个闭集的并.

第三章 测 度 论

§3.0 引 言

集的测度概念是区间体积概念的扩张．首先试创测度定义的是德国数学家H. Hankel(1839—1873)，他考察区间(a,b)中的点集M，将(a,b)作k等分，除去那些不含M中点的小区间，令l_k为余下的诸小区间长度之和，称$\lim\limits_{k\to\infty} l_k$为$M$之容积．德国数学家G. Cantor于1883年将Hankel的这一思想拓广到$\mathbf{R}^n$中的点集，从而对$\mathbf{R}^n$中的点集给出了测度的定义．但是，Hankel的容积概念不满足“有限可加性——当两个不交的点集及其并集都有容积可言时，这两个点集的容积之和等于其并集的容积．”这由下例可以看出．

例1 设A是$(0,1]$中的有理数全体，B是$(0,1]$中的无理数全体，显然，A、B以及$(0,1]$的容积都是1，然$A\cup B=(0,1]$．

因此，Hankel的容积适用范围不广．后来，法国数学家C. Jordan对Hankel和Cantor的测度定义做了实质性的改进，他于1892年对$\mathbf{R}^n$中的点集给出了新的测度定义，即Jordan测度．下面介绍Jordan测度的大意．为叙述简单起见，以下所涉及的点集，若未声明所在空间，均指$\mathbf{R}^n$中的点集．

定义3.0.1 设E是任一有界点集，称非负实数

$$m_J^*E=\inf\left\{\sum_{i=1}^{k}|I_i|\,\middle|\,I_i\text{ 为左开右闭区间},\ \bigcup_{i=1}^{k}I_i\supset E,\ k\in\mathbf{N}\right\}$$

为E的Jordan外测度．称非负实数

$$m_{*}^{J}E=\sup\left\{\sum_{i=1}^{k}|I_i|\,\middle|\,I_i\text{ 为左开右闭区间},I_i\cap I_j=\varnothing\,(i\neq j),\right.$$

$$\left.\bigcup_{i=1}^{k} I_i \subset E,\ k \in \mathrm{N}\right\}$$

为E的Jordan内测度. 如果

$$m_J^* E = m_*^J E, \tag{3.0.1}$$

就称E是 Jordan 可测的，此时把E的 Jordan 外测度就定义为 E 的Jordan测度，记作$m_J E$.

容易证明

$$m_*^J E = |I| - m_J^* (I - E), \tag{3.0.2}$$

其中 I 是包含E的任一左开右闭区间.

因此，上述定义中的等式(3.0.1)可以换成等式

$$|I| = m_J^* E + m_J^* (I - E), \tag{3.0.3}$$

其中 I 的意义同(3.0.2)式.

按照上述定义，任何区间I 都是 Jordan 可测的，其 Jordan 测度恰等于它的体积. 可见 Jordan 测度是区间体积概念的推广，并且可以证明 Jordan 测度具有前面所述的"有限可加性"，但是，Jordan 测度有一个不能令人满意之处，就是"对'可数并'运算的封闭性——若可数个点集都有测度可言，则其并集也有测度可言"不能成立. 这可由下例看出.

例 2 设 $I = (0,1;0,1] \subset \mathbb{R}^2$，$E$ 为 I 中有理点的全体. E 是可数集，它的每个点作为独点集是 Jordan 可测的，其 Jordan 测度为 0，但E不是 Jordan 可测的，这是因为

$$m_J^* E = 1,\ m_J^* (I - E) = 1,\ |I| = 1,$$

从而

$$|I| < m_J^* E + m_J^* (I - E).$$

此外，容易看出，例 1 中的 A 与 B 都不是 Jordan 可测的.

因此，Jordan 测度仍有局限性，特别是在进行极限运算时很不方便. 于是数学工作者仍在不断寻求更为完善的测度概念. 法

国数学家 E. Borel 于 1898 年提出了定义集合测度的一些公设，其大意是：

1) 测度总是非负的.

2) 可数个互不相交集合的并集的测度等于它们测度之和.

3) 一个集合和它的子集的差的测度等于它们测度的差.

4) 测度大于零的集合是不可数集.

时隔不久，Borel 的学生、法国著名数学家 H. Lebesgue 于 1902 年对 $\mathbf{R}^n$ 中的点集提出了满足 Borel 公设的测度定义. Lebesgue 测度是 Jordan 测度的推广与发展. 事实上，把 Jordan 外测度定义中"用有限个左开右闭区间覆盖 E" 改为"用可数个左开右闭区间覆盖 E"，并把对 E"有界"的限制去掉，就得到 E 的Lebesgue外测度 m^*E(见定义 3.1.1). 对于有界集 E，采用和(3.0.2)式类似的方法定义 Lebesgue 内测度

$$m_*E=|I|-m^*(I-E),$$

其中 I 是包含 E 的任何一个左开右闭区间. 如果

$$m^*E=m_*E,$$

则称 E 是Lebesgue 可测的. 对于无界集 E，若 E 与任何区间 I 的交 $I\cap E$ 是 Lebesgue 可测的，就称 E 是 Lebesgue 可测的. 对于 Lebesgue 可测集 E，不论它有界或无界，一律称 E 的 Lebesgue 外测度为 E 的 Lebesgue 测度，记作 mE(见习题 3.2 的第 5 题).

Lebesgue 测度不仅保持了 Jordan 测度的性质，而且具有"对'可数并'运算的封闭性". 因此 Lebesgue 测度的极限运算要比 Jordan 测度的极限运算灵活和方便得多. 但是 Lebesgue 测度的定义中有界集与无界集受到不同的对待，而且同时出现内外两种测度，使用起来不够方便，也不便于向一般集类上推广. 之后，希腊数学家 C. Carathéodory 在深入研究外测度概念的基础上，于 1914 年提出了由外测度直接定义 Lebesgue 可测集的方法. Ca-

rathéodory 关于可测集的定义(见定义 3.1.2) 与 Lebesgue 当初的定义是等价的，证明可参看文献[2]. 用 Carathéodory 的定义讨论问题较方便，也便于向一般集类上推广. 因此，本书定义 Lebesgue 可测集时，将采用 Carathéodory 的方法.

本章主要建立 $\mathbb{R}^n$ 中点集的 Lebesgue 测度理论，此外，对抽象测度理论也作些初步介绍.

本章 §3.1、§3.2、§3.4 专门讨论 Lebesgue 测度理论，§3.3 介绍抽象测度. 为了叙述方便，我们约定，今后凡说"外测度"、"测度"、"可测"，当无特别声明时指的是"Lebesgue 外测度"、"Lebesgue 测度"、"Lebesgue 可测".

§3.1 外测度与可测集

3.1.1 外测度

为了今后讨论问题的需要，我们先引入一些术语和记号，并作一些相应的规定.

称 $\hat{\mathbb{R}}=(-\infty, +\infty)\cup\{-\infty\}\cup\{+\infty\}$ 为广义实数集. 规定 $\pm\infty$ 与实数 $x(-\infty<x<+\infty)$ 的代数运算如下:

1° 加法: $x+(\pm\infty)=(\pm\infty)+x=(\pm\infty)+(\pm\infty)=\pm\infty$.

2° 减法: $x-(\mp\infty)=(\pm\infty)-x=(\pm\infty)-(\mp\infty)=\pm\infty$.

3° 乘法: $(\pm\infty)(\pm\infty)=+\infty$; $(\pm\infty)(\mp\infty)=-\infty$;

$$x(\pm\infty)=(\pm\infty)x=\begin{cases}\pm\infty, & \text{当 } x>0;\\ 0, & \text{当 } x=0;\\ \mp\infty, & \text{当 } x<0,\end{cases}$$

4° 除法: $\dfrac{x}{\pm\infty}=0, \dfrac{\pm\infty}{x}=\begin{cases}\pm\infty, & \text{当 } x>0;\\ \mp\infty, & \text{当 } x<0.\end{cases}$

注意下面的一切记号

$(\pm\infty)+(\mp\infty)$；$(\pm\infty)-(\pm\infty)$；$\frac{\pm\infty}{0}$；$\frac{x}{0}$；$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$；$\frac{\pm\infty}{\mp\infty}$ 是没有意义的.

记 $\mathscr{D}_n$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中所有左开右闭区间(包括空集) 所成之集类. 今后当没有必要指明空间维数或空间维数不指即明时，$\mathscr{D}_n$ 也可简记为$\mathscr{D}$.

记 $\mathscr{I}_n$ 为$\mathbb{R}^n$ 中所有区间(包括空集)所成之集类.

设$\mathscr{A}$是一集类，映射 $f: \mathscr{A}\to\hat{\mathbb{R}}$ 称为广义实值集函数.

设 f 是定义在集类 $\mathscr{A}$ 上的广义实值集函数，若 A，$B\in\mathscr{A}$，$A\cap B=\varnothing$，且 $A\cup B\in\mathscr{A}$，则 $f(A\cup B)=f(A)+f(B)$. 就称 f 具有可加性.

在第二章 §2.1 定义 2.1.5 中，我们已经给 $\mathbb{R}^n$ 中的区间定义了体积，现在利用区间的体积概念，作 $\mathscr{I}_n$上的集函数

$$m_0 I=|I|=\prod_{i=1}^{n}(b_i-a_i),\ \forall I=\langle a_1,b_1;a_2,b_2;\cdots;a_n,b_n\rangle\in\mathscr{I}_n, \tag{3.1.1}$$

则 m_0: $\mathscr{I}_n\to[0,+\infty)$是定义在 $\mathscr{I}_n$上的非负实值集(区间)函数，且具有可加性.

我们现在的任务是要把这个只适用于区间的体积概念扩充到 $\mathbf{R}^n$ 中更一般的点集上去. 为此，首先引入外测度的概念.

定义 3.1.1 设集 $E\in 2^{(\mathbf{R}^n)}$. 称非负广义实数

$$m^*E=\inf\left\{u=\sum_{i=1}^{\infty}|I_i|\ \middle|\ I_i\in\mathscr{D}_n,\ \text{且}\ E\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}I_i\right\} \tag{3.1.2}$$

为E的 Lebesgue 外测度，简称为E的外测度.

可见，m^*: $2^{(\mathbf{R}^n)}\to\hat{\mathbb{R}}$ 就是以 $2^{(\mathbf{R}^n)}$ 中的集为“自变元”，取值是非负实数或$+\infty$的广义实值集函数.

显然，对 $\mathbf{R}^n$ 中的任何有界点集 E，都有 $m^*E\leqslant m_J^*E$.

定理 3.1.1 定义在 $2^{(\mathbf{R}^n)}$ 上的外测度 m^* 具有下列性质:

1) 非负性: $\forall A\in 2^{(\mathbf{R}^n)}$, $m^*A\geqslant 0$. 且当 $A=\varnothing$ 时, $m^*A=0$;

2) 单调性: 若 $A,B\in 2^{(\mathbf{R}^n)}$, 且 $A\subset B$, 则 $m^*A\leqslant m^*B$;

3) 次可数可加性: 对任何一列 $A_i\in 2^{(\mathbf{R}^n)}$, 有

$$m^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}m^*A_i;$$

4) 对于 $A,B\in 2^{(\mathbf{R}^n)}$, 若 $\rho(A,B)>0$, 则

$$m^*(A\cup B)=m^*A+m^*B.$$

证明 1) 显然.

2) 对任何一列 $I_i\in\mathscr{D}_n$ $(i=1,2,\cdots)$, 若 $B\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}I_i$, 则 $A\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}I_i$, 于是 $m^*A\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}|I_i|$, 由外测度的定义知, $m^*A\leqslant m^*B$.

3) $\forall\varepsilon>0$ 及每个 A_i, 据外测度的定义, 有一列 $I_{i,k}\in\mathscr{D}_n$ $(k=1,2,\cdots)$, 使 $A_i\subset\bigcup_{k=1}^{\infty}I_{i,k}$, 且

$$\sum_{k=1}^{\infty}|I_{i,k}|\leqslant m^*A_i+\frac{\varepsilon}{2^i}.$$

从而

$$\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{\infty}I_{i,k},$$

且

$$m^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}|I_{i,k}|\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}\left(m^*A_i+\frac{\varepsilon}{2^i}\right)=\sum_{i=1}^{\infty}m^*A_i+\varepsilon.$$

由 $\varepsilon>0$ 的任意性知,

$$m^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}m^*A_i.$$

4) 设 $r=\rho(A, B)>0$, $\forall \varepsilon>0$, 据外测度的定义, $\exists$ 一列 $I_i \in \mathscr{D}_n (i=1,2,\cdots)$, 使 $A \cup B \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$, 且

$$\sum_{i=1}^{\infty} |I_i| \leqslant m^*(A \cup B)+\varepsilon.$$

由于每个左开右闭区间I_i都可以分解成有限个互不相交的直径小于r的左开右闭区间I_i^j之并$\bigcup_j I_i^j$, 并且$|I_i|=\sum_j |I_i^j|$. 因此, 我们不妨设$\{I_i\}$ $(i=1,2,\cdots)$中的每个I_i的直径都小于r. 这样的I_i显然不能同时含有A与B的点. 将$\{I_i\}$ $(i=1,2,\cdots)$中区间分为两组: 含有A中点的记为$\{I_{i_k}\}$, 不含A中点的记为$\{I_{i_m}\}$, 则 $A \subset \bigcup_k I_{i_k}$, $B \subset \bigcup_m I_{i_m}$, 于是

$$m^*(A \cup B)+\varepsilon \geqslant \sum_{i=1}^{\infty} |I_i| = \sum_k |I_{i_k}| + \sum_m |I_{i_m}| \geqslant m^*A+m^*B.$$

由 $\varepsilon>0$ 的任意性知,

$$m^*(A \cup B) \geqslant m^*A+m^*B.$$

另一方面, 据定理 3.1.1 的 3), 有

$$m^*(A \cup B) \leqslant m^*A+m^*B.$$

故

$$m^*(A \cup B)=m^*A+m^*B.$$ 证毕.

例 1 设 $A=\{x_0\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的独点集, 其中 $x_0=(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \cdots, x_n^{(0)})$, 则 $m^*A=0$.

证明 $\forall \varepsilon>0$, 令

$$I=\left\{x=(x_1, x_2, \cdots, x_n) \,\middle|\, x_i^{(0)}-\frac{\sqrt[n]{\varepsilon}}{2}<x_i \leqslant x_i^{(0)}+\frac{\sqrt[n]{\varepsilon}}{2},\ i=1,2,\cdots,n\right\},$$

则$I\in\mathscr{D}_n$，$A\subset I$，且$|I|=\varepsilon$. 从而有 $0\leqslant m^*A\leqslant\varepsilon$. 由 $\varepsilon>0$ 的任意性知，$m^*A=0$. 证毕.

由例 1 及外测度的非负性和次可数可加性可立即推知，$\mathbb{R}^n$ 中有限点集和可数点集的外测度都为零. 由此可知，§3.0 例 1 中的集 A 和例 2 中的集 E 的 Lebesgue 外测度都是零.

例 2 $\forall\, I\in\mathscr{I}_n$，有 $m^*I=m_0I=|I|$.

证明 先证 $m^*I\leqslant|I|$. $\forall\,\varepsilon>0$，$\exists\, I^*\in\mathscr{D}_n$，使 $I\subset I^*$，且 $|I^*|<|I|+\varepsilon$. 由外测度的定义知，$m^*I<|I|+\varepsilon$. 再由 $\varepsilon>0$ 的任意性知，$m^*I\leqslant|I|$.

再证 $m^*I\geqslant|I|$. $\forall\varepsilon>0$，作闭区间 I_0，使 $I_0\subset I$，且 $|I|<|I_0|+\frac{\varepsilon}{4}$. 对于 I_0 和上述 ε，$\exists$ 一列 $I_i\in\mathscr{D}_n\ (i=1,\ 2,\ \cdots)$，使得 $I_0\subset\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}I_i$，且 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}|I_i|<m^*I_0+\frac{\varepsilon}{2}$. 对每个左开右闭区间 I_i，作开区间 J_i，使 $I_i\subset J_i$，且 $|J_i|<|I_i|+\frac{\varepsilon}{2^{i+2}}$. 于是 $I_0\subset\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}J_i$. 据 Borel 有限覆盖定理，在 $\{J_i\}\,(i=1,\ 2,\cdots)$ 中存在有限个开区间，不妨设就是 $J_1, J_2,\cdots, J_k$，使得 $I_0\subset\bigcup\limits_{i=1}^{k}J_i$. 因此，$|I_0|\leqslant\sum\limits_{i=1}^{k}|J_i|$. 从而

$$\begin{aligned}|I|&<|I_0|+\frac{\varepsilon}{4}\leqslant\sum_{i=1}^{k}|J_i|+\frac{\varepsilon}{4}\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}|J_i|+\frac{\varepsilon}{4}\\&<\sum_{i=1}^{\infty}\left(|I_i|+\frac{\varepsilon}{2^{i+2}}\right)+\frac{\varepsilon}{4}=\sum_{i=1}^{\infty}|I_i|+\frac{\varepsilon}{2}\\&<m^*I_0+\varepsilon\leqslant m^*I+\varepsilon.\end{aligned}$$

由 $\varepsilon>0$ 的任意性知，$m^*I\geqslant|I|$.

所以，$m^*I=|I|$. 证毕.

定理 3.1.2 设 E 是 $\mathbb{R}^n$ 中的任一点集，则

$$m^*E=\inf\{m^*G \mid G\text{ 是包含 }E\text{ 的开集}\}.$$

证明 分以下两步进行证明:

1) 由外测度的单调性知,对任意包含 E 的开集 G,有

$$m^*G \geqslant m^*E. \tag{3.1.3}$$

2) 若 $m^*E=+\infty$, 则由(3.1.3)式可推知定理成立. 因此,不妨设 $m^*E<+\infty$, 于是, $\forall \varepsilon>0$, 由外测度的定义知, $\exists$ 一列 $I_i \in \mathscr{D}_n (i=1,2,\cdots)$, 使 $E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$, 且 $\sum_{i=1}^{\infty}|I_i|<m^*E+\frac{\varepsilon}{2}$. 对每个左开右闭区间 I_i,作开区间 J_i,使 $I_i \subset J_i$,且 $|J_i|<|I_i|+\frac{\varepsilon}{2^{i+1}} (i=1,2,\cdots)$. 令 $G=\bigcup_{i=1}^{\infty} J_i$,则 G 是开集, $G \supset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i \supset E$,且

$$\begin{aligned} m^*G &\leqslant \sum_{i=1}^{\infty}|J_i|<\sum_{i=1}^{\infty}\left(|I_i|+\frac{\varepsilon}{2^{i+1}}\right)=\sum_{i=1}^{\infty}|I_i|+\frac{\varepsilon}{2} \\ &<m^*E+\varepsilon. \end{aligned}$$

由1)、2)两步即知,定理成立. 证毕.

3.1.2 可测集

本节例 2 说明, m^* 是 m_0 在 $2^{(\mathbf{R}^n)}$ 上的延拓. 但由于定理 3.1.1 的 4) 中的条件 $\rho(A,B)>0$ 不能减弱为 $A \cap B=\varnothing$ (这从后面的 § 3.2 中不可测集一例可以看出), 所以 m^* 不具有可加性, 因此, 用上述办法所定义的外测度并不能看作就是体积概念的推广. 于是, 我们自然希望从 $2^{(\mathbf{R}^n)}$ 中分出一个子集类 $\mathscr{L}_n$ ($\mathscr{L}_n$ 当然应该包含 $\mathscr{I}_n$ 且不等于 $\mathscr{I}_n$), 使 m^* 在 $\mathscr{L}_n$ 上成立可加性. 这就启发我们引入下面的定义.

定义 3.1.2 设集 $E \in 2^{(\mathbf{R}^n)}$, 若 $\forall T \in 2^{(\mathbf{R}^n)}$, 都有

$$m^*T=m^*(T \cap E)+m^*(T \cap E^c), \tag{3.1.4}$$

其中 $E^c=\mathbf{R}^n-E$. 就称 E 是 Lebesgue可测的，简称 E 可测. 此时，把 E 的 Lebesgue 外测度就称为 E 的 Lebesgue 测度. 简称为 E 的测度，记作 mE.

等式(3.1.4)称为集 E 的 Carathéodory条件.

记 $\mathscr{L}_n$ 为 $\mathbf{R}^n$ 中全体 Lebesgue 可测集所成之集类. 今后当没有必要指明空间维数或空间维数不指即明时，$\mathscr{L}_n$ 也可简记为 $\mathscr{L}$.

下面的讨论将使我们看到，$\mathscr{L}_n$ 确实符合我们的要求，即 m^* 在 $\mathscr{L}_n$ 上成立可加性，且 $\mathscr{I}_n$ 是 $\mathscr{L}_n$ 的真子类.

本节以下所讨论的点集都是 $\mathbf{R}^n$ 的子集，不再声明.

定理 3.1.3 集 E 可测 $\Leftrightarrow \forall A\subset E, B\subset E^c$，恒有

$$m^*(A\cup B)=m^*A+m^*B.$$

证明 "$\Rightarrow$"：取 $T=A\cup B$，则 $T\cap E=(A\cup B)\cap E=A$. $T\cap E^c=(A\cup B)\cap E^c=B$，于是

$$m^*(A\cup B)=m^*T=m^*(T\cap E)+m^*(T\cap E^c)=m^*A+m^*B.$$

"$\Leftarrow$"：对任意点集 T，令 $A=T\cap E$，$B=T\cap E^c$，则 $A\subset E$，$B\subset E^c$，

$$A\cup B=(T\cap E)\cup(T\cap E^c)=T\cap(E\cup E^c)=T.$$

由于

$$m^*(A\cup B)=m^*A+m^*B.$$

所以

$$m^*T=m^*(T\cap E)+m^*(T\cap E^c).$$

这说明 E 可测. 证毕.

定理 3.1.4 集 E 可测 $\Leftrightarrow E^c$ 可测.

证明 由定义 3.1.2 及 $(E^c)^c=E$ 立即可得此定理. 证毕.

定理 3.1.5 若集 E_1, E_2 都可测，则 $E_1\cap E_2$ 也可测.

证明 因集 E_1, E_2 可测，则对任意点集 T，有

$$m^*T = m^*(T\cap E_1) + m^*(T\cap E_1^c),$$

$$\begin{aligned} m^*(T\cap E_1) &= m^*[(T\cap E_1)\cap E_2] + m^*[(T\cap E_1)\cap E_2^c] \\ &= m^*[T\cap (E_1\cap E_2)] + m^*(T\cap E_1\cap E_2^c), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m^*[T\cap (E_1\cap E_2)^c] &= m^*[T\cap (E_1\cap E_2)^c\cap E_1] \\ &\quad + m^*[T\cap (E_1\cap E_2)^c\cap E_1^c] \\ &= m^*(T\cap E_1\cap E_2^c) + m^*(T\cap E_1^c). \end{aligned}$$

因此，$m^*T = m^*(T\cap E_1) + m^*(T\cap E_1^c)$

$$\begin{aligned} &= m^*[T\cap (E_1\cap E_2)] + m^*(T\cap E_1\cap E_2^c) + m^*(T\cap E_1^c) \\ &= m^*[T\cap (E_1\cap E_2)] + m^*[T\cap (E_1\cap E_2)^c]. \end{aligned}$$

故 $E_1\cap E_2$ 可测. 证毕.

推论 3.1.6 若集 $E_i(i=1, 2, \cdots, k)$ 都可测，则 $\bigcap_{i=1}^{k} E_i$ 也可测.

定理3.1.7 若集 E_1, E_2 都可测，则 E_1-E_2 也可测.

证明 因 $E_1-E_2=E_1\cap E_2^c$，由定理 3.1.4 及定理 3.1.5 知，E_1-E_2 可测. 证毕.

定理 3.1.8 若集 E_1, E_2 都可测，则 $E_1\cup E_2$ 也可测，且若 $E_1\cap E_2=\varnothing$，则对任意点集 T，恒有

$$m^*[T\cap (E_1\cup E_2)] = m^*(T\cap E_1) + m^*(T\cap E_2).$$

证明 因 $E_1\cup E_2=(E_1^c\cap E_2^c)^c$，故 $E_1\cup E_2$ 可测.

因 $E_1\cap E_2=\varnothing$，则 $T\cap E_1\subset E_1$，$T\cap E_2\subset E_2\subset E_1^c$，由定理 3.1.3 知，

$$\begin{aligned} m^*[T\cap (E_1\cup E_2)] &= m^*[(T\cap E_1)\cup (T\cap E_2)] \\ &= m^*(T\cap E_1) + m^*(T\cap E_2). \end{aligned}$$

证毕.

推论3.1.9 若集 $E_i(i=1,2,\cdots,k)$ 都可测，则 $\bigcup_{i=1}^{k} E_i$ 也可测，

又若$E_i\cap E_j=\varnothing(i\neq j)$，则对于任意点集 T，恒有

$$m^*\left[T\cap\left(\bigcup_{i=1}^{k}E_i\right)\right]=\sum_{i=1}^{k}m^*(T\cap E_i).\qquad(3.1.5)$$

注 在(3.1.5)式中取 $T=\bigcup_{i=1}^{k}E_i$，就得到

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{k}E_i\right)=\sum_{i=1}^{k}mE_i.\qquad(3.1.6)$$

(3.1.6)式说明 m^*在$\mathscr{L}_n$ 上($m=m^*|_{\mathscr{L}_n}$)成立有限可加性.

定理3.1.10 **设集$E_i(i=1,2,\cdots)$都可测,$E_i\cap E_j=\varnothing(i\neq j)$，则 $\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i$ 也可测，且 $m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}mE_i$.**

证明 由推论 3.1.9 知，对任意自然数 k，$\bigcup_{i=1}^{k}E_i$总是可测的，因此，对任意点集 T，恒有

$$m^*T=m^*\left[T\cap\left(\bigcup_{i=1}^{k}E_i\right)\right]+m^*\left[T\cap\left(\bigcup_{i=1}^{k}E_i\right)^c\right]$$

$$\geqslant\sum_{i=1}^{k}m^*(T\cap E_i)+m^*\left[T\cap\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\right)^c\right],$$

令 $k\to\infty$，即得

$$m^*T\geqslant\sum_{i=1}^{\infty}m^*(T\cap E_i)+m^*\left[T\cap\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\right)^c\right]\qquad(3.1.7)$$

$$\geqslant m^*\left[T\cap\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\right)\right]+m^*\left[T\cap\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\right)^c\right].$$

另一方面，因为

$$T=\left[T\cap\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\right)\right]\cup\left[T\cap\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\right)^c\right].$$

故

$$m^*T \leqslant m^*\left[T\cap\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\right)\right]+m^*\left[T\cap\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\right)^c\right].$$

由以上两个方面知，

$$m^*T=m^*\left[T\cap\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\right)\right]+m^*\left[T\cap\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\right)^c\right].$$

这说明 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}E_i$ 可测.

取 $T=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}E_i$，则 $T\cap\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}E_i\right)^c=\varnothing, T\cap E_i=E_i,\ i=1,2,\cdots$.
由(3.1.7)式知

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\right)\geqslant\sum_{i=1}^{\infty}mE_i,$$

再由定理 3.1.1 的 3)知

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\right)\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}mE_i.$$

故 $$m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}mE_i.$$ 证毕.

注 定理 3.1.10 所揭示的性质称为测度的可数可加性. 它说明 m^* 在 $\mathscr{L}_n$ 上 $(m=m^*|_{\mathscr{L}_n})$ 成立可数可加性.

推论 3.1.11 **设集** $E_i(i=1,2,\cdots)$ **都可测，则** $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}E_i$ **也可测.**

证明 令 $E_1^*=E_1,\ E_i^*=E_i-\left(\bigcup\limits_{j=1}^{i-1}E_j\right)(i=2,\ 3,\ \cdots)$，则 E_i^* $(i=1,2,\cdots)$ 都可测，且 $E_i^*\cap E_j^*=\varnothing(i\neq j)$，又 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}E_i=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}E_i^*$，故 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}E_i$ 可测. 证毕.

推论 3.1.12 设集 E_1, E_2 都可测，且 $E_1 \subset E_2$，$mE_1 < +\infty$，则

$$m(E_2 - E_1) = mE_2 - mE_1.$$

证明 因

$$mE_2 = m[(E_2 - E_1) \cup E_1] = m(E_2 - E_1) + mE_1,$$

故

$$m(E_2 - E_1) = mE_2 - mE_1.$$ 证毕.

定理 3.1.13 设集 $E_i (i=1,2,\cdots)$ 都可测，则 $\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i$ 也可测.

证明 因 $\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i = \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i^c\right)^c$，故 $\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i$ 可测. 证毕.

定理 3.1.14 设集 $\{E_i\} (i=1,2,\cdots)$ 是单调增加的可测集列，$E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i = \lim_{k\to\infty} E_k$，则

$$\lim_{k\to\infty} mE_k = m(\lim_{k\to\infty} E_k) = mE. \text{（下连续性）} \tag{3.1.8}$$

证明 由推论 3.1.11，$E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ 可测. 设 $E_0 = \varnothing$，$A_i = E_i - E_{i-1} (i=1,2,\cdots)$，则 $A_i (i=1,2,\cdots)$ 可测，

$$A_i \cap A_j = \varnothing (i \neq j), \text{且 } E_k = \bigcup_{i=1}^{k} A_i,\ E = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i.$$

由定理 3.1.10 及推论 3.1.9 的注，

$$mE = \sum_{i=1}^{\infty} mA_i = \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{k} mA_i = \lim_{k\to\infty} m\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right)$$
$$= \lim_{k\to\infty} mE_k.$$ 证毕.

定理 3.1.15 设 $\{E_i\} (i=1,2,\cdots)$ 是单调减少的可测集列，$E = \bigcap_{i=1}^{\infty} E_i = \lim_{k\to\infty} E_k$，且 $mE_1 < +\infty$，则

$$\lim_{k\to\infty} mE_k = m(\lim_{k\to\infty} E_k) = mE. \text{（上连续性）} \tag{3.1.9}$$

证明 由定理 3.1.13，$E=\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i$ 可测．由于 $\{E_1-E_k\}$ 是单调增加的可测集列，所以

$$\lim_{k\to\infty}(E_1-E_k)=\bigcup_{i=1}^{\infty}(E_1-E_i)=E_1-\left(\bigcap_{i=1}^{\infty}E_i\right)=E_1-E.$$

又由于 $E\subset E_k\subset E_1(\forall k\in\mathrm{N})$，从而 $mE\leqslant mE_k\leqslant mE_1<+\infty$ $(\forall k\in\mathrm{N})$．由推论 3.1.12 和定理 3.1.14，

$$\begin{aligned} mE_1-\lim_{k\to\infty} mE_k &= \lim_{k\to\infty}(mE_1-mE_k) \\ &= \lim_{k\to\infty} m(E_1-E_k) \\ &= m(E_1-E) \\ &= mE_1-mE. \end{aligned}$$

故 $\lim_{k\to\infty} mE_k=mE$．证毕．

注 定理 3.1.15 中 $mE_1<+\infty$ 的条件可以改为存在某个自然数 k_0，使 $mE_{k_0}<+\infty$，但此条件不能去掉．例如，$I_k=[k,+\infty)$ $(k=1,2,\cdots)$ 是 R^1 中单调减少的可测集列（其可测性见下节 3.2.1），$\lim_{k\to\infty} I_k=\varnothing$，但 $mI_k\not\to m\varnothing\,(k\to\infty)$．

上列诸定理还说明，$\mathscr{L}_n$ 对于集的差、余、可数并、可数交以及集列的极限运算都是封闭的．

习 题 3.1

1．把定义 3.1.1 中"用可数个左开右闭区间覆盖 E"改为"用可数个开区间覆盖 E"（即把(3.1.2)式中的 I_i 改为开区间），所得定义与原定义等价．试证明之．

2．证明：(1) 若集 $E\subset\mathrm{R}^n$ 有界，则 $m^*E<+\infty$，但反之不然．

(2) 设集 $E\subset\mathrm{R}^n$，若 $m^*E=+\infty$，则 E 无界，但反之不然．

3. 设集 $E\subset\mathbb{R}^1$ 有界，$m^*E>0$，则对任意小于 m^*E 的正数 c，恒有 E 的子集 E_1，使 $m^*E_1=c$.

4. 设 E_1, E_2 为可测集，且其中至少有一个测度有限，试证

$$m(E_1\cup E_2)=mE_1+mE_2-m(E_1\cap E_2).$$

5. 设 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 是有限个互不相交的可测集，且 $E_i\subset A_i$，$i=1, 2, \cdots, k$. 试证

$$m^*\left(\bigcup_{i=1}^{k}E_i\right)=\sum_{i=1}^{k}m^*E_i.$$

6. 设集 $E\subset\mathbb{R}^n$，若 $m^*E=0$，则 E 可测.

7. 在线段[0,1]上已给 n 个可测集：$A_1, A_2, \cdots, A_n$. 若 $\sum_{i=1}^{n}mA_i>n-1$，则 $m\left(\bigcap_{i=1}^{n}A_i\right)>0$.

§3.2 可测集类与不可测集

本节指出 $\mathbb{R}^n$ 中一般常见的可测集合，进一步讨论 Lebesgue 可测集类 $\mathscr{L}_n$ 的结构，并举一个一维 Lebesgue 不可测集的例子.

3.2.1 $\mathscr{L}_n$ 的结构

$\mathscr{L}_n$ 究竟由那些类型的集组成，这些集具有什么特征，下面的一些定理对此问题作了回答.

定理3.2.1 $\mathscr{D}_n\subset\mathscr{L}_n$. 即 $\mathbb{R}^n$ 中任何左开右闭区间都可测.

证明 据习题 3.1 的第 6 题，空集 $\varnothing\in\mathscr{L}_n$. 因此不妨设

$I=\{x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)\mid a_i<x_i\leqslant b_i,\ a_i<b_i,\ i=1, 2, \cdots, n\}\neq\varnothing$. $\forall T\in 2^{(\mathbb{R}^n)}$，由于 $T=(T\cap I)\cup(T\cap I^c)$，所以，有

$$m^*T\leqslant m^*(T\cap I)+m^*(T\cap I^c). \qquad (3.2.1)$$

因此，只要能证明下式

$$m^*T\geqslant m^*(T\cap I)+m^*(T\cap I^c) \qquad (3.2.2)$$

成立，定理就得证.

取正数列 $\delta_1>\delta_2>\cdots>\delta_k>\cdots$，使 $\delta_1<\frac{1}{2}\min\{b_i-a_i|\ i=1,2,\cdots,n\}$，且 $\lim\limits_{k\to\infty}\delta_k=0$. 令

$I^{(k)}=\{x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\ |a_i+\delta_k<x_i\leqslant b_i-\delta_k,\ i=1,2,\cdots,n\}, k=1,2,\cdots$ (图 3.2.1)，则 $\rho(I^{(k)},I^c)=\delta_k>0$, $\forall k\in\mathbf{N}$. 从而更有

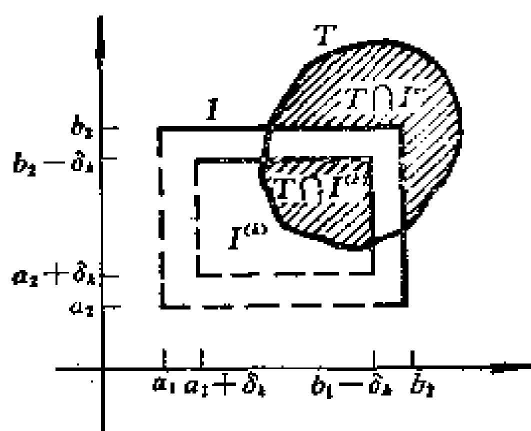


图 3.2.1

$$\rho(T\cap I^{(k)},T\cap I^c)>0,\forall k\in\mathbf{N}.$$

据定理 3.1.1 的 2) 和 4)，有

$$\begin{aligned}m^*T&\geqslant m^*[(T\cap I^{(k)})\cup(T\cap I^c)]\\&=m^*(T\cap I^{(k)})+m^*(T\cap I^c),\forall k\in\mathbf{N}.\end{aligned}$$

只要再证

$$\lim_{k\to\infty}m^*(T\cap I^{(k)})=m^*(T\cap I),$$

(3.2.2) 式就得证.

令 $$\eta=\max\{b_i-a_i \mid i=1,2,\cdots,n\}.$$

因为

$$m^*(T\cap I)=m^*[T\cap((I-I^{(k)})\cup I^{(k)})]\leqslant m^*[T\cap(I-I^{(k)})]+m^*(T\cap I^{(k)}),$$

所以

$$\begin{aligned}0&\leqslant m^*(T\cap I)-m^*(T\cap I^{(k)})\leqslant m^*[T\cap(I-I^{(k)})]\\&\leqslant m^*(I-I^{(k)})\\&\leqslant 2n\cdot\eta^{n-1}\delta_k\to 0(k\to\infty).\end{aligned}$$

故 $\lim\limits_{k\to\infty}m^*(T\cap I^{(k)})=m^*(T\cap I)$. (3.2.2)式得证. 证毕.

定理3.2.2 凡 $\mathbb{R}^n$ 中的开集、闭集皆可测.

证明 据定理 2.1.2, $\mathbb{R}^n$ 中的任何开集均可表为可数个互不相交的左开右闭区间之并,而左开右闭区间是可测的,故 $\mathbb{R}^n$ 中的任何开集都是可测的. 再由定理 3.1.4 知, $\mathbb{R}^n$ 中的任何闭集也都是可测的. 证毕.

定义3.2.1 设 $F_i(i=1,2,\cdots)$ 都是闭集, 称 $F=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}F_i$ 为 F_σ 型集.

定义3.2.2 设 $G_i(i=1,2,\cdots)$ 都是开集, 称 $G=\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}G_i$ 为 G_δ 型集.

以开集、闭集为对象,作至多可数次或并或交的运算所得到的集统称为 Borel 集(严格的定义将于 § 3.3 例 15 中给出).

记 $\mathscr{B}_n$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中所有 Borel 集所成之集类,今后当没有必要指明空间维数或空间维数不指即明时, $\mathscr{B}_n$ 也可简记为 $\mathscr{B}$.

显然, F_σ 型集和 G_δ 型集都属于 $\mathscr{B}$.

定理 3.2.3 $\mathscr{I}_n\subset\mathscr{B}_n$, 即 $\mathbb{R}^n$ 中的任何区间都是 Borel 集.

证明留为习题.

定理3.2.4 $\mathscr{B}_n\subset\mathscr{L}_n$，即 $\mathbf{R}^n$ 中的任何 Borel 集都可测.

证明[①] 由Borel 集的定义及定理 3.2.2、推论 3.1.11 以及定理 3.1.13 可立得此定理. 证毕.

注3.2.5 1) 由 §3.1.1 的例 2 和定理 3.2.3，定理 3.2.4 知，$\forall I\in\mathscr{I}_n$，则 $I\in\mathscr{L}_n$，且 $mI=m_0I=|I|$.

2) 由定理 3.2.3 和定理 3.2.4 可得如下结果：

$$\mathscr{D}_n\subset\mathscr{I}_n\subset\mathscr{B}_n\subset\mathscr{L}_n\subset 2^{(\mathbf{R}^n)}. \tag{3.2.3}$$

3) 可以证明

$$\overline{\overline{\mathscr{D}_n}}=\overline{\overline{\mathscr{I}_n}}=\overline{\overline{\mathscr{B}_n}}=\aleph. \tag{3.2.4}$$

$$\overline{\overline{\mathscr{L}_n}}=2^{\aleph}. \tag{3.2.5}$$

可见 $\mathscr{B}_n$ 是$\mathscr{L}_n$的真子类(当然，$\mathscr{I}_n$ 更是$\mathscr{L}_n$ 的真子类)，所以还有非 Borel 集的可测集，另外，虽然 $\overline{\overline{\mathscr{L}_n}}=\overline{\overline{2^{(\mathbf{R}^n)}}}=2^{\aleph}$，但不可测集是存在的(见本节 3.2.3).

定理3.2.6 $\forall$ 集 $E\subset\mathbf{R}^n$，恒有 $\mathbf{R}^n$ 中的 G_δ 型集 $A\supset E$，使 $mA=m^*E$.

证明 对每个自然数 k，据定理 3.1.2，$\exists$ 开集 $G_k\supset E$，使 $mG_k\leqslant m^*E+\frac{1}{k}$，令 $A=\bigcap_{k=1}^{\infty}G_k$，则 A 是 G_δ 型集，$A\supset E$，且

$$m^*E\leqslant mA\leqslant mG_k\leqslant m^*E+\frac{1}{k}\to m^*E,k\to\infty.$$

故 $mA=m^*E$. 证毕.

注 对于定理 3.2.6 中之 $\{G_k\}$，还可要求 $G_1\supset G_2\supset\cdots\supset G_k\supset\cdots$，并且若 $E\subset\Delta$，Δ 为开区间，则更可要求诸 $G_k\subset\Delta$.

定理 3.2.7 $\mathbf{R}^n$ 中的 Jordan 可测集皆 Lebesgue 可测，且两

---

① 由于这里 Borel 集的定义不严格，因此这里的证明也不够严格. 本定理的严格证明请见 §3.3 第 3 段的有关定理和例 15.

种测度之值相同.

证明留为习题.

记 $\mathscr{J}_n$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中全体 Jordan 可测集所成之集类，定理 3.2.7 说明，$\mathscr{J}_n\subset\mathscr{L}_n$，并且 Lebesgue 测度 $m:\mathscr{L}_n\to\hat{\mathbb{R}}$ 是 Jordan 测度 $m_J:\mathscr{J}_n\to[0,+\infty)$ 在 $\mathscr{L}_n$ 上的延拓，即 $m_J=m|\mathscr{J}_n$.

引理3.2.8 **$\mathbb{R}^n$ 中任意无界可测集 E，均可表为可数个互不相交的有界可测集之并.**

证明 据定理 2.1.2，$\mathbb{R}^n$ 可以表为可数个互不相交的左开右闭区间 $I_i(i=1,2,\cdots)$ 之并 $\bigcup_{i=1}^{\infty}I_i$. 令 $E_i=E\cap I_i(i=1,2,\cdots)$，则 $E_i(i=1,2,\cdots)$ 有界可测，$E_i\cap E_j=\varnothing(i\neq j)$，且

$$E=E\cap\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}I_i\right)=\bigcup_{i=1}^{\infty}(E\cap I_i)=\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i.\text{ 证毕.}$$

定理 3.2.9 **集 $E\in\mathscr{L}_n\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0$，有 $\mathbb{R}^n$ 中的开集 G 及闭集 F，使 $F\subset E\subset G$，且 $m(G-F)<\varepsilon$.**

证明 "$\Rightarrow$"：设集 $E\in\mathscr{L}_n$，不论 E 是否有界，据引理 3.2.8，我们总可以将 E 分为可数个互不相交的有界可测集之并：

$$E=\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i,\ E_i\cap E_j=\varnothing(i\neq j),$$

$E_i(i=1,2,\cdots)$ 有界可测. 据定理 3.1.2，$\forall\varepsilon>0$ 及每个 E_i，存在开集 $G_i\supset E_i$，使 $mG_i<mE_i+\frac{\varepsilon}{2^{i+1}}$，即 $m(G_i-E_i)<\frac{\varepsilon}{2^{i+1}}$. 令 $G=\bigcup_{i=1}^{\infty}G_i$，则 G 是开集，$G\supset E$，且

$$m(G-E)=m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}G_i-\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\right)\leqslant m\left[\bigcup_{i=1}^{\infty}(G_i-E_i)\right]$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}m(G_i-E_i)<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.2.6}$$

又 $E^c\in\mathscr{L}_n$，据前面所得结果，有开集 $G_0\supset E^c$，使 $m(G_0-E^c)<\frac{\varepsilon}{2}$，令 $F=G_0^c$，则 F 是闭集，$F\subset E$，且

$$m(E-F)=m(E\cap G_0)=m(G_0-E^c)<\frac{\varepsilon}{2}. \qquad (3.2.7)$$

故 $\quad m(G-F)=m[(G-E)\cup(E-F)]=m(G-E)$

$$+m(E-F)<\varepsilon.$$

"$\Leftarrow$"：据充分性假设，$\forall\varepsilon>0$，有开集 G 及闭集 F，使 $F\subset E\subset G$，且

$$m^*(E-F)\leqslant m(G-F)<\varepsilon.$$

因此，对每个自然数 i，存在闭集 $F_i\subset E$，使 $m^*(E-F_i)<\frac{1}{i}$. 令 $H=\bigcup_{i=1}^{\infty}F_i$，则 $H\in\mathscr{L}_n$ 是 F_σ 型集，$H\subset E$，且

$$m^*(E-H)\leqslant m^*(E-F_i)<\frac{1}{i}\to 0(i\to\infty).$$

所以，$E-H\in\mathscr{L}_n$. 故 $E=(E-H)\cup H\in\mathscr{L}_n$. 证毕.

定义 3.2.3 设集 $E\in\mathscr{L}_n$，且 $mE=0$，称 E 是 m-零集或零测度集.

仔细分析一下定理 3.2.9 的证明过程，便可立即得到下面三个定理：

定理 3.2.10 **设集 $E\in\mathscr{L}_n$，则有 $\mathbb{R}^n$ 中的 F_σ 型集 $H\subset E$，使 $mH=mE$.**

定理 3.2.11 **集 $E\in\mathscr{L}_n\Leftrightarrow$有 $\mathbb{R}^n$ 中的 G_δ 型集 O 及 F_σ 型集 H，使 $H\subset E\subset O$，且 $m^*(O-E)=m^*(E-H)=0$.**

定理 3.2.12 **$\mathbb{R}^n$ 中的任何可测集 E 总可表成一个 Borel 集与一个零测度集之并；同时也可表成一个 Borel 集与一个零测度集之差.**

定理 3.2.12 告诉我们，$\mathscr{L}_n$就是包含全体Borel 集和全体零测度集的"可加"集类("可加"是指这个类中任二集之并仍属此类)。

*3.2.2 Lebesgue 测度的平移不变性

对于任何一个实数 α，作$\mathbb{R}^1\to\mathbb{R}^1$ 的映射 $\tau_\alpha: x\mapsto x+\alpha$。它是直线上的一个平移变换。一个集 $E\subset\mathbb{R}^1$ 经过平移 α 后所得的集记为

$$\tau_\alpha E=\{x+\alpha \mid x\in E\}.$$

现在我们讨论在平移变换下，集的测度有什么变化。显然，当 $I=(a,b]\in\mathscr{P}_1$ 时，$\tau_\alpha I=(a+\alpha,b+\alpha]\in\mathscr{P}_1$，且$|I|=|\tau_\alpha I|=b-a$。

定理 3.2.13 $\forall$ **集** $E\subset\mathbb{R}^1$，**成立** $m^*E=m^*(\tau_\alpha E)$，**而且当** $E\in\mathscr{L}_1$ **时**，$\tau_\alpha E\in\mathscr{L}_1$。

证明 因为对任何一列 $I_i\in\mathscr{P}_1$，$E\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}I_i$，同时就有$\tau_\alpha I_i\in\mathscr{P}_1$ 以及 $\tau_\alpha E\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}(\tau_\alpha I_i)$，所以

$$m^*(\tau_\alpha E)\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}|\tau_\alpha I_i|=\sum_{i=1}^{\infty}|I_i|.$$

据外测度的定义知，$m^*(\tau_\alpha E)\leqslant m^*E$。但 $\tau_\alpha E$ 在平移 $\tau_{-\alpha}$ 后就是 E，所以 $m^*(\tau_\alpha E)\geqslant m^*E$。故 $m^*E=m^*(\tau_\alpha E)$。

若 $E\in\mathscr{L}_1$，那么，$\forall T\subset\mathbb{R}^1$，成立

$$m^*T=m^*(T\cap E)+m^*(T\cap E^c). \tag{3.2.8}$$

由于

$$\tau_\alpha(T\cap E)=\tau_\alpha T\cap\tau_\alpha E,$$

$$\tau_\alpha(T\cap E^c)=\tau_\alpha T\cap\tau_\alpha E^c=\tau_\alpha T\cap(\tau_\alpha E)^c,$$

因此从(3.2.8)式得到

$$m^*(\tau_\alpha T)=m^*(\tau_\alpha T\cap\tau_\alpha E)+m^*(\tau_\alpha T\cap(\tau_\alpha E)^c). \tag{3.2.9}$$

在(3.2.9)式中，$\tau_a T$ 是 $\mathbb{R}^1$ 中的任意集，故 $\tau_a E\in\mathscr{L}_1$. 证毕.

定理 3.2.13 说明，集 $E\subset\mathbb{R}^1$ 经平移后，它的外测度不变，而且 Lebesgue可测集经平移后仍为 Lebesgue 可测集（当然它的 Lebesgue 测度也不变）. 这个性质称为Lebesgue 测度的平移不变性.

用类似的方法可以证明 Lebesgue 测度还具有反射不变性，就是说，如果作 $\mathbb{R}^1\to\mathbb{R}^1$ 的映射 $\tau: x\mapsto -x$，它是直线上的反射变换. 集$E\subset\mathbb{R}^1$ 经反射变换后所得的集记为 $\tau E=\{-x|\ x\in E\}$. 那么，$\forall E\subset\mathbb{R}^1$，$m^*E=m^*(\tau E)$，而且当 $E\in\mathscr{L}_1$ 时，$\tau E\in\mathscr{L}_1$. 证明留为习题.

*3.2.3 不可测集

下面我们利用 Lebesgue 测度的平移不变性和 Zermelo 选择公理，在 $\mathbb{R}^1$ 中作一个不是 Lebesgue 可测的集，从而说明不可测集确实存在，而且外测度 m^*在集类 $2^{(\mathbb{R}^1)}$上没有可数可加性.

我们的想法是这样的：在 $\mathbb{R}^1$ 上作一个集 E，要求对于集 E，可取这样的一列实数 $r_1, r_2, \cdots, r_i, \cdots$，使得$E$经平移 τ_{r_i} 后得到的集 $E_i=\tau_{r_i}E$ 具有下面的性质：

1) $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}E_i$ 包含一个区间$\left(例如\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}E_i\supset[0,1]\right)$.

2) $\{E_i\}$是一列互不相交的集，而且$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}E_i$ 是有界集（例如 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}E_i\subset[-1,2]$ ）.

如果E具有这样两条性质，那么$E\overline{\in}\mathscr{L}_1$. 因为如果 $E\in\mathscr{L}_1$，据定理 3.2.13，$E_i\in\mathscr{L}_1$，且 $mE_i=mE, i=1,2,\cdots$，由于$\{E_i\}$ 是两两不交的，所以

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty} mE_i = mE+mE+mE+\cdots, \qquad (3.2.10)$$

又因为$\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$是有界集，并且它包含一个长度不为零的区间，因此由测度的单调性可知

$$0<\alpha\leqslant m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right)\leqslant\beta<+\infty. \qquad (3.2.11)$$

从(3.2.11)式及 (3.2.10) 式就发现 mE 必须等于零又必须大于零. 这个矛盾说明 $E\overline{\in}\mathscr{L}_1$.

为了下面叙述方便起见，我们先引入如下概念：

定义 3.2.4 设X是一个集，若在X的元素之间有一种关系"$\sim$"适合以下的条件：

1° 自反性：$\forall x\in X, x\sim x$;

2° 对称性：若 $x\sim y$，则 $y\sim x(x,y\in X)$;

3° 传递性：若 $x\sim y$，且 $y\sim z$，则 $x\sim z(x,y,z\in X)$，

就称"$\sim$"是X中的一个等价关系.

设"$\sim$"是集X中的一个等价关系，任取 $x\in X$，令$\bar{x}=\{y\mid y\in X, y\sim x\}$，称 $\bar{x}$ 为X中的一个等价类.

显然，X中的任意两个等价类 $\bar{x}$、$\bar{y}$，或是相同(这时 $x\sim y$)，或是互不相交，而且集X就是这些互不相交的等价类的并集.

现在我们来构造集 E，记A为 $[-1,1]$ 中全体有理数所成之集，对 $x,y\in[0,1]$，当 $x-y\in A$ 时，规定 $x\sim y$，这是$[0,1]$ 中的一个等价关系. $\forall x\in[0,1]$，令

$$E(x)=\{y\mid y\in[0,1], y\sim x\},$$

它是$[0,1]$中的一个等价类. 于是$[0,1]$被分成一族互不相交的等价类的并集，据 Zermelo选择公理，存在$[0,1]$的子集 E，它是从每

个等价类 $E(x)$ 中取一点而构成的，即 E 与每个等价类的交 $E\cap E(x)$ 是单元素集. 将 A 写成 $\{r_1, r_2, \cdots, r_i, \cdots\}$，并记 $E_i=\tau_{r_i}E=\{e+r_i \mid e\in E\}$. 我们证明这样作出的 E_i 确实具有前面所说的性质 1) 和 2).

1) 任取 $x\in[0,1]$，因为 $E\cap E(x)$ 是单元素集，设为 $\{y\}$，$y\in E$. 所以有某个 $r_{i_0}\in A$，使 $x-y=r_{i_0}$，即 $x=y+r_{i_0}\in\tau_{r_{i_0}}E=E_{i_0}$. 这说明 $[0,1]\subset\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}E_i$.

2) $E_i(i=1,2,\cdots)$ 是两两不交的，因为如果存在两个不同的自然数 i 与 j，使 $E_i\cap E_j\neq\varnothing$，设 $x\in E_i\cap E_j$，则 $x-r_i$ 与 $x-r_j$ 都属于 E. 但 $x-r_i\sim x-r_j$，由 E 的构造知，必有 $x-r_i=x-r_j$，即 $r_i=r_j$，从而 $i=j$. 这与 $i\neq j$ 矛盾. 故 $\{E_i\}$ 这一列集是互不相交的. 另外，由 $E\subset[0,1]$ 及 $r_i\in[-1,1](i=1,2,\cdots)$ 知，$E_i\subset[-1,2](i=1,2,\cdots)$，所以 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}E_i\subset[-1,2]$.

由性质 1), 2) 可知 $E\in\mathscr{L}_1$.

由此可知，定义在集类 $2^{(\mathbf{R}^1)}$ 上的外测度 m^* 不具有可数可加性. 因为 $E_i\in 2^{(\mathbf{R}^1)}(i=1,2,\cdots)$，且 $E_i(i=1,2,\cdots)$ 两两不交，如果 m^* 在 $2^{(\mathbf{R}^1)}$ 上成立可数可加性，那么

$$m^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}m^*E_i=m^*E+m^*E+m^*E+\cdots.$$

和前面所说的情况一样，将发生 m^*E 既大于零又等于零的矛盾.

现在我们把 §3.1 和 §3.2 所讨论的内容扼要地小结一下：

我们所做的工作，实际上就是寻求集函数 $m_0I=|I|(I\in\mathscr{I}_n)$ 的一种延拓，使延拓后的 m^* 成为具有非负性、可数可加性、且 $m^*\varnothing=0$ 的广义实值集函数.

为达到上述目的，我们首先在集类 $2^{(\mathbf{R}^n)}$ 上引入了外测度 m^*，

m^*是 m_0 在 $2^{(\mathbb{R}^n)}$上的延拓,即当 $I\in\mathscr{I}_n$ 时,$m^*I=m_0I=|I|$. m^*具有非负性,且 $m^*\varnothing=0$,但m^*在 $2^{(\mathbb{R}^n)}$ 上不具有可数可加性. 为此,我们又根据 Caratheodory 条件,从集类 $2^{(\mathbb{R}^n)}$ 中分出一个子集类 $\mathscr{L}_n$,即 Lebesgue 可测集类. m^*在$\mathscr{L}_n$ 上成立可数可加性,$\mathscr{L}_n$ 上的测度 m^*记为$m(m=m^*|_{\mathscr{L}_n})$. 这样,我们就把集函数 m_0 的定义范围由$\mathscr{I}_n$ 扩大到 $\mathscr{L}_n$.

习 题 3.2

1. 证明定理 3.2.3.

2. 证明:(1) Cantor 完全集 P_0 的测度为零;

 (2) $\mathbb{R}^1$ 上全体零测度集所成集类的势为 $2^{\aleph}$;

 (3) $\overline{\overline{\mathscr{L}}}_1=2^{\aleph}$.

3. 证明:$\overline{\overline{\mathscr{L}}}_n=2^{\aleph}$.

4. 证明:(1) $\overline{\overline{\mathscr{D}}}_n=\aleph$;(2) $\overline{\overline{\mathscr{I}}}_n=\aleph$;*(3) $\overline{\overline{\mathscr{B}}}_n=\aleph$.

5. 设E是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界点集,若对包含E的任何左开右闭区间 I,都有 $|I|=m^*E+m^*(I-E)$,就称E是 Lebesgue 可测的. 又设E是 $\mathbb{R}^n$ 中的无界点集,若对 $\mathbb{R}^n$ 中的任何区间 I,有界集 $I\cap E$ 都是 Lebesgue 可测的,就称 E 是 Lebesgue 可测的. 对于 Lebesgue 可测集 E,不论它有界或无界,一律称E的 Lebesgue 外测度为E的 Lebesgue 测度,记作 mE. 证明此定义与 § 3.1 定义 3.1.2 等价.

6. 证明定理 3.2.7.

7. 设 $E\subset\mathbb{R}^n$. 若存在两列可测集$\{A_i\}$,$\{B_i\}$,使得 $A_i\subset E\subset B_i(i=1,2,\cdots)$,且 $m(B_i-A_i)\to0(i\to\infty)$,则$E$可测.

8. 设 $E\in\mathscr{L}_n$,$mE<+\infty$,则 $\forall\sigma>0$,总可将 E 分解成有限个测度小于 σ 的互不相交的可测集之并.

9. 证明 $\mathbb{R}^1$ 上 Lebesgue 测度的反射不变性.

10. 设 u_θ: $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ 为

$$(x,y)\mapsto(x\cos\theta+y\sin\theta,-x\sin\theta+y\cos\theta).$$

它是平面上的一个旋转变换,而θ为旋转角,那么,$\forall E\subset\mathbb{R}^2$,成立 $m^*E=m^*(u_\theta E)$,而且当 $E\in\mathscr{L}_2$ 时,$u_\theta E\in\mathscr{L}_2$.

*§3.3 抽象测度

本节介绍抽象测度的初步知识．抽象测度理论已经成为泛函分析、概率论与数理统计等方面经常用到的基础理论，它概括了测度的最一般的特征，同时能包括种种具体测度而作为特例．由于我们是在详细讨论了 Lebesgue 测度理论的基础上介绍抽象测度理论，因而读者学习这部分的内容不但不会遇到太大的困难，反而还会加深对 Lebesgue 测度理论的理解．

3.3.1 环与环上的测度

定义 3.3.1 设 X 是一个集，$\mathscr{R}$ 是由集 X 的某些子集组成的非空集类．如果 $\forall E_1, E_2 \in \mathscr{R}$，都有 $E_1 \cup E_2 \in \mathscr{R}$，$E_1 - E_2 \in \mathscr{R}$，就称 $\mathscr{R}$ 是一个环．特别，如果又有 $X \in \mathscr{R}$，就称 $\mathscr{R}$ 是一个代数．

或者说，环就是对于并"$\cup$"、差"$-$"两种运算封闭的非空集类，

显然，空集 $\varnothing$ 是任何环 $\mathscr{R}$ 的元，因若 $E \in \mathscr{R}$，则有 $\varnothing = E - E \in \mathscr{R}$．

由于
$$E_1 \Delta E_2 = (E_1 - E_2) \cup (E_2 - E_1) \text{ 和}$$
$$E_1 \cap E_2 = (E_1 \cup E_2) - (E_1 \Delta E_2), \tag{3.3.1}$$
因此，环对于对称差和交的运算都是封闭的．

定义 3.3.2 设 $\mathscr{S}$ 是由集 X 的某些子集组成的非空集类，如果它能满足下列条件：

1) 若 $E_1, E_2 \in \mathscr{S}$，则 $E_1 - E_2 \in \mathscr{S}$；

2) 若 $E_i \in \mathscr{S} \ (i = 1, 2, \cdots)$，则 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathscr{S}$．

于是称 $\mathscr{S}$ 是一个 σ-环．如果又有 $X \in \mathscr{S}$，就称 $\mathscr{S}$ 是一个 σ-代数．

或者说，σ-环就是对于"差"及"可数并"运算封闭的非空

集类.

显然,空集$\varnothing$属于任何 σ-环,σ-环必定是环.

由于
$$\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i - \bigcup_{i=1}^{\infty}\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j - E_i\right), \tag{3.3.2}$$
因此, σ-环对于"可数交"的运算也是封闭的. 由此可知, 如果一列集$\{E_i\}$都属于一个 σ-环,那么它们的上限集与下限集也属于这个 σ-环.

例 1 设X是任意的集, X的有限子集全体所成的集类$\mathscr{E}$是一个环,当X是有限集时,$\mathscr{E}$是一个代数.

例 2 设X是任意一个无限集, X的有限子集及可数子集全体所成的集类$\mathscr{E}$是一个σ-环. 当X是可数集时, $\mathscr{E}$是一个σ-代数.

例 3 设X是任意的集, 只含一个空集的单元素类$\{\varnothing\}$是一个环;由X的一切子集组成的类2^X是一个σ-代数.

例 4 设$\mathscr{O}_n$是由$\mathscr{D}_n$中有限个左开右闭区间的并集全体所成的集类,则$\mathscr{O}_n$是一个环,但不是代数.

例 5 设$\{\mathscr{R}_\alpha \mid \alpha\in\Gamma\}$是任意一族环, 则$\bigcap\limits_{\alpha\in\Gamma}\mathscr{R}_\alpha$也是一个环.

证明 $\forall E_1, E_2\in\bigcap\limits_{\alpha\in\Gamma}\mathscr{R}_\alpha$,则$\forall\alpha\in\Gamma, E_1, E_2\in\mathscr{R}_\alpha$, 从而$E_1\cup E_2\in\mathscr{R}_\alpha, E_1-E_2\in\mathscr{R}_\alpha$, 故$E_1\cup E_2\in\bigcap\limits_{\alpha\in\Gamma}\mathscr{R}_\alpha, E_1-E_2\in\bigcap\limits_{\alpha\in\Gamma}\mathscr{R}_\alpha$. 这说明$\bigcap\limits_{\alpha\in\Gamma}\mathscr{R}_\alpha$是一个环. 证毕.

用类似的方法可以证明:任意个σ-环的交仍是个σ-环.

定义 3.3.3 设$\mathscr{E}$是由集X的某些子集所成的集类. 包含类$\mathscr{E}$的一切环的交记为$\mathscr{R}(\mathscr{E})$, 它是包含$\mathscr{E}$的最小环,称为由$\mathscr{E}$所张成的环. 包含类$\mathscr{E}$的一切σ-环的交记为$\mathscr{S}(\mathscr{E})$. 它是包含$\mathscr{E}$的最小的σ-环,称为由$\mathscr{E}$所张成的σ-环.

注 因为 2^X 是包含 $\mathscr{E}$ 的一个 σ-环，所以在定义 3.3.3 中的 $\mathscr{R}(\mathscr{E})$ 及 $\mathscr{S}(\mathscr{E})$ 均有意义.

例 6 $\mathscr{R}(\mathscr{P}_n)$ 就是例 4 中的 $\mathscr{O}_n$.

证明 因为 $\mathscr{O}_n$ 是包含 $\mathscr{P}_n$ 的一个环，而 $\mathscr{R}(\mathscr{P}_n)$ 是包含 $\mathscr{P}_n$ 的最小环，所以 $\mathscr{R}(\mathscr{P}_n)\subset\mathscr{O}_n$.

另一方面，$\forall E\in\mathscr{O}_n$，则 E 可以表成 $\mathscr{P}_n$ 中有限个元 $E_1,E_2,\cdots,E_k$ 之并，即 $E=\bigcup\limits_{i=1}^{k}E_i$，$E_1,E_2,\cdots,E_k\in\mathscr{P}_n\subset\mathscr{R}(\mathscr{P}_n)$，从而 $E\in\mathscr{R}(\mathscr{P}_n)$，即 $\mathscr{O}_n\subset\mathscr{R}(\mathscr{P}_n)$，由以上两方面知，$\mathscr{R}(\mathscr{P}_n)=\mathscr{O}_n$. 证毕.

定理 3.3.1 **设 $\mathscr{E}$ 是由集 X 的某些子集所成的集类，则由 $\mathscr{E}$ 所张成的环 $\mathscr{R}(\mathscr{E})$ 中每个元均含于 $\mathscr{E}$ 的某有限个元的并中；由 $\mathscr{E}$ 所张成的 σ-环 $\mathscr{S}(\mathscr{E})$ 中每个元均含于 $\mathscr{E}$ 的某可数个元的并中.**

证明 只证定理的前半部分，后半部分完全类似. 令

$$\mathscr{A}=\{A\mid A\subset X,A\subset\bigcup_{i=1}^{k}E_i,E_1,E_2,\cdots,E_k\in\mathscr{E},k=1,2,\cdots\}.\tag{3.3.3}$$

只要证明 $\mathscr{R}(\mathscr{E})\subset\mathscr{A}$ 即可. 因为 $\mathscr{A}\supset\mathscr{E}$ 是显然的. 所以只要证明 $\mathscr{A}$ 是环就可以了. $\forall A_1,A_2\in\mathscr{A}$，则有 $A_1\subset\bigcup\limits_{i=1}^{k}E_i^{(1)}$，$A_2\subset\bigcup\limits_{j=1}^{m}E_j^{(2)}$，$E_i^{(1)}$，$E_j^{(2)}\in\mathscr{E}$. 则 $A_1\cup A_2\subset\left(\bigcup\limits_{i=1}^{k}E_i^{(1)}\right)\cup\left(\bigcup\limits_{j=1}^{m}E_j^{(2)}\right)$，$A_1-A_2\subset\bigcup\limits_{i=1}^{k}E_i^{(1)}$，故 $A_1\cup A_2$，A_1-A_2 均属于 $\mathscr{A}$，即 $\mathscr{A}$ 是环. 证毕.

定义 3.3.4 设 X 是一个集，$\mathscr{S}$ 是由 X 的某些子集所成的 σ-环，如果 $X=\bigcup\limits_{E\in\mathscr{S}}E$，那么就称 $(X,\mathscr{S})$ 是一个可测空间. 而任何 $E\in\mathscr{S}$ 就称为可测空间 $(X,\mathscr{S})$ 中的可测集.

定义 3.3.5 设 $\mathscr{M}$ 是由集 X 的某些子集所成的类，若对于 $\mathscr{M}$ 中的任何一个单调集列 $\{E_k\}$，都有 $\lim\limits_{k\to\infty}E_k\in\mathscr{M}$，则称 $\mathscr{M}$ 为单调类.

例 7 $\mathbf{R}^n$ 中全体 Lebesgue 可测集所成的类 $\mathscr{L}_n$ 是一个单调类.

由定义 3.3.5 可直接得到如下结果:

1) 任意个单调类的交仍是一个单调类.

2) σ-环必是单调类. 单调环 (既是单调类又是个环) 必是 σ-环.

定义 3.3.6 设 $\mathscr{E}$ 是由集 X 的某些子集所成的类, 称包含 $\mathscr{E}$ 的一切单调类的交为由 $\mathscr{E}$ 所张成的单调类,记为 $\mathscr{M}(\mathscr{E})$.

注 因为 2^X 是包含 $\mathscr{E}$ 的一个单调类, 所以定义 3.3.6 中的 $\mathscr{M}(\mathscr{E})$ 有意义.

定理 3.3.2 **设 $\mathscr{E}$ 是由集 X 的子集所成的环, 则** $\mathscr{S}(\mathscr{E})=\mathscr{M}(\mathscr{E})$.

证明 因为 $\mathscr{S}(\mathscr{E})$ 是包含 $\mathscr{E}$ 的单调类, $\mathscr{M}(\mathscr{E})$ 是包含 $\mathscr{E}$ 的最小的单调类, 所以 $\mathscr{M}(\mathscr{E})\subset\mathscr{S}(\mathscr{E})$.

下面证明 $\mathscr{S}(\mathscr{E})\subset\mathscr{M}(\mathscr{E})$. 只须证明 $\mathscr{M}=\mathscr{M}(\mathscr{E})$ 为 σ- 环即可. 又因为单调环是 σ-环, 所以只要证明 $\mathscr{M}=\mathscr{M}(\mathscr{E})$ 是环就可以了. 为此,任取 $A\subset X$,作类

$$\mathscr{K}(A)=\{B\,|\,B\subset X,\text{且 }A-B,B-A,A\cup B\in\mathscr{M}\}.\tag{3.3.4}$$

那么,若 $B\in\mathscr{K}(A)$,则 $A\in\mathscr{K}(B)$. 并且, 若 $A\in\mathscr{E}$, 则 $\mathscr{K}(A)\supset\mathscr{E}$. 这是因为 $\forall B\in\mathscr{E}$,由于 $\mathscr{E}$ 是环,所以 $A-B$, $B-A$, $A\cup B$ 均属于 $\mathscr{E}$. 从而均属于 $\mathscr{M}$,故 $B\in\mathscr{K}(A)$.

今证 $\mathscr{K}(A)$ 是单调类. 在 $\mathscr{K}(A)$ 中任取一单调集列 $\{B_k\}$, 则有

$$A-B_k,B_k-A,A\cup B_k\in\mathscr{M},k=1,2,\cdots.$$

由于集列 $\{A-B_k\}$、$\{B_k-A\}$, $\{A\cup B_k\}$ 都是单调的, 而 $\mathscr{M}$ 是单调类,所以上述三个集列的极限都属于 $\mathscr{M}$. 但是

$$\lim_{k\to\infty}(A-B_k)=A-\lim_{k\to\infty}B_k,$$

$$\lim_{k\to\infty}(B_k - A) = \lim_{k\to\infty} B_k - A,$$

$$\lim_{k\to\infty}(A \cup B_k) = A \cup \lim_{k\to\infty} B_k.$$

这说明$\lim\limits_{k\to\infty} B_k \in \mathscr{K}(A)$. 因此$\mathscr{K}(A)$是单调类.

最后,我们证明 $\mathscr{M}$ 是环. 设A, $B\in\mathscr{M}$, $\forall C\in\mathscr{E}$, 由上面所证, $\mathscr{K}(C)$是包含 $\mathscr{E}$ 的单调类,所以 $\mathscr{K}(C)\supset\mathscr{M}$,从而 $A\in\mathscr{K}(C)$,故$C\in\mathscr{K}(A)$,即 $\mathscr{E}\subset\mathscr{K}(A)$. 这又说明 $\mathscr{K}(A)\supset\mathscr{M}$. 于是 $B\in\mathscr{K}(A)$,即 $A-B, B-A, A\cup B$ 均属于$\mathscr{M}$. 故$\mathscr{M}=\mathscr{M}(\mathscr{E})$为环. 证毕.

推论 3.3.3 **设 $\mathscr{E}$ 是由集X的子集所成的环, $\mathscr{M}$ 是由集X的子集所成的单调类,且$\mathscr{M}\supset\mathscr{E}$,则$\mathscr{M}\supset\mathscr{S}(\mathscr{E})$.**

证明 因$\mathscr{M}$是包含 $\mathscr{E}$ 的单调类. 故 $\mathscr{M}\supset\mathscr{M}(\mathscr{E})=\mathscr{S}(\mathscr{E})$. 证毕.

定义 3.3.7 设$\mathscr{R}$ 是由集X的某些子集所成的环(或 σ-环), $\mu: \mathscr{R}\to\hat{\mathbb{R}}$是一个广义实值集函数. 如果 μ 具有下列性质:

1) $\mu(\varnothing)=0$;

2) 非负性: $\forall E\in\mathscr{R}$, $\mu(E)\geqslant 0$;

3) 可数可加性: 对任何一列 $E_i\in\mathscr{R}$ $(i=1,2,\cdots)$, 如果 $E_i\cap E_j=\varnothing\,(i\neq j)$ 且 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}E_i\in\mathscr{R}$,就必定有

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\mu(E_i). \tag{3.3.5}$$

就称 μ 为环(或 σ-环)$\mathscr{R}$ 上的测度.

如果 μ 只满足条件 1)、3)而不满足条件 2), 就称 μ 为广义测度,今后我们只讨论测度.

容易看到, 除了取值恒为$+\infty$的广义实值集函数外, 由性质 2)、3)可推出性质 1). 因此上述关于测度的定义也可以简单地说成: 在环(或 σ-环)$\mathscr{R}$ 上定义的非负、可数可加且不恒为$+\infty$的广

义实值集函数称为$\mathscr{R}$上的测度.

例 8 设X是任意一个集，$\mathscr{R}$表示X的有限子集全体所成的环，在$\mathscr{R}$上定义实值集函数μ如下：

$$\mu(E)=E\text{ 中元素的个数}\quad(E\in\mathscr{R}).$$

这个μ是环$\mathscr{R}$上的测度.

例 9 设X是一个任意的非空集，$\mathscr{R}$表示X的所有子集所成的环，在X中任意取定一个元a，在$\mathscr{R}$上定义集函数μ如下：

$$\mu(E)=\begin{cases}0, & \text{当 } a\overline{\in}E\text{ 时};\\ 1, & \text{当 } a\in E\text{ 时},\end{cases}\qquad(E\in\mathscr{R}).$$

那么μ是环$\mathscr{R}$上的测度.

下面的定理列举了测度的一些基本性质.

定理 3.3.4 **如果μ是环$\mathscr{R}$上的测度，那么有下列性质：**

1) **有限可加性：如果$E_1,E_2,\cdots,E_k\in\mathscr{R}$，且这些集两两不交，则**

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{k}E_i\right)=\sum_{i=1}^{k}\mu(E_i).$$

2) **单调性：如果$E_1,E_2\in\mathscr{R}$，且$E_1\subset E_2$，则**

$$\mu(E_1)\leqslant\mu(E_2).$$

3) **次可数可加性：如果$E_i(i=1,2,\cdots)$及E都属于$\mathscr{R}$，且$E\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i$，则**

$$\mu(E)\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}\mu(E_i).$$

4) **如果$E_i\in\mathscr{R}$ $(i=1,2,3,\cdots)$，且$E_1\subset E_2\subset E_3\subset\cdots$，$\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\in\mathscr{R}$，则**

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\right)=\lim_{k\to\infty}\mu(E_k).$$

5) 如果 $E_i\in\mathscr{R}$ $(i=1,2,3,\cdots)$，且 $E_1\supset E_2\supset E_3\supset\cdots$，$\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}E_i\in\mathscr{R}$，而且只少有一个 E_{i_0} 使 $\mu(E_{i_0})<+\infty$，则

$$\mu\left(\bigcap_{i=1}^{\infty}E_i\right)=\lim_{k\to\infty}\mu(E_k).$$

此外，如果 $\mathscr{R}$ 本身是 σ-环，那么还有下面的性质：

6) 如果 $E_k\in\mathscr{R}$ $(k=1,2,3,\cdots)$ 则

$$\mu(\underline{\lim_{k}}E_k)\leqslant\underline{\lim_{k\to\infty}}\mu(E_k).$$

7) 如果 $E_k\in\mathscr{R}$ $(k=1,2,3,\cdots)$，而且有个自然数 k_0，使得 $\mu\left(\bigcup\limits_{k=k_0}^{\infty}E_k\right)<+\infty$，则

$$\mu(\overline{\lim_{k}}E_k)\geqslant\overline{\lim_{k\to\infty}}\mu(E_k).$$

8) 如果 $E_k\in\mathscr{R}$ $(k=1,2,3,\cdots)$，$\lim\limits_{k\to\infty}E_k$ 存在，而且有个自然数 k_0 使得 $\mu\left(\bigcup\limits_{k=k_0}^{\infty}E_k\right)<+\infty$，则

$$\mu(\lim_{k\to\infty}E_k)=\lim_{k\to\infty}\mu(E_k).$$

9) 如果 $E_k\in\mathscr{R}$ $(k=1,2,3,\cdots)$，而且有一个自然数 k_0 使得 $\sum\limits_{k=k_0}^{\infty}\mu(E_k)<+\infty$)，则

$$\mu(\overline{\lim_{k}}E_k)=0.$$

证明 以 1)、4) 为例.

1) 对于 $\mathscr{R}$ 中有限个两两不相交的元 $E_1,E_2,\cdots,E_k$，只要令 $E_{k+1}=E_{k+2}=\cdots=\varnothing$，由可数可加性及 $\mu(\varnothing)=0$ 就得到有限可加性.

4) 因为 $E_i\in\mathscr{R}$ $(i=1,2,3,\cdots)$，$E_1\subset E_2\subset E_3\subset\cdots$，记 $F_1=E_1$，$F_i=E_i-E_{i-1}(i=2,3,\cdots)$，这时 F_i 是一列两两不交的集，且

$\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$, $\bigcup_{i=1}^{k} F_i = E_k$，所以

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(F_i) = \lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{k}\mu(F_i)$$

$$= \lim_{k\to\infty}\mu\left(\bigcup_{i=1}^{k} F_i\right) = \lim_{k\to\infty}\mu(E_k). \quad \text{证毕.}$$

注 在性质 6)—9) 中，我们加上了 $\mathscr{R}$ 是 σ-环的要求，只是为了叙述简单一点，这个要求可以减弱为只要求有关的各个集都在环 $\mathscr{R}$ 中就可以了.

例 10 环 $\mathscr{O}_n$($\mathscr{O}_n = \mathscr{R}(\mathscr{P}_n)$，见例 4、例 6) 上的测度 m.

对于 $E = (a_1, b_1; a_2, b_2; \cdots; a_n, b_n] \in \mathscr{P}_n$，令

$$m(E) = |E| \quad \prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i). \tag{3.3.6}$$

显然，$\mathscr{O}_n \supset \mathscr{P}_n$，且 $\mathscr{O}_n$ 中的元 E 可以写成 $\mathscr{P}_n$ 中有限个两两不相交的元 $E_1, E_2, \cdots, E_k$ 的并集. 我们称这种把 $\mathscr{O}_n$ 中的元 E 分解成 $\mathscr{P}_n$ 中有限个互不相交的元的并集的分解为 E 的一个初等分解. E 的初等分解并不唯一.

对于 $E \in \mathscr{O}_n$，设 $E = \bigcup_{i=1}^{k} E_i$ 是 E 的一个初等分解，令

$$m(E) = \sum_{i=1}^{k} |E_i|, \tag{3.3.7}$$

则 $m(E)$ 的值只与 E 有关而与 E 的初等分解的具体形式无关，而且 m 就是环 $\mathscr{O}_n$ 上的测度.

例 11 设 $g(x)$ 是 $\mathbb{R}^1 = (-\infty, +\infty)$ 上定义的单调不减的右连续函数，在环 $\mathscr{O}_1$($\mathscr{O}_1 = \mathscr{R}(\mathscr{P}_1)$) 上定义实值集函数如下:

对于 $E\in\mathscr{O}_1$，如果 $E=\bigcup_{i=1}^{k}(a_i,b_i]$ 是 E 的一个初等分解. 就令

$$g(E)=\sum_{i=1}^{k}(g(b_i)-g(a_i)),\tag{3.3.8}$$

则 g 是环 $\mathscr{O}_1$ 上的测度.

特别地，如果 $g(x)=x$，则 g 就是环 $\mathscr{O}_1$ 上的测度 m（例 10 中 $n=1$ 的情形）.

由于这里测度的值可以是 $+\infty$，因此还需引入以下概念.

定义 3.3.8 设 $\mathscr{R}$ 是由集 X 的某些子集所成的环，μ 是 $\mathscr{R}$ 上的测度，如果 $E\in\mathscr{R}$ 使 $\mu(E)<+\infty$，则称 E 有有限测度.

如果任何 $E\in\mathscr{R}$ 都有有限测度，就称测度 μ 是有限的. 如果 $X\in\mathscr{R}$（即 $\mathscr{R}$ 是个代数）且 $\mu(X)<+\infty$，就称测度 μ 是全有限的.

定义 3.3.9 设 $\mathscr{R}$ 是由集 X 的某些子集所成的环，μ 是 $\mathscr{R}$ 上的测度. 如果 $E\in\mathscr{R}$，而且有一列 $E_i\in\mathscr{R}(i=1,2,\cdots)$，每个 E_i 都有有限测度，且 $E\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i$，那么称 E 的测度是 σ-有限的. 如果每个 $E\in\mathscr{R}$ 的测度是 σ-有限的，就说测度 μ 是 σ-有限的. 如果 $X\in\mathscr{R}$（即 $\mathscr{R}$ 是个代数）而且 X 的测度是 σ-有限的，那么就说测度 μ 是全 σ-有限的.

就本节前面所举的例子来说. 例 8 中的 μ 是有限测度. 如果例 8 中的 X 是有限集，那么 μ 是全有限的. 例 9 中的 μ 是全有限的. 例 10 中的测度 m 是有限的，但不是全有限的. 例 11 中的 g 也是有限的.

例 12 设 X 是一个集，$\mathscr{R}$ 表示 X 的所有子集所成的 σ-代数，即 $\mathscr{R}=2^X$. 对于 $E\in\mathscr{R}$，规定当 E 是无限集时 $\mu(E)=+\infty$，当 E 是有限集时 $\mu(E)$ 等于集 E 中元素的数目. 容易验证，μ 是 $\mathscr{R}$ 上的测度. 当 X 是有限集时，μ 是全有限的；当 X 是可数集时，μ 是

全 σ-有限的；而当 X 是不可数集时，μ 就不是 σ-有限的.

今后我们只限于讨论 σ-有限的测度.

定理 3.3.5 设 $\mathscr{R}$ 是集 X 的某些子集所成的环，μ_1，μ_2 是 $\mathscr{S}(\mathscr{R})$ 上的两个测度，它们在 $\mathscr{R}$ 上的限制是 σ-有限的，如果当 $E\in\mathscr{R}$ 时，$\mu_1(E)=\mu_2(E)$，那么在 $\mathscr{S}(\mathscr{R})$ 上 $\mu_1=\mu_2$.

证明 设 $E\in\mathscr{S}(\mathscr{R})$ 满足如下条件：(1) 有一列 $E_i\in\mathscr{R}$，$\mu_1(E_i)<+\infty$，使 $E\subset\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}E_i$；(2) 对一切 $A\in\mathscr{R}$，当 $\mu_1(A)<+\infty$ 时，$\mu_1(A\cap E)=\mu_2(A\cap E)$. 记这种集 E 的全体为 $\mathscr{M}$.

当 $E\in\mathscr{R}$ 时，由于 μ_1 在 $\mathscr{R}$ 上是 σ-有限的，所以 E 满足条件 (1). 又由于 μ_1，μ_2 在 $\mathscr{R}$ 上相等，所以(2)也满足. 因此 $E\in\mathscr{M}$. 即 $\mathscr{R}\subset\mathscr{M}$. 再证在 $\mathscr{M}$ 上 μ_1 与 μ_2 相等. 当 $E\in\mathscr{M}$ 时，由条件(1) 有一列 $E_i\in\mathscr{R}$，$\mu_1(E_i)<+\infty$，使 $E\subset\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}E_i$，但是我们显然可以取得 $\{E_i\}$ 使这一列集互不相交. 因此由 $E=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}(E_i\cap E)$ 和条件 (2) $\mu_1(E_i\cap E)=\mu_2(E_i\cap E)$ 就立即得到

$$\mu_1(E)=\sum_{i=1}^{\infty}\mu_1(E_i\cap E)=\sum_{i=1}^{\infty}\mu_2(E_i\cap E)=\mu_2(E).$$

我们还要证 $\mathscr{M}$ 是单调类. 设 $\{F_k\}$ 是 $\mathscr{M}$ 中的一个单调集列，由于每个 F_k 满足条件(1)，所以有 $\mathscr{R}$ 中一列集 $E_i^{(k)}$ 使 $\mu_1(E_i^{(k)})<+\infty$. 且 $F_k\subset\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}E_i^{(k)}$. 因此 $\lim\limits_{k\to\infty}F_k\subset\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}E_i^{(k)}$，即 $\lim\limits_{k\to\infty}F_k$ 满足条件(1). 又由于当 $A\in\mathscr{R}$，$\mu_1(A)<+\infty$ 时，$\mu_1(A\cap F_k)=\mu_2(A\cap F_k)$. 由定理 3.3.4 的 4) 和 5) 以及 $\mu_1(A)<+\infty$，有

$$\begin{aligned}\mu_1(A\cap\lim_{k\to\infty}F_k)&=\lim_{k\to\infty}\mu_1(A\cap F_k)=\lim_{k\to\infty}\mu_2(A\cap F_k)\\&=\mu_2(A\cap\lim_{k\to\infty}F_k).\end{aligned}$$

因此 $\lim_{k\to\infty}F_k\in\mathscr{M}$，这说明 $\mathscr{M}$ 是单调类．再由推论 3.3.3 知，$\mathscr{M}\supset\mathscr{S}(\mathscr{R})$，故在 $\mathscr{S}(\mathscr{R})$ 上 $\mu_1=\mu_2$．证毕．

定义 3.3.10 设$(X,\mathscr{S})$是一可测空间，μ 是 $\mathscr{S}$ 上的一个测度，那么称$(X,\mathscr{S},\mu)$是一测度空间．有时简称X是测度空间．如果$(X,\mathscr{S},\mu)$是测度空间，而且 μ 是 $\mathscr{S}$ 上的有限（全有限，σ-有限，全 σ-有限）测度，那么就称这个测度空间是有限（全有限，σ-有限，全 σ-有限）的．

3.3.2 外测度

为了将测度的概念从环扩张到更为广泛的集类上去，我们还必须引入外测度的概念．为此，先建立一个引理．

设 $\mathscr{R}$ 是由集X的某些子集所成的环，下面引进一个包含 $\mathscr{R}$ 的 σ-环．我们用记号 $\mathscr{H}(\mathscr{R})$ 表示能用$\mathscr{R}$ 中一列元素加以覆盖的X的子集全体所成的集类．就是说

$$\mathscr{H}(\mathscr{R})=\{E\mid E\subset X,\text{存在 } E_i\in\mathscr{R}\ (i=1,2,\cdots)\text{使 } E\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\}. \tag{3.3.9}$$

例 13 设X是任意的集，$\mathscr{R}$ 表示X的有限子集全体所成的环，那么 $\mathscr{H}(\mathscr{R})$就是X的有限或可数子集全体所成的集类．

例 14 对于环$\mathscr{O}_n(\mathscr{O}_n=\mathscr{R}(\mathscr{P}_n))$，$\mathscr{H}(\mathscr{O}_n)=2^{(\mathbf{R}^n)}$．

引理 3.3.6 设 $\mathscr{R}$ 是由集X的某些子集所成的环，则必有

1) $\mathscr{R}\subset\mathscr{H}(\mathscr{R})$；

2) **当** $E\in\mathscr{H}(\mathscr{R})$**时，**$E$ **的任何子集** F **也属于**$\mathscr{H}(\mathscr{R})$；

3) $\mathscr{H}(\mathscr{R})$**是** σ**-环．**

证明 引理的前两条结论是显然的．今要证明 $\mathscr{H}(\mathscr{R})$是 σ-环，也就是只要再证 $\mathscr{H}(\mathscr{R})$对可数并的运算是封闭的即可．

设 $E_i\in\mathscr{H}(\mathscr{R})\ (i=1,2,\cdots)$，则对于每个 E_i，有一列 $E_i^{(j)}\in\mathscr{R}$

$(j=1,2,\cdots)$，使 $E_i\subset\bigcup\limits_{j=1}^{\infty}E_i^{(j)}$. 从而 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}E_i\subset\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}\bigcup\limits_{j=1}^{\infty}E_i^{(j)}$，其中 $E_i^{(j)}(i,j=1,2,\cdots)$ 是 $\mathscr{R}$ 中的一列元素. 因此 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}E_i\in\mathscr{H}(\mathscr{R})$. 证毕.

定义 3.3.11 设 μ 是环 $\mathscr{R}$ 上的测度，$\forall E\in\mathscr{H}(\mathscr{R})$，作广义实值集函数

$$\mu^*(E)=\inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty}\mu(E_i)\ \middle|\ E_i\in\mathscr{R}\text{ 且 }E\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\right\}. \tag{3.3.10}$$

μ^* 称为由测度 μ 所引出的外测度.

定理 3.3.7 **由环 $\mathscr{R}$ 上的测度 μ 所引出的外测度 μ^* 有下列性质:**

1) **非负性:** $\forall E\in\mathscr{H}(\mathscr{R})$，$\mu^*(E)\geqslant 0$;

2) **单调性:** **如果** E_1，$E_2\in\mathscr{H}(\mathscr{R})$ **且** $E_1\subset E_2$，**则** $\mu^*(E_1)\leqslant\mu^*(E_2)$;

3) **次可数可加性: 对任何一列** $E_i\in\mathscr{H}(\mathscr{R})(i=1,2,\cdots)$，**成立不等式**

$$\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\right)\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}\mu^*(E_i). \tag{3.3.11}$$

证明 1)和2)从 μ^* 的定义可直接得到. 3)的证明留为习题.

定理 3.3.8 **设 μ^* 是由环 $\mathscr{R}$ 上的测度 μ 所引出的外测度，则** $\forall E\in\mathscr{R}$，$\mu^*(E)=\mu(E)$.

证明留为习题.

3.3.3 测度的延拓

根据环 $\mathscr{R}$ 上的测度 μ 引出的 $\mathscr{H}(\mathscr{R})$ 上的外测度 μ^* 是 μ 的

延拓，但 μ^* 在$\mathscr{H}(\mathscr{R})$上不具有可数可加性(见§3.2不可测集一例)，于是我们自然希望从 $\mathscr{H}(\mathscr{R})$中分出一个子类 $\mathscr{R}^*$(要求 $\mathscr{R}^*$ 包含 $\mathscr{R}$ 且不等于 $\mathscr{R}$)，使 μ^* 在 $\mathscr{R}^*$ 上成立可数可加性. 这就启发我们引入下面的定义.

定义 3.3.12 设 μ 是环 $\mathscr{R}$ 上的测度，μ^* 是由测度 μ 所引出的外测度，$E\in\mathscr{H}(\mathscr{R})$. 如果 $\forall F\in\mathscr{H}(\mathscr{R})$都成立

$$\mu^*(F)=\mu^*(F\cap E)+\mu^*(F-E), \qquad (3.3.12)$$

就称 E 是 μ^*-可测集. μ^*-可测集全体记为 $\mathscr{R}^*$.

引理 3.3.9 设 $\mathscr{R}$ 是由 X 的某些子集所成的环，则 $\mathscr{R}\subset\mathscr{R}^*$.

证明 设 $E\in\mathscr{R}, F\in\mathscr{H}(\mathscr{R}), \varepsilon>0$，$\mu^*$是由环$\mathscr{R}$上的测度$\mu$所引出的外测度，则由 μ^* 的定义，存在一列集 $E_i\in\mathscr{R}$ $(i=1,2,\cdots)$，使 $F\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i$，并且

$$\mu^*(F)+\varepsilon\geqslant\sum_{i=1}^{\infty}\mu(E_i)=\sum_{i=1}^{\infty}[\mu(E_i\cap E)+\mu(E_i-E)]$$
$$\geqslant\mu^*(F\cap E)+\mu^*(F-E).$$

由于上式对任意的正数 ε 成立，因此 E 是 μ^*-可测集，故 $\mathscr{R}\subset\mathscr{R}^*$.

引理 3.3.10 μ^*-可测集全体 $\mathscr{R}^*$ 是一个环.

证明 用证明定理 3.1.4—定理 3.1.8 的步骤及方法即可证明.

引理 3.3.11 如果 $E\in\mathscr{H}(\mathscr{R})$ 且 $\mu^*(E)=0$，则 $E\in\mathscr{R}^*$.

证明 $\forall F\in\mathscr{H}(\mathscr{R})$，由外测度的单调性、非负性及次可加性可知

$$\mu^*(F-E)\leqslant\mu^*(F)\leqslant\mu^*(F\cap E)+\mu^*(F-E)=\mu^*(F-E).$$

所以 $\mu^*(F)=\mu^*(F\cap E)+\mu^*(F-E)$，因此 $E\in\mathscr{R}^*$. 证毕.

定义 3.3.13 设μ是环$\mathscr{R}$上的测度，$E\in\mathscr{R}$，如果$\mu(E)=0$，就称E是μ-零集，简称为零集.

显然，μ-零集的子集如果也属于$\mathscr{R}$就必然也是零集. 但是对一般环$\mathscr{R}$上的测度μ，μ-零集的子集不一定属于$\mathscr{R}$.

例如，设X是一集，$\mathscr{R}=\{X,\varnothing\}$，这是一个环，令$\mu(X)=\mu(\varnothing)=0$，则$\mu$是环$\mathscr{R}$上的测度. 当$X$至少有两个元素时，$X$的真子集不属于$\mathscr{R}$. 因此有必要引入下面的概念.

定义 3.3.14 设μ是环$\mathscr{R}$上的测度，如果$\mathscr{R}$中任何μ-零集的任何子集都必定属于$\mathscr{R}$，那么称μ是一个完全测度. 当$(X,\mathscr{R})$是可测空间，μ是$(X,\mathscr{R})$上的完全测度时，称$(X,\mathscr{R},\mu)$是完全测度空间.

定理 3.3.12 **μ^*-可测集全体$\mathscr{R}^*$是一个σ-环，而且μ^*是$\mathscr{R}^*$上的完全测度.**

证明 用类似于证明定理 3.1.10 和推论 3.1.11 的方法就可证明$\mathscr{R}^*$是一个σ-环，而且μ^*是$\mathscr{R}^*$上的测度. 再由引理3.3.11知，μ^*是$\mathscr{R}^*$上的完全测度.

由于$\mathscr{R}^*\supset\mathscr{R}$，$\mathscr{R}^*$是$\sigma$-环，所以$\mathscr{R}^*\supset\mathscr{S}(\mathscr{R})\supset\mathscr{R}$.

一般地，设X是任意全集，$\mathscr{R}$是由X的某些子集所成的环，由$\mathscr{R}$所张成的σ-环$\mathscr{S}(\mathscr{R})$常称为X中的Borel 集类.

关于$\mathscr{R}^*$与$\mathscr{S}(\mathscr{R})$的关系，有下面的定理：

定理 3.3.13 **设μ是环$\mathscr{R}$上的σ-有限测度，那么$\mathscr{R}^*$中的集必可表示成$\mathscr{S}(\mathscr{R})$中的集与一个μ^*-零集之并；同时也可表示成$\mathscr{S}(\mathscr{R})$中的集与一个μ^*-零集之差.**

证明留为习题.

定义 3.3.15 设μ是环$\mathscr{R}$上的一个测度，$\mathscr{S}$为包含$\mathscr{R}$的任一σ-环. 若存在$\mathscr{S}$上的测度$\bar{\mu}$，使对每个$E\in\mathscr{R}$有$\bar{\mu}(E)=\mu(E)$，则称$\bar{\mu}$是μ在$\mathscr{S}$上的一个延拓(或扩张).

例如，σ-环$\mathscr{R}^*$上的测度μ^*是环$\mathscr{R}$上的测度μ在$\mathscr{R}^*$上的延拓.

由定理 3.3.5 可知，如果μ是环$\mathscr{R}$上的σ-有限测度，则μ在σ-环$\mathscr{S}(\mathscr{R})$上的延拓是唯一的.

例 15 设m是按例10中的方法在环$\mathscr{O}_n$($\mathscr{O}_n=\mathscr{R}(\mathscr{P}_n)$)上定义的测度. 由于$\mathscr{H}(\mathscr{O}_n)=2^{(\mathbf{R}^n)}$(见例14)，所以由$m$所引出的外测度$m^*$(见定义3.3.11)与§3.1所定义的 Lebesgue 外测度m^*(见定义 3.1.1)相一致. m^*-可测集就是$\mathbf{R}^n$中的 Lebesgue 可测集，m^*-可测集全体$\mathscr{O}_n^*$就是$\mathbf{R}^n$中的 Lebesgue 可测集全体$\mathscr{L}_n$. 由环$\mathscr{O}_n$所张成的σ-环$\mathscr{S}(\mathscr{O}_n)$就是$\mathbf{R}^n$中的 Borel 集全体$\mathscr{B}_n$. 将$\mathscr{O}_n^*$($\mathscr{O}_n^*=\mathscr{L}_n$)上的测度$m^*$仍记为$m$，则$(\mathbf{R}^n, \mathscr{L}_n, m)$就称为($n$维)Lebesgue 测度空间.

例 16 设g是按例11中的方法在环$\mathscr{O}_1$($\mathscr{O}_1=\mathscr{R}(\mathscr{P}_1)$)上定义的测度. 由$g$引出外测度$g^*$，$g^*$-可测集称为 Lebesgue-Stieltjes 可测集，简称 L-S 可测集，g^*-可测集全体所成的集类称为 Lebesgue-Stieltjes 可测集类，简称 L-S 可测集类，这种测度称为 Lebesgue-Stieltjes 测度，简称 L-S 测度. 特别地，当例 11 中的$g(x)=x$($x\in(-\infty, +\infty)$)时，这种测度就是$\mathbf{R}^1$中的 Lebesgue 测度.

现在我们把本节讨论的内容扼要地小结一下：

我们从集X的某些子集所成的环$\mathscr{R}$，以及环$\mathscr{R}$上的测度μ出发，首先根据环$\mathscr{R}$作集类$\mathscr{H}(\mathscr{R})$，它是包含$\mathscr{R}$的一个σ-环. 然后在$\mathscr{H}(\mathscr{R})$上作出由测度μ引出的外测度μ^*，μ^*是μ在$\mathscr{H}(\mathscr{R})$上的延拓. μ^*具有测度的一部分性质，但μ^*在$\mathscr{H}(\mathscr{R})$上不具有可数可加性. 为此，我们又根据 Carathéodory 条件，从$\mathscr{H}(\mathscr{R})$中分出了一类集，即μ^*-可测集，μ^*-可测集全体$\mathscr{R}^*$是一个包含$\mathscr{R}$的σ-环，而且μ^*是$\mathscr{R}^*$上的完全测度.

今后我们凡遇到环$\mathscr{R}$上的测度μ时，总是立即把它延拓成为$\mathscr{R}^*$上的测度μ^*. 在不致发生混淆的时候，$\mathscr{R}^*$上的测度μ^*仍用记号μ来表示，这样，就把μ的定义范围由环$\mathscr{R}$扩大到$\mathscr{R}^*$.

习 题 3.3

1. 证明定理 3.3.4 的 2)、3)、5)、6)、7)、8)、9).
2. 证明例 10 中的m是环$\mathscr{O}_n(\mathscr{O}_n=\mathscr{R}(\mathscr{P}_n))$上的测度.
3. 证明例 11 中的g是环$\mathscr{O}_1(\mathscr{O}_1=\mathscr{R}(\mathscr{P}_1))$上的测度.
4. 证明定理 3.3.7 的 3)和定理 3.3.8.
5. 证明定理 3.3.13.

§3.4 乘 积 测 度

本节讨论$p(p\in\mathrm{N})$维欧几里得空间R^p与$q(q\in\mathrm{N})$维欧几里得空间R^q中的 Lebesgue 可测集和$p+q$维欧几里得空间R^{p+q}中的 Lebesgue 可测集之间的关系问题. 为此，先引入下列概念和术语:

定义 3.4.1 设X,Y是任意两个集合. 称集合

$$X\times Y=\{(x,y)\mid x\in X,y\in Y\}$$

为X和Y的乘积.

特别地，当X是p维欧几里得空间R^p, Y是q维欧几里得空间R^q时，称

$$X\times Y=\mathrm{R}^p\times\mathrm{R}^q=\{(x,y)\mid x\in\mathrm{R}^p,y\in\mathrm{R}^q\}$$

为R^p和R^q的乘积空间.

设$A\subset\mathrm{R}^p$, $B\subset\mathrm{R}^q$，称$A\times B$是$\mathrm{R}^p\times\mathrm{R}^q$中的矩形，$A$、$B$称为矩形$A\times B$的边.

显然，$\mathrm{R}^p\times\mathrm{R}^q=\mathrm{R}^{p+q}$.

例如，二维空间R^2就可看作一维空间R^1和R^1的乘积，即

$$\mathbb{R}^2=\mathbb{R}^1\times\mathbb{R}^1.$$

乘积空间$\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q$中的矩形具有以下性质：

引理 3.4.1 1) $A\times B=\varnothing\Leftrightarrow A=\varnothing$或 $B=\varnothing$.

2) 设$A_1\times B_1$与$A_2\times B_2$都是非空矩形，则

$$A_1\times B_1\subset A_2\times B_2\Leftrightarrow A_1\subset A_2, B_1\subset B_2.$$

特别地，
$$A_1\times B_1=A_2\times B_2\Leftrightarrow A_1=A_2, B_1=B_2.$$

3) 若 $A=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$, $B=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}B_i$，则

$$A\times B=\bigcup_{i=1}^{\infty}\bigcup_{j=1}^{\infty}(A_i\times B_j),$$

且当 $A_i\cap A_j=\varnothing, B_i\cap B_j=\varnothing(i\neq j)$时，则

$$(A_i\times B_j)\cap(A_{i'}\times B_{j'})=\varnothing(i\neq i'\text{或}j\neq j').$$

4) 若 $A=\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i$, $B=\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}B_i$，则 $A\times B=\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}(A_i\times B_i)$.

证明 以 4) 为例. $\forall(x,y)\in A\times B$，则 $x\in A, y\in B$，于是 $x\in A_i$, $y\in B_i(i=1,2,\cdots)$，从而$(x,y)\in\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}(A_i\times B_i)$，即 $A\times B\subset\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}(A_i\times B_i)$.

另一方面，$\forall(x,y)\in\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}(A_i\times B_i)$，则$(x,y)\in A_i\times B_i(i=1,2,\cdots)$，于是 $x\in A_i, y\in B_i(i=1,2,\cdots)$，从而 $x\in A$, $y\in B$，即$(x,y)\in A\times B$，这又说明$\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}(A_i\times B_i)\subset A\times B$. 因此，$A\times B=\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}(A_i\times B_i)$. 证毕.

定义 3.4.2 设$E\subset\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q$, $x\in\mathbb{R}^p$，称集合

$$E_x=\{y\mid(x,y)\in E\}$$

为E的 x 截口. 又设 $y\in\mathbb{R}^q$，称集合

$$E_y=\{x\mid(x,y)\in E\}$$

为E的y截口.

显然,E_x是$\mathbf{R}^q$的子集,E_y是$\mathbf{R}^p$的子集.

截口有以下性质:

引理 3.4.2 1) 设$E\subset F\subset \mathbf{R}^p\times\mathbf{R}^q$,则$\forall x\in\mathbf{R}^p$,有$E_x\subset F_x$.

2) 设$E,F\subset\mathbf{R}^p\times\mathbf{R}^q$,$E\cap F=\varnothing$,则$\forall x\in\mathbf{R}^p$,有$E_x\cap F_x=\varnothing$.

3) 设$E=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}E_i\subset\mathbf{R}^p\times\mathbf{R}^q$,则$\forall x\in\mathbf{R}^p$,有$E_x=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}(E_i)_x$.

4) 设$E=\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}E_i\subset\mathbf{R}^p\times\mathbf{R}^q$,则$\forall x\in\mathbf{R}^p$,有$E_x=\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}(E_i)_x$.

证明 以1)为例. 不妨设$E_x=\{y\mid(x,y)\in E\}\neq\varnothing(x\in\mathbf{R}^p)$. $\forall y\in E_x$,则$(x,y)\in E$,从而$(x,y)\in F$,即$y\in F_x$,故$E_x\subset F_x$.

定义 3.4.3 设$\Pi(x)$是与集合E中的点x有关的一个命题. 若E中使$\Pi(x)$不成立的点x的全体是一个零测度集,就称命题$\Pi(x)$在E上几乎处处成立,记作$\Pi(x)$a. e. 于E(当E不说自明时可简记作$\Pi(x)$a. e.).

例如,$|\mathrm{tg}\,x|<+\infty$a. e. 于$\mathbf{R}^1=(-\infty,+\infty)$.

又如,$[0,1]$上的Cantor完全集P_0的特征函数$\chi_{P_0}(x)=0$ a. e. 于$[0,1]$.

定理 3.4.3 设$A\in\mathscr{L}_p$,$B\in\mathscr{L}_q$,则$A\times B\in\mathscr{L}_{p+q}$,且

$$m(A\times B)=mA\cdot mB.$$

证明 (一)当A和B都是有界时,分以下五步进行讨论:

1° 当A和B都是左开右闭区间时,则$A\times B$就是$\mathbf{R}^{p+q}$中的左开右闭区间,因而可测. 即$A\times B\in\mathscr{L}_{p+q}$,且

$$m(A\times B)=|A\times B|=|A|\cdot|B|=mA\cdot mB.$$

2° 当A和B都是开集时,因任何开集均可表为可数个互不相交的左开右闭区间之并. 所以,设

$$A=\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i,\quad B=\bigcup_{i=1}^{\infty}B_i,A_i\cap A_j=\varnothing,$$

$$B_i\cap B_j=\varnothing\,(i\neq j),\ A_i\in\mathscr{P}_p,\ B_i\in\mathscr{P}_q,\ (i=1,2,\cdots).$$

据引理 3.4.1 的3)，则

$$A\times B=\bigcup_{i=1}^{\infty}\bigcup_{j=1}^{\infty}(A_i\times B_j),$$

且 $\quad (A_i\times B_j)\cap(A_{i'}\times B_{j'})=\varnothing\quad (i\neq i',\text{或}j\neq j')$.

又据 1°，$A_i\times B_j$ 可测，且 $m(A_i\times B_j)=mA_i\cdot mB_j(i,\ j=1,2,\cdots)$，所以，$A\times B$ 可测，即 $A\times B\in\mathscr{L}_{p+q}$，且

$$\begin{aligned}m(A\times B)&=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}m(A_i\times B_j)=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}(mA_i\cdot mB_j)\\&=\sum_{i=1}^{\infty}\left[mA_i\left(\sum_{j=1}^{\infty}mB_j\right)\right]=\left(\sum_{i=1}^{\infty}mA_i\right)\cdot\left(\sum_{j=1}^{\infty}mB_j\right)\\&=mA\cdot mB.\end{aligned}$$

3° 当 A,B 是 G_δ 型集时，据定理3.2.6之注，可设 $A=\bigcap_{n=1}^{\infty}G_n$，$B=\bigcap_{n=1}^{\infty}G_n^*$，其中 $G_n,G_n^*(n=1,2,\cdots)$ 是有界开集，且

$$G_1\supset G_2\supset\cdots\supset G_n\supset\cdots,$$
$$G_1^*\supset G_2^*\supset\cdots\supset G_n^*\supset\cdots.$$

据引理3.4.1 的2)，则

$$G_1\times G_1^*\supset G_2\times G_2^*\supset\cdots\supset G_n\times G_n^*\supset\cdots,$$

且 $G_n\times G_n^*(n=1,2,\cdots)$ 有界，再据引理 3.4.1 的 4)，则

$$A\times B=\bigcap_{n=1}^{\infty}(G_n\times G_n^*)=\lim_{n\to\infty}(G_n\times G_n^*).$$

由2°知，$G_n\times G_n^*$ 可测，且

$$m(G_n\times G_n^*)=mG_n\cdot mG_n^*\,(n=1,2,\cdots).$$

据定理 3.1.13 和定理 3.1.15（上连续性），则 $A\times B$ 可测，即 $A\times B\in\mathscr{L}_{p+q}$，且

$$m(A\times B)=\lim_{n\to\infty}m(G_n\times G_n^*)=\lim_{n\to\infty}(mG_n\cdot mG_n^*)$$
$$=(\lim_{n\to\infty}mG_n)\cdot(\lim_{n\to\infty}mG_n^*)=mA\cdot mB.$$

4° 当A和B中至少有一个是零测度集时，不妨设$mA=0$，据定理3.1.2，$\forall\varepsilon>0$及正数1，有开集G和G^*，$G\supset A$，$G^*\supset B$，使$mG<mA+\varepsilon=\varepsilon$，$mG^*<mB+1$，于是
$$m^*(A\times B)\leqslant m^*(G\times G^*)=m(G\times G^*)=mG\cdot mG^*<\varepsilon(mB+1).$$
由$\varepsilon>0$的任意性知，$m^*(A\times B)=0$，故$A\times B$可测，即$A\times B\in\mathscr{L}_{p+q}$，且
$$m(A\times B)=0=mA\cdot mB.$$

5° 当A和B是任意有界可测集时，据定理3.2.6及其注和推论3.1.12，存在有界的G_δ型集A^*和B^*，使$A^*\supset A$，$B^*\supset B$，$mA^*=mA$，$mB^*=mB$，且$m(A^*-A)=m(B^*-B)=0$。据引理3.4.1的3)，则
$$A^*\times B^*=[(A^*-A)\cup A]\times[(B^*-B)\cup B]$$
$$=[(A^*-A)\times(B^*-B)]\cup[(A^*-A)\times B]$$
$$\cup[A\times(B^*-B)]\cup(A\times B).$$
上式右端之集互不相交. 由3°及4°知，$A^*\times B^*$及等式右端前三集皆可测，故$A\times B$可测，即$A\times B\in\mathscr{L}_{p+q}$，且
$$m(A^*\times B^*)=m[(A^*-A)\times(B^*-B)]+m[(A^*-A)\times B]$$
$$+m[A\times(B^*-B)]+m(A\times B)$$
$$=m(A\times B).$$
由3°知，
$$m(A^*\times B^*)=mA^*\cdot mB^*=mA\cdot mB.$$
故$m(A\times B)=mA\cdot mB$.

总之，当A和B都有界时，定理成立.

(二) 当A和B都是任意可测集时，不论A，B是否有界，据引

理 3.2.8，我们总可以将A,B分别表为可数个互不相交的有界可测集之并：

$$A=\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i,\ B=\bigcup_{i=1}^{\infty}B_i, A_i\cap A_j=\varnothing, B_i\cap B_j=\varnothing(i\neq j),$$

且 $A_i,B_i(i=1,2,\cdots)$都有界可测，据引理 3.4.1 的 3)，则

$$A\times B=\bigcup_{i=1}^{\infty}\bigcup_{j=1}^{\infty}(A_i\times B_j), 且 (A_i\times B_j)\cap(A_{i'}\times B_{j'})=\varnothing$$

$$(i\neq i'或j\neq j').$$

据(一)，$A_i\times B_j$可测，且

$$m(A_i\times B_j)=mA_i\cdot mB_j(i,j=1,2,\cdots).$$

所以，$A\times B$可测，即$A\times B\in\mathscr{L}_{p+q}$，且

$$\begin{aligned}m(A\times B)&=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}m(A_i\times B_j)=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}(mA_i\cdot mB_j)\\&=\left(\sum_{i=1}^{\infty}mA_i\right)\cdot\left(\sum_{j=1}^{\infty}mB_j\right)\\&=mA\cdot mB.\end{aligned}$$

证毕.

定理 3.4.4 若 $E\subset\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q$ 之测度为零，则 $mE_x=0$ a.e. 于$\mathbb{R}^p$.

证明 因为

$$\{x\,|\,x\in\mathbb{R}^p, m^*E_x>0\}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\left\{x\,|\,x\in\mathbb{R}^p,\ m^*E_x>\frac{1}{n}\right\},$$

所以，只要证明

$$\forall\delta>0, B=\{x\,|\,x\in\mathbb{R}^p, m^*E_x>\delta\}$$

的外测度为零即可．因集E可测，据定理 3.1.2，$\forall\varepsilon>0$，存在开集$G\supset E$，使$mG<mE+\varepsilon=\varepsilon$．因 $G\subset\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q$为开集，据定理 2.1.2，可将$G$表为可数个互不相交的左开右闭区间$I_i(i=1,2,\cdots)$之并：

$$G=\bigcup_{i=1}^{\infty} I_i,\ \text{其中} I_i=\Delta_i'\times\Delta_i''\subset \mathbf{R}^p\times\mathbf{R}^q,\ i=1,2,\cdots.$$

令$G_n=\bigcup\limits_{i=1}^{n} I_i, n=1,2,\cdots$. 则 $G_n(n=1,2,\cdots)$可测，且对任意固定的自然数 n，我们总可以适当地将诸 $I_i(i=1,2,\cdots,n)$分解成为有限个更小的互不相交的左开右闭区间，使

$$G_n=\bigcup_{k=1}^{m_n} I_k^{(n)}=\bigcup_{k=1}^{m_n}(\Delta_k^{(n)'}\times\Delta_k^{(n)''}),$$

且使$\{\Delta_k^{(n)'}\}$及$\{\Delta_k^{(n)''}\}$$(k=1,2,\cdots,m_n)$中任意两个区

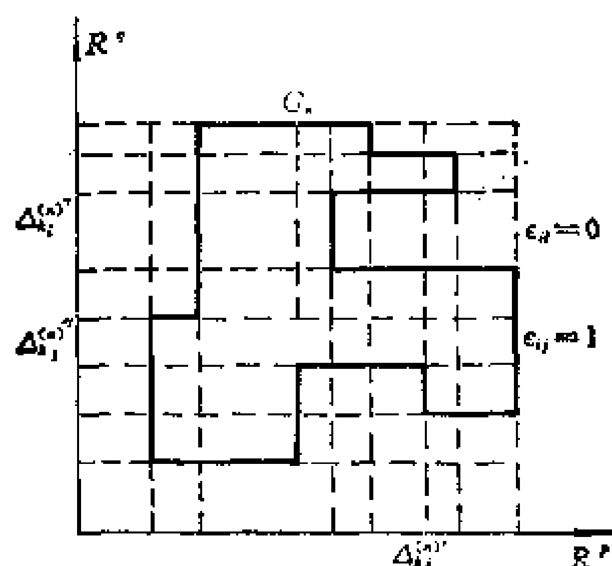


图 3.4.1

间或者不相交，或者完全重合（如图 3.4.1 所示）. 设$\{\Delta_k^{(n)'}\}$及$\{\Delta_k^{(n)''}\}$$(k=1,2,\cdots,m_n)$中彼此互不相交的区间分别是

$$\Delta_{k_i}^{(n)'},\ i=1,2,\cdots,r_n,\ \text{其中} r_n\leqslant m_n,$$

且

$$\bigcup_{i=1}^{r_n}\Delta_{k_i}^{(n)'}=\bigcup_{k=1}^{m_n}\Delta_k^{(n)'};$$

$\Delta_{kj}^{(n)''}$, $j=1,2,\cdots,t_n$，其中 $t_n\leqslant m_n$，且 $\bigcup_{j=1}^{t_n}\Delta_{kj}^{(n)''}=\bigcup_{k=1}^{m_n}\Delta_k^{(n)''}$.

则 $$(G_n)_x=\bigcup_{\substack{x\in\Delta_{k_i}^{(n)'}\\ \Delta_{k_i}^{(n)'}\times\Delta_{kj}^{(n)''}\subset G_n}}\Delta_{kj}^{(n)''}.$$

所以 $\forall x\in\mathbb{R}^p$，$(G_n)_x$ 可测，且当 $x\in\Delta_{k_i}^{(n)'}$ 时，

$$m(G_n)_x=\sum_{j=1}^{t_n}\varepsilon_{ij}|\Delta_{kj}^{(n)''}|,$$

其中
$$\varepsilon_{ij}=\begin{cases}1, & \text{当}\Delta_{k_i}^{(n)'}\times\Delta_{kj}^{(n)''}\subset G_n\text{时},\\ 0, & \text{其它情形}.\end{cases}$$

令 $A_n=\{x\,|\,x\in\mathbb{R}^p, m(G_n)_x>\delta\}$，则 A_n 可测，且 $A_n\subset A_{n+1}$，从而

$$A=\{x\,|\,x\in\mathbb{R}^p, mG_x>\delta\}=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$$

也可测，由定理3.1.14(下连续性)知，$mA=\lim\limits_{n\to\infty}mA_n$．于是，对任意固定的自然数 n，有

$$\begin{aligned}\varepsilon>mG\geqslant mG_n&=\sum_{k=1}^{m_n}|I_k^{(n)}|=\sum_{k=1}^{m_n}(|\Delta_k^{(n)'}|\cdot|\Delta_k^{(n)''}|)\\
&=\sum_{i=1}^{r_n}\sum_{j=1}^{t_n}\varepsilon_{ij}|\Delta_{k_i}^{(n)'}|\cdot|\Delta_{kj}^{(n)''}|\\
&=\sum_{i=1}^{r_n}|\Delta_{k_i}^{(n)'}|\left(\sum_{j=1}^{t_n}\varepsilon_{ij}|\Delta_{kj}^{(n)''}|\right)\\
&\geqslant\sum_{\Delta_{k_i}^{(n)'}\subset A_n}|\Delta_{k_i}^{(n)'}|\left(\sum_{j=1}^{t_n}\varepsilon_{ij}|\Delta_{kj}^{(n)''}|\right)\\
&>\delta\left(\sum_{\Delta_{k_i}^{(n)'}\subset A_n}|\Delta_{k_i}^{(n)'}|\right)=\delta(mA_n).\end{aligned}$$

对上式令 $n\to\infty$ 取极限，得 $\varepsilon\geqslant\delta(mA)$.

又因为 $G\supset E$，所以 $G_x\supset E_x$，$mG_x\geqslant m^*E_x$，从而 $A\supset B$，$mA\geqslant m^*B$，因此，$\varepsilon\geqslant\delta(m^*B)$，由 $\varepsilon>0$ 的任意性知，$m^*B=0$. 证毕.

注 1 在定理 3.4.4 的证明中，我们对 $G_x(x\in\mathbb{R}^p)$ 的可测性没有证明. 其实由 $G_x=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(G_n)_x$ 便知，$\forall x\in\mathbb{R}^p$，$G_x\in\mathscr{L}_q$. 因此，对 $\mathbf{R}^p\times\mathbf{R}^q$ 中之任何开集 G 及 $\forall x\in\mathbb{R}^p$，都有 $G_x\in\mathscr{L}_q$.

注 2 把定理3.4.4的结论中的"x"换成"y"，"$\mathbf{R}^p$"换成"$\mathbf{R}^q$"，所得结论仍然成立.

定理 3.4.5 **若 $E\subset\mathbf{R}^p\times\mathbf{R}^q$ 是可测集，则 $E_x\in\mathscr{L}_q$ a.e. 于 $\mathbf{R}^p$.**

证明 分以下三步进行讨论:

1° 当 E 是 G_δ 型集时，设 $E=\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}G_i$，$G_i$ 为开集，据引理 3.4.2 的 4)，$\forall x\in\mathbb{R}^p$，有 $E_x=\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}(G_i)_x$，再由定理3.4.4的注 1，知 $E_x\in\mathscr{L}_q$ $(\forall x\in\mathbb{R}^p)$.

2° 当 E 是零测度集时，据定理3.4.4，$mE_x=0$ a.e. 于 $\mathbf{R}^p$，即 $E_x\in\mathscr{L}_q$ a.e. 于 $\mathbf{R}^p$.

3° 当 E 是任意可测集时，据定理3.2.11，有 G_δ 型集 $O\supset E$，使 $m(O-E)=0$，从而 $O=(O-E)\cup E$，据引理 3.4.2 的 3)，$\forall x\in\mathbb{R}^p$，有 $O_x=(O-E)_x\cup E_x$，据1°，$O_x\in\mathscr{L}_q(\forall x\in\mathbb{R}^p)$，据 2°，$(O-E)_x\in\mathscr{L}_q$ a.e. 于 $\mathbb{R}^p$，故 $E_x\in\mathscr{L}_q$ a.e. 于 $\mathbf{R}^p$. 证毕.

注 把定理 3.4.5 中的结论换成：$E_y\in\mathscr{L}_p$ a.e. 于 $\mathbf{R}^q$，仍然成立.

习 题 3.4

1. 证明引理 3.4.1 的 1)，2)，3).
2. 证明引理 3.4.2 的 2)，3)，4).

第四章　可 测 函 数

为了建立Lebesgue 积分的需要，我们还必须引进一类重要的函数——Lebesgue 可测函数，并讨论其性质和结构. 此外，对抽象可测函数也作一点简单介绍.

本章前三节（§ 4.1—§ 4.3）讨论 Lebesgue 可测函数（简称可测函数），第四节（§ 4.4）介绍抽象可测函数.

§ 4.1　可测函数的定义及性质

为了今后讨论问题的需要，我们先给出广义实值函数等概念，并对一些常用的与函数有关的集合的记号作如下规定.

设 E 是任意非空集，称映射 $f:E\to\hat{\mathbb{R}}$ 是 E 上的广义实值函数，而把映射 $g:E\to\mathbb{R}$ 称为 E 上的实值函数或有限函数.

设 $f_n(x)(n=1,2,\cdots)$，$f(x)$，$g(x)$ 都是定义在集合 E 上的广义实值函数，a，b 是实数. 我们记

$$E[f_n\to f]=\{x\mid x\in E,\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)\},$$

$$E[f_n\not\to f]=\{x\mid x\in E,f_n(x)\not\to f(x),n\to\infty\},$$

$$E[f\neq g]=\{x\mid x\in E,f(x)\neq g(x)\},$$

$$E[f\geqslant a]=\{x\mid x\in E,f(x)\geqslant a\},$$

$$E[a<f\leqslant b]=\{x\mid x\in E,a<f(x)\leqslant b\},$$

等等，这些集都是 E 的子集. 今后我们利用集合来分析函数的性质时，常要用到这些类型的集.

本节所说的可测集如无特别声明，都是指 $q(q\in\mathbb{N})$ 维欧几里得空间 $\mathbb{R}^q$ 中的 Lebesgue 可测集，即指 $\mathscr{L}_q$ 中的集.

定义4.1.1　设 $f(x)$ 是定义在可测集 E 上的一个实值函数，若

$E=\bigcup_{i=1}^{n}E_i, E_i\cap E_j=\varnothing(i\neq j), E_i(i=1,2,\cdots,n)$可测，使当$x\in E_i$时，$f(x)=\alpha_i$，$\alpha_i$是常数$(i=1,2,\cdots,n)$，则称$f(x)$为$E$上的一个简单函数.

此时，$f(x)$可以表示成如下的形式

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\chi_{E_i}(x), x\in E. \tag{4.1.1}$$

其中，$\chi_{E_i}(x)$是集E_i的特征函数. 我们称(4.1.1)为$f(x)$的一个初等分解. 显然，$f(x)$的初等分解是不唯一的. 若在(4.1.1)式中有

$$\alpha_1<\alpha_2<\cdots<\alpha_n,$$

则称(4.1.1)为$f(x)$的标准初等分解. 显然，$f(x)$的标准初等分解是唯一的.

例 1 在可测集E上恒等于一个常数的函数$f(x)=c(x\in E, c$为常数)是E上的简单函数.

例 2 $[0,1]$上的 Dirichlet 函数

$$D(x)=\begin{cases}1, x\text{ 是}[0,1]\text{中的有理数;}\\0, x\text{是}[0,1]\text{中的无理数}\end{cases}$$

是$[0,1]$上的简单函数.

例3 若区间$[a,b]$可划分成有限个两两不交的小区间，使$[a,b]$上的函数$f(x)$在每个小区间上取常实数值，就称$f(x)$为$[a,b]$上的阶梯函数. 阶梯函数显然是简单函数.

例 4 设E,A都是可测集，$E\supset A$. 定义在E上的集A的特征函数$\chi_A(x)(x\in E)$是E上的一个简单函数.

引理 4.1.1 简单函数有下列基本性质:

1) 若$f(x), g(x)$都是可测集E上的简单函数，则$f(x)\pm g(x)$，$f(x)\cdot g(x)$，$f(x)/g(x)(g(x)\neq 0)$，$\max(f(x), g(x))$，$\min(f(x), g(x))$都是E上的简单函数.

2) **若$f(x)$是可测集E上的简单函数,则$\forall a\in \mathrm{R}$,集$E[f>a]$是可测集.**

证明 我们这里只证2),1)的证明留为习题.

2) 的证明:设

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i \chi_{E_i}(x)\ (x\in E)$$

是$f(x)$的标准初等分解,则

$$E[f>a]=\begin{cases}E, \text{当 } a<\alpha_1 \text{ 时},\\ \varnothing, \text{当 } a\geqslant \alpha_n \text{ 时},\\ \bigcup\limits_{k=i+1}^{n} E_k, \text{当} \alpha_i\leqslant a<\alpha_{i+1}\ (1\leqslant i\leqslant n-1) \text{时}.\end{cases}$$

故 $E[f>a]$是可测集. 证毕.

定义 4.1.2 设$f(x)$ 是定义在可测集E上的广义实值函数,若有E上的简单函数列$\{\varphi_n(x)\}$,使 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(x)\ (x\in E)$,则称$f(x)$为$E$上的一个 Lebesgue 可测函数,简称可测函数.

显然,任何简单函数都是可测函数.

定理 4.1.2 设 $f(x)$, $g(x)$ 是可测集E上的可测函数,则 $f(x)\pm g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$, $f(x)/g(x)\ (g(x)\neq 0)$, $\max(f(x),g(x))$, $\min(f(x),g(x))$都是E上的可测函数.

证明 设$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(x)\ (x\in E)$, $g(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\psi_n(x)\ (x\in E)$,其中$\varphi_n(x)$, $\psi_n(x)\ (n=1,2,\cdots)$都是$E$上的简单函数. 由于

$$f(x)\pm g(x)=\lim_{n\to\infty}[\varphi_n(x)\pm\psi_n(x)],$$

$$f(x)\cdot g(x)=\lim_{n\to\infty}[\varphi_n(x)\cdot\psi_n(x)],$$

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\varphi_n(x)}{\psi_n(x)}\right],$$

$$\max(f(x),g(x))=\lim_{n\to\infty}\max(\varphi_n(x),\psi_n(x)),$$

$$\min(f(x), g(x)) = \lim_{n\to\infty}\min(\varphi_n(x), \psi_n(x)).$$

据引理4.1.1的1)及可测函数的定义，定理得证．证毕．

如果把习题1.2的第8题中的$f_n(x)(n=1,2,\cdots)$及$f(x)$都换成定义在集合E上的广义实值函数，就得到

引理 4.1.3 设 $f_n(x)(n=1,2,\cdots)$及$f(x)$都是定义在集合E上的广义实值函数，$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$ $(x\in E)$，则$\forall a\in\mathrm{R}$，有

$$E[f\geqslant a]=\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{N=1}^{\infty}\bigcap_{n=N}^{\infty}E\left[f_n>a-\frac{1}{k}\right].$$

证明 1° $\forall x_0\in E[f\geqslant a]$ 及每一个自然数 k，则 $x_0\in E$，且 $f(x_0)\geqslant a>a-\frac{1}{k}$，由于$\lim_{n\to\infty}f_n(x_0)=f(x_0)$，因而，总有自然数$N$存在，使当 $n\geqslant N$ 时，$f_n(x_0)>a-\frac{1}{k}$，因此，

$$x_0\in\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{N=1}^{\infty}\bigcap_{n=N}^{\infty}E\left[f_n>a-\frac{1}{k}\right],$$

即

$$E[f\geqslant a]\subset\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{N=1}^{\infty}\bigcap_{n=N}^{\infty}E\left[f_n>a-\frac{1}{k}\right].$$

2° $\forall x_0\in\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{N=1}^{\infty}\bigcap_{n=N}^{\infty}E\left[f_n>a-\frac{1}{k}\right]$，则 $x_0\in E$，且对每个自然数k，总有自然数N存在，当 $n\geqslant N$时，$f_n(x_0)>a-\frac{1}{k}$，于是

$$f(x_0)=\lim_{n\to\infty}f_n(x_0)\geqslant a-\frac{1}{k},$$

由 k 的任意性知，$f(x_0)\geqslant a$，所以$x_0\in E[f\geqslant a]$，即

$$E[f\geqslant a]\supset\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{N=1}^{\infty}\bigcap_{n=N}^{\infty}E\left[f_n>a-\frac{1}{k}\right].$$

由 1°、2°知，$E[f\geqslant a]=\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{N=1}^{\infty}\bigcap_{n=N}^{\infty}E\left[f_n>a-\frac{1}{k}\right]$. 证毕.

定理4.1.4 设$f(x)$是定义在可测集E上的广义实值函数，则$f(x)$在E上可测$\Leftrightarrow\forall a\in\mathbf{R}$，集$E[f\geqslant a]$可测.

证明 “$\Rightarrow$”：因$f(x)$在E上可测，据可测函数的定义，有E上的简单函数列$\{\varphi_n(x)\}$，使$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(x)\ (x\in E)$. 据引理 4.1.3，则 $E[f\geqslant a]=\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{N=1}^{\infty}\bigcap_{n=N}^{\infty}E\left[\varphi_n>a-\frac{1}{k}\right]$. 再据引理4.1.1的2)，每个集 $E\left[\varphi_n>a-\frac{1}{k}\right]$都可测，因而，集 $E[f\geqslant a]$可测.

“$\Leftarrow$”：$\forall a,b,c\in\mathbf{R}\,(b<c)$，由于

$$E[f<a]=E\cap(E[f\geqslant a])^c,$$

$$E[b\leqslant f<c]=E[f\geqslant b]\cap E[f<c],$$

据充分性假设，$E[f<a]$及$E[b\leqslant f<c]$都是可测集.

下面要作出一个定义在E上的简单函数列$\{\varphi_n(x)\}$，使$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(x)\ (x\in E)$.

对任意固定的自然数n，因为

$$E=E[f<-n]\cup E[-n\leqslant f<n]\cup E[f\geqslant n]$$

$$=E[f<-n]\cup\left\{\bigcup_{k=-n10^n}^{n10^n-1}E\left[\frac{k}{10^n}\leqslant f<\frac{k+1}{10^n}\right]\right\}\cup E[f\geqslant n],$$

所以，E 被分成有限个互不相交的可测集之并.

令

$$\varphi_n(x)=\begin{cases}-n, & x\in E[f<-n];\\ \frac{1}{10^n}[10^nf(x)]=\frac{k}{10^n}, & x\in E\left[\frac{k}{10^n}\leqslant f<\frac{k+1}{10^n}\right],\\ & k=-n10^n,-n10^n+1,\cdots,0,1,\cdots,n10^n-1;\\ n, & x\in E[f\geqslant n].\end{cases}$$

其中，$[10^n f(x)]$表示不超过$10^n f(x)$的最大整数．则$\varphi_n(x)$是定义在E上的简单函数．

以下证明$\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(x)=f(x)\quad(\forall x\in E)$．

任取$x_0\in E$，若$-\infty<f(x_0)<+\infty$，根据$\varphi_n(x)$的定义，显然有$\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(x_0)=f(x_0)$；若$f(x_0)=+\infty$，则对每个自然数$n$，有$x_0\in E[f\geqslant n]$，即$\varphi_n(x_0)=n\to+\infty(n\to\infty)$，所以$\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(x_0)=f(x_0)$；若$f(x_0)=-\infty$，则对每一个自然数$n$，有$x_0\in E[f<-n]$，即$\varphi_n(x_0)=-n\to-\infty(n\to\infty)$，所以也有$\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(x_0)=f(x_0)$．证毕．

推论4.1.5 **设$f(x)$是定义在可测集E上的广义实值函数，则$\forall a,b,c\in\mathbf{R}(b<c)$，下列任一条件都是$f(x)$在$E$上可测的充要条件：**

1) **集$E[f>a]$可测，2)集$E[f\leqslant a]$可测，3)集$E[f<a]$可测．**

证明留为习题．

例5 不可测函数的例．设$E\subset\mathbf{R}^1$是Lebesgue不可测集(见§3.2)，$\chi_E(x)=\begin{cases}1, x\in E,\\0, x\in\mathbf{R}^1-E.\end{cases}$由于$\left\{x\mid x\in\mathbf{R}^1,\ \chi_E(x)\geqslant\frac{1}{2}\right\}=E$，据定理4.1.4，$\mathbf{R}^1$上的函数$\chi_E(x)$不是Lebesgue可测函数．

例6 若$mE=0$，则E上的任何广义实值函数$f(x)$都在E上可测．

证明 $\forall a\in\mathbf{R}$，因$E[f\geqslant a]\subset E$，所以$m^*\{E[f\geqslant a]\}=0$．故$E[f\geqslant a]$可测，即$f(x)$在E上可测．证毕．

定理4.1.6 **设$f(x)$是定义在可测集E上的广义实值非负函数．则$f(x)$在E上可测$\Leftrightarrow$存在E上的一列递增的非负简单函数$\{\varphi_n(x)\}$，使$\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(x)=f(x)(x\in E)$．**

证明 充分性是显然的，下证必要性：对任意自然数n，令

$$\varphi_n(x)=\begin{cases}\dfrac{k}{10^n}, x\in E\left[\dfrac{k}{10^n}\leqslant f<\dfrac{k+1}{10^n}\right],\\ \qquad k=0,1,2,\cdots,n10^n-1;\\ n, \quad x\in E[f\geqslant n],\end{cases}$$

则$\varphi_n(x)$是定义在E上的简单函数，并且容易看出

$$0\leqslant\varphi_1(x)\leqslant\varphi_2(x)\leqslant\cdots, x\in E.$$

再由定理 4.1.4 的证明就知道，$\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(x)=f(x)(x\in E)$. 证毕.

为了说明非负函数可测的几何意义，我们引入下方图形的概念：

定义4.1.3 设$f(x)=f(x_1,x_2,\cdots,x_q)$是定义在$E\subset\mathbb{R}^q$上的广义实值非负函数，称点集

$$G(E;f)=\{(x;z)=(x_1,x_2,\cdots,x_q;z)\,|\,x\in E,\\ 0\leqslant z<f(x)\}\subset\mathbb{R}^{q+1}$$

为$f(x)$在E上的下方图形.

定理 4.1.7 **设 $f(x)$ 是定义在 $E\in\mathscr{L}_q$ 上的广义实值非负函数，则$f(x)$在E上可测$\Leftrightarrow$集$G(E;f)$可测.**

证明 "$\Rightarrow$"：将全体非负有理数排为$r_1,r_2,\cdots,r_i,\cdots$. 令

$$E_i=E[f>r_i]\subset\mathbb{R}^q,\ B_i=\{z\,|\,0\leqslant z<r_i\}\subset\mathbb{R}^1\ (i=1,2,\cdots),$$

则$E_i,B_i(i=1,2,\cdots)$皆可测，由定理 3.4.3 知，$E_i\times B_i\subset\mathbb{R}^{q+1}$可测$(i=1,2,\cdots)$，从而 $G^*=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}(E_i\times B_i)\subset\mathbb{R}^{q+1}$可测. 若能证明 $G^*=G(E;f)$，则$G(E;f)$就可测. 首先，$\forall(x;z)\in G^*$，$\exists$自然数i_0，使$(x;z)\in E_{i_0}\times B_{i_0}$，即$x\in E_{i_0}$，$z\in B_{i_0}$，于是$x\in E$，$f(x)>r_{i_0}$，$0\leqslant z<r_{i_0}$，从而$0\leqslant z<f(x)$，可见$(x;z)\in G(E;f)$，这说明 $G^*\subset G(E;f)$. 其次，$\forall(x;z)\in G(E;f)$，则 $x\in E$，$0\leqslant z<f(x)$，从而必有正有理数 r_{j_0}，使$0\leqslant z<r_{j_0}<f(x)$，于是$x\in E_{j_0}$，$z\in B_{j_0}$，所以$(x;z)\in E_{j_0}\times B_{j_0}\subset G^*$，这又说明$G^*\supset G(E;f)$，故$G^*=G(E;f)$.

"$\Leftarrow$"：据推论 4.1.5，只须证明对于任意实数 a，集 $E[f>a]$ 可测即可．由于当$a<0$时，$E[f>a]=E$可测，所以，只须再证对于任意非负实数 a，集$E[f>a]$可测就可以了．因 $G=G(E;f)\subset\mathbb{R}^q\times\mathbb{R}^1$可测，据定理3.4.5，存在$A\subset\mathbb{R}^1=(-\infty,+\infty)$，$mA=0$，使当

$$z\in\mathbb{R}^*=[0,+\infty)\cap(\mathbb{R}^1-A)\text{时},$$

$$G_z=\{x\mid(x;z)\in G(E;f)\}=E[f>z]\subset\mathbb{R}^q$$

可测，但 $\mathbb{R}^*$在$[0,+\infty)$中稠密，据定理 2.1.13 的 2)，$\forall a\in[0,+\infty)$，有$\mathbb{R}^*$中之点列$\{z_i\}$，使$z_i\downarrow a$（z_i单调下降且收敛于 a），故

$$E[f>a]=\bigcup_{i=1}^{\infty}E[f>z_i]\text{可测．证毕．}$$

定义4.1.4 设$f(x)$是定义在可测集E上的广义实值函数，称

$$f^+(x)=\max(f(x),0)=\begin{cases}f(x), & \text{当}x\in E[f>0]\text{时},\\ 0, & \text{当}x\in E[f\leqslant 0]\text{时}\end{cases}$$

为$f(x)$的正部，称

$$f^-(x)=\max(-f(x),0)=\begin{cases}-f(x), & \text{当}x\in E[f<0]\text{时},\\ 0, & \text{当}x\in E[f\geqslant 0]\text{时}\end{cases}$$

为$f(x)$的负部．

显然，$f^+(x)$、$f^-(x)$都是定义在E上的广义实值非负函数，且有

$$f(x)=f^+(x)-f^-(x),$$

$$|f(x)|=f^+(x)+f^-(x).$$

由定义 4.1.4 和定理4.1.2 可立即得到

定理 4.1.8 **设 $f(x)$是定义在可测集E上的广义实值函数，则**

1) $f(x)$**在**E**上可测**$\Leftrightarrow f^+(x)$**与**$f^-(x)$**都在**E**上可测．**

2) $f(x)$**在**E**上可测**$\Rightarrow|f(x)|$**在**E**上可测．**

定义 4.1.5 设$E\subset\mathbb{R}^q$，f是E上的实值函数，$x_0\in E$。若$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，使当$x\in O(x_0,\delta)\cap E$时，有$f(x)\in O(f(x_0),\varepsilon)$，则称 f在x_0点连续，此时也称x_0是f的连续点。

和数学分析中一样，f在x_0点连续$\Leftrightarrow$对于$E=\mathscr{D}_f$上任何一个收敛于x_0的点列$\{x_n\}$，成立$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=f(x_0)$。

若f在E上的每一点都连续，则称f在E上连续，此时，我们就说$f(x)$是E上的连续函数，

例 7 设$f(x)$是可测集E上的连续函数，则$f(x)$在E上可测。

证明 只须证明$\forall a\in\mathbb{R}$，集$E[f>a]$可测即可。$\forall x\in E[f>a]$，则由f的连续性假设，$\exists\delta_x>0$，使

$$O(x,\delta_x)\cap E\subset E[f>a].$$

令$G=\bigcup\limits_{x\in E[f>a]}O(x,\delta_x)$，则$G$是开集，且

$$G\cap E=\bigcup_{x\in E[f>a]}[O(x,\delta_x)\cap E]\subset E[f>a].$$

另一方面，显然$G\supset E[f>a]$，从而$G\cap E\supset E[f>a]$。故$E[f>a]=G\cap E$可测。证毕。

定理4.1.9 **设$f(x)$是定义在可测集E上的广义实值函数。1）若$f(x)$在E上可测，则$f(x)$在E的任何一个可测子集E_1上也可测；2）若将E表为至多可数个可测集合E_i之并：$E=\bigcup\limits_i E_i$，$f(x)$在每个E_i上可测，则$f(x)$在E上也可测。**

证明 1）$\forall a\in\mathbb{R}$，因$E_1[f\geqslant a]=E[f\geqslant a]\cap E_1$，故$f(x)$在$E_1$上可测。

2）$\forall a\in\mathbb{R}$，因$E[f\geqslant a]=\bigcup\limits_i E_i[f\geqslant a]$，故$f(x)$在$E$上可测。证毕。

定义4.1.6 设$f(x)$与$g(x)$是定义在E上的广义实值函数，若$f(x)=g(x)$a. e. 于E，则称$f(x)$与$g(x)$在E上对等，记作：$f(x)\sim$

$g(x)$于E或$f\sim g$于E.

例 8 若$f(x)$与$g(x)$在可测集E上对等，且$f(x)$在E上可测，则$g(x)$在E上也可测.

证明 令$E^*=E[f\neq g]$，则$mE^*=0$，且当$x\in E_1=E-E^*$时，$f(x)=g(x)$. 由定理 4.1.9 的 1)知，$g(x)$在E_1上可测，由例 6 知，$g(x)$在E^*上可测，据定理 4.1.9 的 2)，$g(x)$在$E=E_1\cup E^*$上可测. 证毕.

定理 4.1.10 **设$f_n(x)(n=1,2,\cdots)$都是可测集E上的可测函数，$\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)(\forall x\in E)$，则$f(x)$在$E$上可测.**

证明 $\forall a\in\mathbb{R}$，据引理 4.1.3，则

$$E[f\geqslant a]=\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{N=1}^{\infty}\bigcap_{n=N}^{\infty}E\left[f_n>a-\frac{1}{k}\right].$$

故$f(x)$在E上可测. 证毕.

定义 4.1.7 设$f_n(x)(n=1,2,\cdots)$及$f(x)$都是$E\subset\mathbb{R}^q$上的广义实值函数，若$m(E[f_n\not\to f])=0$，就称$\{f_n(x)\}$在E上几乎处处收敛于$f(x)$，简记为：$f_n(x)\xrightarrow{\text{a.e.}}f(x)$于$E$或$f_n\xrightarrow{\text{a.e.}}f$于$E$.

推论 4.1.11 **设$f_n(x)(n=1,2,\cdots)$都是可测集E上的可测函数，若$f_n(x)\xrightarrow{\text{a.e.}}f(x)$于$E$，则$f(x)$在$E$上也可测.**

习 题 4.1

1. 证明引理 4.1.1 的 1)和推论 4.1.5.

2. 设$f_1(x)$，$f_2(x)$，$\cdots$，$f_n(x)$，$\cdots$都是可测集E上的可测函数，则$\sup\limits_n f_n(x)$、$\inf\limits_n f_n(x)$、$\varlimsup\limits_{n\to\infty}f_n(x)$、$\varliminf\limits_{n\to\infty}f_n(x)$也都是$E$上的可测函数.

3. 证明任何一元单调函数都是可测函数.

4. 设$f_1(x)$是$E_1\in\mathscr{L}_p$，$f_2(y)$是$E_2\in\mathscr{L}_q$上的可测函数，证明$f_1(x)f_2(y)$是$E_1\times E_2$上的可测函数.

§4.2 可测函数列的收敛性

本节引进可测函数列几乎一致收敛和依测度收敛之概念，并讨论几乎处处收敛，几乎一致收敛和依测度收敛三者之间的关系，

本节所说的可测集如无特别声明，都是指 $\mathscr{L}_q$ 中之集.

定义 4.2.1 设 $f_n(x)(n=1, 2, \cdots)$ 及 $f(x)$ 都是可测集 E 上几乎处处有限的广义实值函数. 若 $\forall\delta>0$, 存在 E 的可测子集 e, $me<\delta$, 使 $\{f_n(x)\}$ 在 $E_\delta=E-e$ 上一致收敛于 $f(x)$, 则称 $\{f_n(x)\}$ 在 E 上几乎一致收敛于 $f(x)$, 记为 $f_n(x)\to f(x)$ a. u. 于 E 或 $f_n(x) \xrightarrow{\text{a. u.}} f(x)$ 于 E, 简记为 $f_n\to f$ a. u. 于 E 或 $f_n \xrightarrow{\text{a. u.}} f$ 于 E.

定义 4.2.2 设 $f_n(x)(n=1,2,\cdots)$ 及 $f(x)$ 都是可测集 E 上几乎处处有限的可测函数. 若 $\forall\varepsilon>0$, 都有

$$\lim_{n\to\infty} m(E[|f_n-f|\geqslant\varepsilon])=0,$$

则称 $\{f_n(x)\}$ 在 E 上依测度收敛于 $f(x)$, 记为 $f_n(x)\Rightarrow f(x)$ 于 E 或 $f_n\Rightarrow f$ 于 E.

引理 4.2.1 设 $f_n(x)(n=1,2,\cdots)$ 及 $f(x)$ 都是可测集 E 上几乎处处有限的可测函数，则 $f_n \xrightarrow{\text{a. e.}} f$ 于 $E \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0$, 恒有

$$m\left(\bigcap_{N=1}^{\infty}\bigcup_{n=N}^{\infty}E[|f_n-f|\geqslant\varepsilon]\right)=0.$$

特别，当 $mE<+\infty$ 时，则 $f_n \xrightarrow{\text{a. e}} f$ 于 $E\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0$, 都有

$$\lim_{N\to\infty} m(\bigcup_{n=N}^{\infty}E[|f_n-f|\geqslant\varepsilon])=0.$$

证明 首先由于 $E^*=E[|f|=+\infty]\cup\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}E[|f_n|=+\infty]\right)$

为零测度集，而必要时总可用 $E-E^*$ 代替 E，所以，不妨设 $f_n(x)(n=1,2,\cdots)$ 及 $f(x)$ 都在 E 上处处有限. 据习题 1.2 第 9 题的(2)，

$$f_n \xrightarrow{\text{a.e.}} f \text{ 于 } E \Leftrightarrow m(E[f_n \nrightarrow f])=0$$

$$\Leftrightarrow m\left(\bigcap_{N=1}^{\infty}\bigcup_{n=N}^{\infty} E\left[|f_n-f|\geqslant\frac{1}{k}\right]\right)=0 \quad (\forall k\in\mathbf{N})$$

$$\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\ \text{都有}\ m\left(\bigcap_{N=1}^{\infty}\bigcup_{n=N}^{\infty} E[|f_n-f|\geqslant\varepsilon]\right)=0.$$

当 $mE<+\infty$ 时，据定理 3.1.15(上连续性)，则

$$\lim_{N\to\infty} m\left(\bigcup_{n=N}^{\infty} E[|f_n-f|\geqslant\varepsilon]\right)=m\left(\bigcap_{N=1}^{\infty}\bigcup_{n=N}^{\infty} E[|f_n-f|\geqslant\varepsilon]\right)$$

$$=0. \qquad \text{证毕.}$$

引理 4.2.2 设 $f_n(x)(n=1,2,\cdots)$ 及 $f(x)$ 都是可测集 E 上几乎处处有限的可测函数，则 $f_n \xrightarrow{\text{a.u.}} f$ 于 $E \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0$，恒有

$$\lim_{N\to\infty} m\left(\bigcup_{n=N}^{\infty} E[|f_n-f|\geqslant\varepsilon]\right)=0.$$

证明 “$\Rightarrow$”：设 $f_n \xrightarrow{\text{a.u.}} f$ 于 E，则 $\forall\varepsilon>0$ 和 $\forall\delta>0$，$\exists$ 可测集 $e\subset E$，$me<\delta$ 及自然数 $K=K(\varepsilon,\delta)$，使当 $n\geqslant K$ 时，对一切 $x\in E_\delta=E-e$，都有 $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$. 因此，当 $n\geqslant K$ 时，有 $E[|f_n-f|\geqslant\varepsilon]\subset e$. 从而当 $N\geqslant K$ 时，有 $\bigcup_{n=N}^{\infty} E[|f_n-f|\geqslant\varepsilon]\subset\bigcup_{n=K}^{\infty} E[|f_n-f|\geqslant\varepsilon]\subset e$. 故 $m\left(\bigcup_{n=N}^{\infty} E[|f_n-f|\geqslant\varepsilon]\right)\leqslant me<\delta$. 这说明

$$\lim_{N\to\infty} m\left(\bigcup_{n=N}^{\infty} E[|f_n-f|\geqslant\varepsilon]\right)=0.$$

"$\Leftarrow$"：由充分性的假设知，$\forall\delta>0$ 及 $\forall$ 自然数 k，总有自然数 $N=N(\delta,k)$，使 $m\left(\bigcup\limits_{n=N}^{\infty}E\left[|f_n-f|\geqslant\frac{1}{k}\right]\right)<\frac{\delta}{2^k}$. 令

$$e=\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=N}^{\infty}E\left[|f_n-f|\geqslant\frac{1}{k}\right],$$

则 $e\subset E$，e 可测，且

$$me\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}m\left(\bigcup_{n=N}^{\infty}E\left[|f_n-f|\geqslant\frac{1}{k}\right]\right)<\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\delta}{2^k}=\delta,$$

而

$$E_\delta=E-e=e^c\cap E=\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcap_{n=N}^{\infty}E\left[|f_n-f|<\frac{1}{k}\right].$$

因此，$\forall$ 自然数 k，$\exists$ 自然数 N，当 $n\geqslant N$ 时，对一切 $x\in E_\delta$，都有

$|f_n(x)-f(x)|<\frac{1}{k}$. 故 $f_n\xrightarrow{\text{a.u.}}f$ 于 E. 证毕.

定理 4.2.3 设 $f_n(x)(n=1,2,\cdots)$ 及 $f(x)$ 都是可测集 E 上几乎处处有限的可测函数.

当 $mE\leqslant+\infty$ 时，有

1) 若 $f_n\xrightarrow{\text{a.u.}}f$ 于 E，则 $f_n\xrightarrow{\text{a.e.}}f$ 于 E.

2) 若 $f_n\xrightarrow{\text{a.u.}}f$ 于 E，则 $f_n\Rightarrow f$ 于 E.

3) 若 $f_n\Rightarrow f$ 于 E，则必有 $\{f_n\}$ 的子列 $\{f_{n_k}\}$，使 $f_{n_k}\xrightarrow{\text{a.u.}}f$ 于 E.

4) (F. Riesz 定理)若 $f_n\Rightarrow f$ 于 E，则必有 $\{f_n\}$ 的子列 $\{f_{n_k}\}$，使 $f_{n_k}\xrightarrow{\text{a.e.}}f$ 于 E.

当 $mE<+\infty$ 时，有

5) (Егоров 定理)若 $f_n \xrightarrow{\text{a.e.}} f$ 于 E，则 $f_n \xrightarrow{\text{a.u.}} f$ 于 E.

6) (Lebesgue 定理)若 $f_n \xrightarrow{\text{a.e.}} f$ 于 E，则 $f_n \Rightarrow f$ 于 E.

证明 1) 据引理 4.2.2，$f_n \xrightarrow{\text{a.u.}} f$ 于 $E \Rightarrow \forall \varepsilon > 0$，

$$\lim_{N\to\infty} m\left(\bigcup_{n=N}^{\infty} E[|f_n - f| \geqslant \varepsilon]\right) = 0.$$

令 $B_N = \bigcup\limits_{n=N}^{\infty} E[|f_n - f| \geqslant \varepsilon]$，则 $B_N \supset B_{N+1}$ $(N=1,2,\cdots)$，且 $\exists N_0$ 使 $m(B_{N_0}) < +\infty$. 据定理 3.1.15(上连续性)，

$$\lim_{N\to\infty} m(B_N) = m\left(\bigcap_{N=1}^{\infty} B_N\right) = m\left(\bigcap_{N=1}^{\infty}\bigcup_{n=N}^{\infty} E[|f_n - f| \geqslant \varepsilon]\right) = 0.$$

再由引理 4.2.1 知，$f_n \xrightarrow{\text{a.e.}} f$ 于 E.

2) 据引理 4.2.2，$f_n \xrightarrow{\text{a.u.}} f$ 于 $E \Rightarrow \forall \varepsilon > 0$，

$$\lim_{N\to\infty} m\left(\bigcup_{n=N}^{\infty} E[|f_n - f| \geqslant \varepsilon]\right) = 0.$$

因为

$$m(E[|f_n - f| \geqslant \varepsilon]) \leqslant m\left(\bigcup_{n=N}^{\infty} E[|f_n - f| \geqslant \varepsilon]\right) (n \geqslant N),$$

从而 $\lim\limits_{n\to\infty} m(E[|f_n - f| \geqslant \varepsilon]) = 0$，即 $f_n \Rightarrow f$ 于 E.

3) 由于 $f_n \Rightarrow f$ 于 E，则 $\forall \varepsilon > 0$ 及 $\forall$ 自然数 k，$\exists$ 自然数 $K = K(k, \varepsilon)$，使当 $n \geqslant K$ 时，有

$$m(E[|f_n - f| \geqslant \varepsilon]) < \frac{1}{2^{k+1}}.$$

令

$$n_1 = K(1,\varepsilon),\ n_2 = \max\{n_1 + 1, K(2,\varepsilon)\}, \cdots,$$
$$n_k = \max\{n_{k-1} + 1, K(k,\varepsilon)\}, \cdots.$$

则 $n_1<n_2<\cdots<n_k<\cdots$，且

$$m(E[|f_{n_k}-f|\geqslant e])<\frac{1}{2^{k+1}}\quad (k=1,2,\cdots).$$

于是，$\forall$ 自然数 N，有

$$m\left(\bigcup_{k=N}^{\infty}E[|f_{n_k}-f|\geqslant e]\right)\leqslant\sum_{k=N}^{\infty}m(E[|f_{n_k}-f|\geqslant e])$$

$$<\sum_{k=N}^{\infty}\frac{1}{2^{k+1}}=\frac{1}{2^N}.$$

故 $\lim\limits_{N\to\infty}m\left(\bigcup\limits_{k=N}^{\infty}E[|f_{n_k}-f|\geqslant e]\right)=0$. 即 $f_{n_k}\xrightarrow{\text{a. u.}}f$ 于 E.

4) 由 3) 和 1) 可立得 4).

5) 由引理 4.2.1 和引理 4.2.2 可立得 5).

6) 由 5) 和 2) 可立得 6). 证毕.

注 1 当 $mE<+\infty$ 的限制去掉后，定理的 5)、6) 不再成立. 见下面反例.

例 1 $f_n(x)=\frac{x}{n}$ 在 $\mathbf{R}^1=(-\infty,+\infty)$ 上处处收敛于 0，但从 $\mathbf{R}^1$ 中挖去任何测度有限的可测子集 e，都不能使 $\{f_n(x)\}$ 在 $\mathbf{R}^1-e$ 上一致收敛于 0，即 $f_n\xrightarrow{\text{a. u.}}0$ 于 $\mathbf{R}^1$ 不成立. 另外，$f_n\Rightarrow 0$ 于 $\mathbf{R}^1$ 也不成立.

注 2 定理的 6) 的逆不真. 由下列说明.

例 2 取 $E=[0,1)$，$mE<+\infty$. 对任意给定的自然数 n，我们总可以找到唯一的非负整数 k 与 i，使得

$$n=2^k+i,\quad 0\leqslant i<2^k.$$

在 $[0,1)$ 上作函数列：

$$f_n(x)=f_{2^k+i}(x)=\chi_{\left[\frac{i}{2^k},\frac{i+1}{2^k}\right)}(x),\ x\in[0,1),\ n=1,2,\cdots.$$

则 $\{f_n(x)\}$ 是 $[0,1)$ 上处处取有限值的可测函数列，且 $f_n\Rightarrow 0$ 于 $[0,$

1). 事实上, $\forall e>0$, $E[|f_n-0|\geqslant e]$或为空集 $(e>1)$ 或为$\left[\frac{i}{2^k},\frac{i+1}{2^k}\right)(e\leqslant 1)$. 注意到当 $n\to\infty$ 时, $k\to\infty$. 从而

$$\lim_{n\to\infty} m(E[|f_n-0|\geqslant e])=0.$$

函数列$\{f_n(x)\}$在$[0,1)$上处处不收敛. 事实上, $\forall x_0\in[0,1)$, 函数列$\{f_n(x)\}(n=1,2,\cdots)$中有无穷多项在 x_0 点的值为 1, 也有无穷多项在 x_0 点的值为 0, 故$\{f_n(x)\}$在 x_0 点不收敛.

定理 4.2.4 设 $mE<+\infty$, 则 $f_n\Rightarrow f$ 于 $E\Leftrightarrow\{f_n\}$的任一子列$\{f_{n_k}\}$中都还存在一个子列$\{f_{n_{k_i}}\}$, 使 $f_{n_{k_i}}\xrightarrow{\text{a.e.}} f$ 于 E.

证明 "$\Rightarrow$": 由于 $f_n\Rightarrow f$ 于 E, 因而, 对$\{f_n\}$的任何子列$\{f_{n_k}\}$, 显然也有 $f_{n_k}\Rightarrow f$ 于 E. 据定理 4.2.3 的 4), 必有$\{f_{n_k}\}$的子列$\{f_{n_{k_i}}\}$, 使 $f_{n_{k_i}}\xrightarrow{\text{a.e.}} f$ 于 E.

"$\Leftarrow$": 假若 $f_n\Rightarrow f$ 于 E 不成立, 则必存在 $\varepsilon_0>0$, 使 $m(E[|f_n-f|\geqslant\varepsilon_0])$不收敛于零, 因此必存在 $\delta_0>0$ 及$\{f_n\}$的子列$\{f_{n_k}\}$, 使

$$m(E[|f_{n_k}-f|\geqslant\varepsilon_0])\geqslant\delta_0>0\quad(k=1,2,\cdots).$$

显然$\{f_{n_k}\}$的任何子列$\{f_{n_{k_i}}\}$都不可能依测度收敛于 f, 据定理 4.2.3 的 6), $\{f_{n_k}\}$的任何子列$\{f_{n_{k_i}}\}$更不可能几乎处处收敛于 f. 这与题设矛盾. 故 $f_n\Rightarrow f$ 于 E. 证毕.

注 定理 4.2.4 的必要性可以不要求 $mE<+\infty$.

依测度收敛还有如下一些基本性质:

定理 4.2.5 设 $mE<+\infty$, $f_n\Rightarrow f$ 于 E, $g_n\Rightarrow g$ 于 E. 则有

1) 若又有 $f_n\Rightarrow h$ 于 E, 则 $f=h$ a.e. 于 E;

2) 若 a,b 为两个实数, 则 $af_n+bg_n\Rightarrow af+bg$ 于 E;

3) $f_n\cdot g_n\Rightarrow f\cdot g$ 于 E;

4) 若 g_n 和 g 在 E 上几乎处处不等于零, 则 $f_n/g_n\Rightarrow f/g$ 于 E

(这里在 g_n, g 为零的一个零测度集上，可规定函数 f_n/g_n, f/g 为任意的数值)；

5) $|f_n| \Rightarrow |f|$ 于 E.

证明 这里只证 1)，其余证明留为习题.

1) 因 $f_n \Rightarrow f$ 于 E，据定理 4.2.3 的 4)，存在 $\{f_n\}$ 的子列 $\{f_{n_k}\}$ 及 $D_1 \subset E$, $mD_1 = 0$, 使在 $E - D_1$ 上, $f_{n_k} \to f(k \to \infty)$, 又因 $f_n \Rightarrow h$ 于 E, 据定理 4.2.4, 存在 $\{f_{n_k}\}$ 的子列 $\{f_{n_{k_i}}\}$ 及 $D_2 \subset E$, $mD_2 = 0$, 使在 $E - D_2$ 上, $f_{n_{k_i}} \to h(i \to \infty)$. 故在 $E - (D_1 \cup D_2)$ 上, $f = h$, 而 $m(D_1 \cup D_2) = 0$, 即 $f = h$ a.e. 于 E. 证毕.

注 当 $mE = +\infty$ 时，定理 4.2.5 的 1), 2), 5) 仍成立.

习 题 4.2

1. 设 $E \in \mathscr{L}_q$, $f_n \Rightarrow f$ 于 E, $f = g$ a.e. 于 E, 则 $f_n \Rightarrow g$ 于 E.

2. 证明定理 4.2.5 的 2), 3), 4), 5).

3. 设 $E \in \mathscr{L}_q$, $f_n(x) \Rightarrow f(x)$ 于 E, 且 $f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x)$ a.e. 于 E, $n = 1, 2, \cdots$, 则 $f_n(x) \xrightarrow{\text{a.e.}} f(x)$ 于 E.

4. 设 $E \in \mathscr{L}_q$, $f_n(x) \Rightarrow f(x)$ 于 E, 且 $f_n(x) \leqslant g(x)$ a.e. 于 E, $n = 1, 2, \cdots$, 则 $f(x) \leqslant g(x)$ a.e. 于 E.

5. 设 $E \in \mathscr{L}_q$, $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \cdots)$ 是 E 上几乎处处有限的可测函数，则 $\{f_n(x)\}$ 在 E 上依测度收敛于某个可测函数的充要条件是: $\forall \varepsilon > 0$ 及 $\forall \delta > 0$, $\exists$ 自然数 $N = N(\varepsilon, \delta)$, 使当 $n, k \geqslant N$ 时，有 $m(E[|f_n - f_k| \geqslant \varepsilon]) < \delta$.

§4.3 可测函数的结构

本节讨论可测函数和连续函数之间的关系，从而揭示可测函数的结构.

定理 4.3.1 (Лузин 定理) **设** $E \in \mathscr{L}_q$, $f(x)$**是** E **上几乎处处有限的可测函数，则** $\forall \varepsilon > 0$, $\exists$ **闭集** $F_\varepsilon \subset E$, **使** $m(E - F_\varepsilon) < \varepsilon$, **且** $f(x)$ **在** F_ε **上连续.**

证明 分三步讨论:

1° 先设 $f(x)$是 E 上的简单函数.

据简单函数的定义，有E的分解: $E=\bigcup_{i=1}^{n}E_i$, $E_i\cap E_j=\varnothing$($i\neq j$), $E_i(i=1,2,\cdots,n)$可测, $f(x)=c_i$, 当 $x\in E_i(i=1,2,\cdots,n)$. 据定理 3.2.9,对每个 E_i,有闭集 $F_i\subset E_i$, 使$m(E_i-F_i)<\frac{\varepsilon}{n}$. 令

$F_\varepsilon=\bigcup_{i=1}^{n}F_i$,则 F_ε 是闭集,$F_\varepsilon\subset E$, 且

$$m(E-F_\varepsilon)=m\left(\bigcup_{i=1}^{n}E_i-\bigcup_{i=1}^{n}F_i\right)=m\left(\bigcup_{i=1}^{n}(E_i-F_i)\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}m(E_i-F_i)<\varepsilon.$$

下证 $f(x)$在 F_ε 上连续. $\forall x_0\in F_\varepsilon$ 及 $\forall\sigma>0$, 必有 $i_0\leqslant n$, 使 $x_0\in F_{i_0}$,取正数 δ,使

$$0<\delta<\min\{\rho(x_0,F_i)\mid i\in\{1,\ 2,\ \cdots,\ n\}-\{i_0\}\},$$

则 $F_\varepsilon\cap O(x_0,\delta)=F_{i_0}\cap O(x_0,\ \delta)$. 于是当 $x\in F_\varepsilon\cap O(x_0,\ \delta)$时,有

$$|f(x)-f(x_0)|=|c_{i_0}-c_{i_0}|=0<\sigma.$$

这说明 $f(x)$作为 F_ε 上的函数在 x_0 点连续. 由 $x_0\in F_\varepsilon$ 的任意性知,$f(x)$在 F_ε 上连续.

2° 设 $mE<+\infty$,$f(x)$是E上几乎处处有限的可测函数.

据可测函数的定义，有E上的简单函数列 $\{\varphi_n(x)\}$, 使 $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(x)=f(x)(x\in E)$. 据定理 4.2.3 的 5)(Егоров 定理),存在 $e\subset E$,$me<\frac{\varepsilon}{2}$,使在 $E_\varepsilon=E-e$ 上, $\varphi_n(x)$一致收敛于 $f(x)$. 因诸 $\varphi_n(x)$限制在 E_ε 上时仍为简单函数,据 1°,对每个 $\varphi_n(x)$, 都有闭集 $F_n\subset E_\varepsilon$,使$m(E_\varepsilon-F_n)<\frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$,且 $\varphi_n(x)$在 F_n 上连续. 令$F_\varepsilon=\bigcap_{n=1}^{\infty}F_n$,则 F_ε 是闭集, $F_\varepsilon\subset E_\varepsilon\subset E$. 于是每个 $\varphi_n(x)$在 F_ε 上连续,

$\varphi_n(x)$在F_ε上一致收敛于$f(x)$，故$f(x)$在F_ε上连续．又因为

$$E-F_\varepsilon=(E-E_\varepsilon)\cup(E_\varepsilon-F_\varepsilon)=(E-E_\varepsilon)\cup\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(E_\varepsilon-F_n)\right),$$

故$m(E-F_\varepsilon)\leqslant m(E-E_\varepsilon)+\sum\limits_{n=1}^{\infty}m(E_\varepsilon-F_n)<\frac{\varepsilon}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^{n+1}}=\varepsilon$.

3° 设$mE=+\infty$，$f(x)$是E上几乎处处有限的可测函数．令

$$B_i=\{x\mid x\in\mathbf{R}^q,\ i-1\leqslant\rho(x,0)<i,$$
$$0=(0,0,\cdots,0)\in\mathbf{R}^q\},\ i=1,2,\cdots.$$

则$\mathbf{R}^q=\bigcup\limits_{i=1}B_i$，$B_i\cap B_j=\varnothing\ (i\neq j)$，$B_i(i=1,2,\cdots)$有界可测．令$E_i=E\cap B_i(i=1,2,\cdots)$，则

$$E=\bigcup_{i=1}^{\infty}(E\cap B_i)=\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i,\ E_i\cap E_j=\varnothing\quad(i\neq j),$$

E_i有界可测，即$mE_i<+\infty(i=1,2,\cdots)$，据2°，对每个$E_i$，$\exists$闭集$F_i\subset E_i$，使$m(E_i-F_i)<\frac{\varepsilon}{2^{i+1}}$，且$f(x)$在$F_i$上连续．

令$F^*=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}F_i$，则$F^*\subset E$．现证明$f(x)$在$F^*$上连续．$\forall x_0\in F^*$，$\exists$自然数$i_0$，使$x_0\in F_{i_0}$，由于$f(x)$在$F_{i_0}$上连续，所以，$\forall\sigma>0$，$\exists\delta_{i_0}>0$，使当$x\in O(x_0,\delta_{i_0})\cap F_{i_0}$时，有

$$|f(x)-f(x_0)|<\sigma.$$

取

$$\delta=\frac{1}{2}\min\{\rho(x_0,F_{i_0-1}),\rho(x_0,F_{i_0+1}),\delta_{i_0},1\},$$

则

$$O(x_0,\delta)\cap F^*=O(x_0,\delta)\cap F_{i_0}\subset O(x_0,\delta_{i_0})\cap F_{i_0}.$$

从而当$x\in O(x_0,\delta)\cap F^*$时，亦有

$$|f(x)-f(x_0)|<\sigma.$$

这说明 $f(x)$ 作为 F^* 上的函数在 x_0 点连续. 再由 $x_0\in F^*$ 的任意性知, $f(x)$ 在 F^* 上连续.

由于 F^* 可测, 据定理3.2.9, ∃闭集 $F_\varepsilon\subset F^*$, 使 $m(F^*-F_\varepsilon)<\frac{\varepsilon}{2}$, 而 $f(x)$ 在 F_ε 上连续, 且

$$m(E-F_\varepsilon)=m(E-F^*)+m(F^*-F_\varepsilon)$$
$$<\sum_{i=1}^{\infty}m(E_i-F_i)+\frac{\varepsilon}{2}<\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^{i+1}}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.\text{ 证毕.}$$

下面是不用 Егоров 定理的证明方法.

证明 首先由于 $E_0=E[|f|=+\infty]$ 是零测度集, 而必要时总可用 $E-E_0$ 代替 E, 所以不妨设 $f(x)$ 在 E 上处处有限.

将 $\mathbf{R}^1=(-\infty,+\infty)$ 中的全体有理数排成 $r_1, r_2, \cdots, r_n, \cdots$, 令 $E_{n,k}=E\left[r_n<f(x)\leqslant r_n+\frac{1}{k}\right]$, $n,k=1,2,\cdots$, 则 $E_{n,k}(n,k=1,2,\cdots)$ 可测, 据定理 3.2.9, 对每个 $E_{n,k}$, ∃开集 $G_{n,k}\supset E_{n,k}$, 使

$$m(G_{n,k}-E_{n,k})<\frac{\varepsilon}{2^{n+k+1}}.\quad\text{令 } E_\varepsilon=\bigcup_{n,k=1}^{\infty}(G_{n,k}-E_{n,k}),$$

则 E_ε 可测, 且

$$mE_\varepsilon\leqslant\sum_{n,k=1}^{\infty}m(G_{n,k}-E_{n,k})<\sum_{n,k=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^{n+k+1}}=\frac{\varepsilon}{2}.$$

下证 $f(x)$ 在 $E-E_\varepsilon$ 上连续. $\forall\eta>0$, 取自然数 k_0, 使 $\frac{1}{k_0}<\eta$. $\forall x_0\in E-E_\varepsilon$, 总有自然数 n_0, 使 $f(x_0)\in\left(r_{n_0}, r_{n_0}+\frac{1}{k_0}\right]$, 从而 $x_0\in E_{n_0,k_0}\subset G_{n_0,k_0}$. 因 G_{n_0,k_0} 是开集, 于是∃$\delta>0$, 使 $O(x_0,\delta)\subset G_{n_0,k_0}$. 当 $x\in O(x_0,\delta)\cap E_{n_0,k_0}$ 时, 有

$$|f(x)-f(x_0)|\leqslant\frac{1}{k_0}<\eta.$$

另一方面，$O(x_0, \delta)\cap(E-E_\varepsilon)$

$$=O(x_0, \delta)\cap\left[E-\bigcup_{n,k=1}^{\infty}(G_{n,k}-E_{n,k})\right]$$

$$\subset O(x_0, \delta)\cap[E-(G_{n_0,k_0}-E_{n_0,k_0})]$$

$$=O(x_0, \delta)\cap[(E\cap(G_{n_0,k_0})^c)\cup E_{n_0,k_0}]$$

$$=O(x_0, \delta)\cap E_{n_0,k_0}.$$

因此，当 $x\in O(x_0,\delta)\cap(E-E_\varepsilon)$时，亦有

$$|f(x)-f(x_0)|<\eta.$$

这说明 $f(x)$作为 $E-E_\varepsilon$ 上的函数在 x_0 点连续. 由 $x_0\in E-E_\varepsilon$ 的任意性知，$f(x)$在 $E-E_\varepsilon$ 上连续.

由于 $E-E_\varepsilon$ 可测，据定理 3.2.9，$\exists$ 闭集 $F_\varepsilon\subset E-E_\varepsilon$，使 $m(E-E_\varepsilon-F_\varepsilon)<\frac{\varepsilon}{2}$，而 $f(x)$在 F_ε 上连续，且

$$m(E-F_\varepsilon)=m(E-(E-E_\varepsilon))+m(E-E_\varepsilon-F_\varepsilon)$$

$$<m(E\cap E_\varepsilon)+\frac{\varepsilon}{2}\leqslant mE_\varepsilon+\frac{\varepsilon}{2}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$ 证毕.

注 Лузин 定理的逆亦真，证明留为习题.

定理 4.3.2 设$E\in\mathscr{L}_1$，$f(x)$是E上几乎处处有限的可测函数，则 $\forall\sigma>0$，有闭集 $F_\sigma\subset E$ 及在$\mathbf{R}^1$ 上连续的函数 $g(x)$，使

1) 当 $x\in F_\sigma$ 时，$f(x)=g(x)$;

2) $m(E-F_\sigma)<\sigma$.

证明 据定理 4.3.1，有闭集 $F_\sigma\subset E$，使 $m(E-F_\sigma)<\sigma$，而 $f(x)$在 F_σ 上连续. 如果能将 $f(x)$连续延拓到$\mathbf{R}^1$ 上，则定理就得证. 据定理 2.2.2，则 $\mathbf{R}^1=F_\sigma\cup F_\sigma^c=F_\sigma\cup[\bigcup_i(\alpha_i, \beta_i)]$，其中 (α_i,β_i)是 $F_\sigma^c=\mathbf{R}^1-F_\sigma$ 的构成区间. 令

$$g(x)=\begin{cases} f(x), & \text{当 } x\in F_\sigma \text{ 时},\\ f(\alpha_i)\dfrac{\beta_i-x}{\beta_i-\alpha_i}+f(\beta_i)\dfrac{x-\alpha_i}{\beta_i-\alpha_i}, & \text{当 } x\in(\alpha_i,\beta_i)\ (\alpha_i,\beta_i \text{ 是实数})\text{时},\\ f(\beta_i), & \text{当 } x\in(-\infty,\beta_i)\text{时},\\ f(\alpha_i), & \text{当 } x\in(\alpha_i,+\infty)\text{时}. \end{cases}$$

只须再证 $g(x)$在$\mathbf{R}^1=(-\infty,+\infty)$上连续就可以了. 显然,$F_\sigma^c$ 中的每个点都是$g(x)$的连续点, 只要再证 F_σ 中的点也是 $g(x)$的连续点就可以了. 由于 $f(x)$在 F_σ 上连续,于是, $\forall x_0\in F_\sigma$ 及 $\forall \varepsilon>0$, 必有$\delta>0$,使当 $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)\cap F_\sigma$ 时,有

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon.$$

若$(x_0-\delta,x_0)\cap F_\sigma=\varnothing$,则$(x_0-\delta,x_0)\subset F_\sigma^c$,但 $x_0\bar{\in} F_\sigma^c$,即 x_0 是 F_σ^c 的某构成区间的右端点,又因 $g(x)$在$(x_0-\delta,x_0)$中是线性函数,因而必存在 $\eta\in(0,\delta)$,使当 $x\in(x_0-\eta,x_0)$时,有

$$|g(x)-g(x_0)|<\varepsilon.$$

若$(x_0-\eta,x_0)\cap F_\sigma\neq\varnothing$,设 $x'\in(x_0-\eta,x_0)\cap F_\sigma$,则当$x\in[x',x_0)\cap F_\sigma$ 时,$g(x)=f(x)$,又 $g(x_0)=f(x_0)$,因此,有

$$|g(x)-g(x_0)|=|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon.$$

若$[x',x_0)\cap F_\sigma^c=\varnothing$,则$[x',x_0]\subset F_\sigma$,$[x',x_0]\cap F_\sigma=[x',x_0]$,此时,$\forall x\in[x',x_0]$,都有

$$|g(x)-g(x_0)|=|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon.$$

因此,不妨设$[x',x_0)\cap F_\sigma^c\neq\varnothing$,则当 $x\in[x',x_0)\cap F_\sigma^c$时,必有 F_σ^c 的构成区间(α_i,β_i),使 $x\in(\alpha_i,\beta_i)\subset(x',x_0)$,由于 $\alpha_i,\beta_i\in[x',x_0]\cap F_\sigma$,据上面讨论的结果,有

$$|g(\alpha_i)-g(x_0)|<\varepsilon,\ |g(\beta_i)-g(x_0)|<\varepsilon.$$

又因为 $g(x)$之值介于 $g(\alpha_i)$与 $g(\beta_i)$之间,因此,有

$$|g(x)-g(x_0)|<\varepsilon.$$

由于$[x',x_0)=([x',x_0)\cap F_\sigma)\cup([x',x_0)\cap F_\sigma^c)$, 取 $\delta_0=x_0-x'>$

0，则当$x\in(x_0-\delta_0,x_0)$时，恒有$|g(x)-g(x_0)|<\varepsilon$. 这说明$x_0$是$g(x)$的左连续点. 同理可证$x_0$也是$g(x)$的右连续点，故$x_0$是$g(x)$的连续点. 证毕.

注 把定理4.3.2中E所在的空间$\mathbf{R}^1$改成$\mathbf{R}^q$时，所得定理仍成立，证明可参看参考文献[6].

习 题 4.3

1. 设$E\in\mathscr{L}_q$，$f(x)$在E上几乎处处有限，则$f(x)$在E上可测$\Longleftrightarrow$有一列在$\mathbf{R}^q$中连续的函数$\varphi_n(x)$，使

$$\varphi_n(x)\xrightarrow{\text{a.e.}}f(x)\text{于}E.$$

试就一维空间$\mathbf{R}^1$的情形证明之.

2. 设$f(x)$是$[a,b]$上几乎处处有限的可测函数，则$\forall\varepsilon>0$及$\forall\delta>0$，恒有闭集$F\subset[a,b]$及多项式$P(x)$，使$mF>b-a-\delta$，而在F上，$|f(x)-P(x)|<\varepsilon$.

提示：应用Weierstrass多项式逼近定理：设$f(x)$是$[a,b]$上的连续函数，则$\forall\varepsilon>0$，都存在多项式$P(x)$，使对一切$x\in[a,b]$，有

$$|P(x)-f(x)|<\varepsilon.$$

3. 证明：Лузин定理之逆定理：设$f(x)$是可测集E上几乎处处有限的广义实值函数. 若$\forall\varepsilon>0$，存在闭集$F_\varepsilon\subset E$，使$m(E-F_\varepsilon)<\varepsilon$，且$f(x)$在$F_\varepsilon$上连续，则$f(x)$在$E$上可测.

4. 若$f(x)$是$[a,b]$上几乎处处有限的可测函数，则存在$[a,b]$上的阶梯函数列$\{\varphi_n(x)\}$，使$\varphi_n\xrightarrow{\text{a.e.}}f$于$[a,b]$.

5. 假若$f(x)$是$[a,b]$上几乎处处为有限的可测函数，则存在一列多项式$\{P_n(x)\}$，使$P_n\xrightarrow{\text{a.e.}}f$于$[a,b]$.

*§4.4 抽象可测函数

本节介绍定义在一般可测空间$(X,\mathscr{S})$上的可测函数的概念及其基本性质. 由于这些性质的讨论与Lebesgue可测函数相应

性质的讨论是类似的，所以我们下面只指出一些结果，而将证明全部略去.

4.4.1 抽象可测函数的定义及其基本性质

定理 4.1.4 和推论 4.1.5 指出，对于定义在 $E\in\mathscr{L}_q$ 上的广义实值函数 $f(x)$ 及任意实数 a，下列任一条件都是 $f(x)$ 在 E 上成为 Lebesgue 可测函数的充要条件:

1) $E[f\geqslant a]\in\mathscr{L}_q$, 2) $E[f>a]\in\mathscr{L}_q$, 3) $E[f\leqslant a]\in\mathscr{L}_q$, 4) $E[f<a]\in\mathscr{L}_q$.

因此，用上面四个条件中的任何一个所定义的可测函数都和 Lebesgue 可测函数的原定义(即定义 4.1.2)等价.

现在我们把可测函数的概念推广到一般可测空间中去.

定义 4.4.1 设$(X,\mathscr{S})$是一个可测空间，$E\in\mathscr{S}$，f 是 E 上的广义实值函数. 如果对任意实数a，$E[f\geqslant a]\in\mathscr{S}$，则称 f 是 E 上关于$\mathscr{S}$可测的函数. 特别，当$(X,\mathscr{S})$是 Lebesgue 可测空间$(\mathbf{R}^q,\mathscr{L}_q)$时，这样的可测函数就是 Lebesgue 可测函数.

把定义 4.1.1 的表述在可测空间$(X,\mathscr{S})$的意义下来解释(即把可测集解释为属于$\mathscr{S}$的集）便得到E上关于$\mathscr{S}$的简单函数的定义.

在如此定义下，Lebesgue 可测函数的性质基本上都可以搬到一般可测空间上的可测函数中来. 现将其中几个最基本的性质列举如下:

定理 4.4.1 **设$(X,\mathscr{S})$是一个可测空间，f 是 $E\in\mathscr{S}$ 上的广义实值函数，则$\forall a,b,c\in\mathbf{R}\,(b<c)$，下列任一条件都是 f 在 E 上关于$\mathscr{S}$可测的充要条件:**

1) $E[f>a]\in\mathscr{S}$, 2) $E[f\leqslant a]\in\mathscr{S}$, 3) $E[f<a]\in\mathscr{S}$.

定理 4.4.2 **设$(X,\mathscr{S})$是一个可测空间，f, g 都是 $E\in\mathscr{S}$ 上关**

于$\mathscr{S}$可测的函数，那么

1) 对任何实数α，αf也是E上关于$\mathscr{S}$可测的函数；

2) $f+g$、$f\cdot g$以及$g\neq 0$时f/g也都是E上关于$\mathscr{S}$可测的函数；

3) $\max(f,g)$、$\min(f,g)$都是E上关于$\mathscr{S}$可测的函数.

定理 4.4.3 设$(X,\mathscr{S})$是一个可测空间，f是$E\in\mathscr{S}$上关于$\mathscr{S}$可测的非负函数，则存在E上一列关于$\mathscr{S}$的非负递增简单函数$\{\varphi_n(x)\}$，使$\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(x)=f(x)\ (\forall x\in E)$.

定理 4.4.4 设$(X,\mathscr{S})$是一个可测空间，$\{f_n\}$是$E\in\mathscr{S}$上一列关于$\mathscr{S}$可测的函数，则$\sup\limits_n f_n(x)$、$\inf\limits_n f_n(x)$、$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} f_n(x)$、$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} f_n(x)$也都是$E$上关于$\mathscr{S}$可测的函数.

推论 4.4.5 设$(X,\mathscr{S})$是一个可测空间，$\{f_n\}$是$E\in\mathscr{S}$上一列关于$\mathscr{S}$可测的函数. 如果$\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)\ (\forall x\in E)$，则$f(x)$是$E$上关于$\mathscr{S}$可测的函数.

4.4.2 抽象可测函数列的收敛性

以下我们始终设$(X,\mathscr{S},\mu)$是完全测度空间，和前面讨论Lebesgue可测函数列收敛性的情形相类似，我们可以在$E\in\mathscr{S}$上引入几乎处处收敛、几乎一致收敛和依测度收敛之概念. 但在概念的叙述及记号上都必须指明是关于什么测度而言. 例如，$\{f_n\}$在$E\in\mathscr{S}$上关于测度μ几乎处处收敛于f，是指$\mu(E[f_n\not\to f])=0$，记为$f_n\xrightarrow[\mu]{\text{a.e.}}f$于$E$. 又如$\{f_n\}$在$E\in\mathscr{S}$上关于测度$\mu$几乎一致收敛于$f$，记为$f_n\xrightarrow[\mu]{\text{a.u.}}f$于$E$. $\{f_n\}$在$E\in\mathscr{S}$上依测度μ收敛于f，记为$f_n\xRightarrow[\mu]{}f$于E. 关于这三种收敛性的相互关系及依测度收敛的基本性质，定理4.2.3—定理4.2.5基本上都可以搬到完全测度空间$(X,\mathscr{S},\mu)$上可测函数列的收敛性理论中来.

第五章　积分论

本章在 Lebesgue 测度理论的基础上建立 Lebesgue 积分理论，这是实变函数论的重点内容．此外对于一般测度空间 $(X,\mathscr{S},\mu)$ 上可测函数的积分及 Lebesgue-Stieltjes积分也作一个扼要介绍．

为了叙述方便，我们约定：今后凡说"积分"、"可积"，当无特别声明时指的是"Lebesgue 积分"、"Lebesgue 可积"．

§5.1　Lebesgue 积分的定义及初等性质

本节将分三步来建立 Lebesgue 积分的概念：先建立非负简单函数的积分，再建立非负可测函数的积分，然后建立一般可测函数的积分．

5.1.1　非负简单函数的积分

在建立非负简单函数的积分概念之前，我们先给出一个定理．

定理 5.1.1　设 $\varphi(x)$是 $E\in\mathscr{L}_q$ 上的非负简单函数，则对$\varphi(x)$的任一初等分解

$$\varphi(x)=\sum_{i=1}^{n}c_i\chi_{E_i}(x),\ x\in E,$$

都有

$$mG(E;\varphi)=\sum_{i=1}^{n}c_i mE_i. \tag{5.1.1}$$

证明　由于

$$G(E;\varphi)=\{(x;z)\mid x\in E,0\leqslant z<\varphi(x)\}$$

$$= \bigcup_{i=1}^{n} \{(x;z) \mid x \in E_i, 0 \leqslant z < c_i\}$$

$$= \bigcup_{i=1}^{n} (E_i \times [0, c_i)) \in \mathscr{L}_{q+1}.$$

并且$(E_i \times [0,c_i)) \cap (E_j \times [0,c_j)) = \varnothing\ (i \neq j)$.故(5.1.1)式成立.证毕.

定义 5.1.1 说明,(5.1.1)式右端的和数(有限或$+\infty$)只与φ和E有关,而与φ的初等分解的具体形式无关.

定义 5.1.1 设$\varphi(x)$是$E \in \mathscr{L}_q$上的非负简单函数,$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{E_i}(x)\ (x \in E)$是$\varphi(x)$的一个初等分解.我们称和数$\sum_{i=1}^{n} c_i mE_i$为$\varphi(x)$在$E$上的积分,记作$(L)\int_E \varphi(x)dx$或$(L)\int_E \varphi dx$,简记为$\int_E \varphi(x)dx$或$\int_E \varphi dx$.当此积分为有限数时,称$\varphi(x)$在$E$上Lebesgue可积,简称$\varphi(x)$在$E$上可积,记作$\varphi \in L(E)$或$\varphi \in L_E$.

例 1 设$\varphi(x)$是$[a,b]$上的非负阶梯函数,$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{I_i}(x)$ $(x \in [a,b])$是$\varphi(x)$的一个初等分解.则$\varphi \in L[a,b]$,且

$$(L)\int_{[a,b]} \varphi(x)dx = \sum_{i=1}^{n} c_i mI_i = (R) \int_a^b \varphi(x)dx.$$

由上述定义和定理 5.1.1 可立即得到

推论 5.1.2 设$\varphi(x)$是$E \in \mathscr{L}_q$上的非负简单函数,则

$$\int_E \varphi(x)dx = mG(E;\varphi). \tag{5.1.2}$$

推论 5.1.2 指出,非负简单函数的积分就是它的下方图形的Lebesgue测度.

非负简单函数的积分有如下的性质:

定理 5.1.3 设 $\varphi(x),\psi(x)$是 $E\in\mathscr{L}_q$ 上的非负简单函数.

1) 若在 E 上 $\varphi(x)\leqslant\psi(x)$,则 $\int_E\varphi(x)dx\leqslant\int_E\psi(x)dx$;

2) $\int_E[\varphi(x)+\psi(x)]dx=\int_E\varphi(x)dx+\int_E\psi(x)dx$;

3) 若实数 $c\geqslant0$, 则$\int_E c\varphi(x)dx=c\int_E\varphi(x)dx$.

证明 1) 由于 $G(E;\varphi)\subset G(E;\psi)$,从而 $mG(E;\varphi)\leqslant mG(E;\psi)$,故1) 成立.

2) 设 $\varphi(x),\psi(x)$有如下的初等分解

$$\varphi(x)=\sum_{i=1}^{n}c_i\chi_{E_i}(x)(x\in E),\psi(x)=\sum_{j=1}^{k}d_j\chi_{F_j}(x)(x\in E),$$

则

$$\varphi(x)+\psi(x)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}(c_i+d_j)\chi_{E_i\cap F_j}(x)(x\in E),$$

从而

$$\begin{aligned}\int_E(\varphi+\psi)dx&=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}(c_i+d_j)m(E_i\cap F_j)\\&=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}c_im(E_i\cap F_j)+\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n}d_jm(E_i\cap F_j)\\&=\sum_{i=1}^{n}c_imE_i+\sum_{j=1}^{k}d_jmF_j\\&=\int_E\varphi dx+\int_E\psi dx.\end{aligned}$$

3) 设 $\varphi(x)=\sum_{i=1}^{n}d_i\chi_{E_i}(x)(x\in E)$是 $\varphi(x)$的一个初等分解,则 $c\varphi(x)=\sum_{i=1}^{n}cd_i\chi_{E_i}(x)(x\in E)$便是 $c\varphi(x)$的一个初等分解. 因此,

$$\int_E c\varphi(x)dx = \sum_{i=1}^{n} cd_i mE_i = c\sum_{i=1}^{n} d_i mE_i = c\int_E \varphi(x)dx.$$ 证毕

5.1.2 非负可测函数的积分

定义 5.1.2 设 $f(x)$是 $E\in\mathscr{L}_q$ 上的非负可测函数，我们定义 $f(x)$在E上的积分为

$$\int_E f(x)dx = \sup\left\{\int_E \varphi dx \,\middle|\, \varphi \text{ 为}E\text{上的简单函数，且 } 0\leqslant \varphi(x)\leqslant f(x)(x\in E)\right\}.$$

当此积分为有限数时，称 $f(x)$在E上 Lebesgue 可积，简称 $f(x)$在E上可积，记作 $f\in L(E)$ 或 $f\in L_E$.

显然当 $f(x)$是非负简单函数时，此定义与定义 5.1.1相一致.

定理 5.1.4 **若 $f(x)$是 $E\in\mathscr{L}_q$ 上的非负可测函数，则**

$$\int_E f(x)dx = mG(E;f). \tag{5.1.3}$$

证明 据定理 4.1.7，$G(E;f)$可测. 若 $\varphi(x)$是E上的简单函数且满足 $0\leqslant\varphi(x)\leqslant f(x)(x\in E)$，则 $G(E;\varphi)\subset G(E;f)$，从而

$$\int_E \varphi(x)dx = mG(E;\varphi)\leqslant mG(E;f).$$

再由定义 5.1.2，即知 $\int_E f(x)dx\leqslant mG(E;f)$.

再证相反的不等式. 由定理 4.1.6 知，存在E上的一列递增的非负简单函数$\{\varphi_n(x)\}$，使$\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(x)=f(x)(x\in E)$. 从而 $G(E;\varphi_n)\subset G(E;\varphi_{n+1})$ $(n=1,2,\cdots)$，且

$$\lim_{n\to\infty} G(E;\varphi_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} G(E;\varphi_n) = G(E;f).$$

据 Lebesgue 测度的下连续性，

$$\lim_{n\to\infty} mG(E;\varphi_n) = mG(E;f),$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\int_E \varphi_n(x)dx = mG(E;f). \tag{5.1.4}$$

据定义 5.1.2, $\forall n\in\mathbf{N}$, $\int_E \varphi_n(x)dx \leqslant \int_E f(x)dx$, 所以

$$\int_E f(x)dx \geqslant mG(E;f).$$

故(5.1.3)式成立. 证毕.

定理 5.1.4 指出，非负可测函数的积分就是它的下方图形的 Lebesgue 测度.

例2 设 $f(x)$是 $E\in\mathscr{L}_q$ 上的非负可测函数，相应于每个自然数 n，作 E 上的函数

$$[f]_n(x) = [f(x)]_n = \min(f(x), n) = \begin{cases} f(x), & \text{当 } x\in E[f\leqslant n] \text{时}, \\ n, & \text{当 } x\in E[f>n] \text{时}. \end{cases}$$

则

$$\lim_{n\to\infty}\int_E [f(x)]_n dx = \int_E f(x)dx. \tag{5.1.5}$$

证明 显然, $[f(x)]_n (n=1,2,\cdots)$在 E 上非负可测, $[f(x)]_n \leqslant [f(x)]_{n+1} (n=1,2,\cdots)$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}[f(x)]_n = f(x)(x\in E)$. 从而

$$G(E;[f]_n)\subset G(E;[f]_{n+1})(n=1,2,\cdots)$$

且

$$\lim_{n\to\infty} G(E;[f]_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} G(E;[f]_n) = G(E;f).$$

由定理 5.1.4 和 Lebesgue 测度的下连续性知

$$\lim_{n\to\infty}\int_E [f(x)]_n dx = \lim_{n\to\infty} mG(E;[f]_n) = mG(E;f) = \int_E f(x)dx.$$

证毕.

由定理 5.1.4 及其证明中的(5.1.4)式立即可得

定理 5.1.5 设 $f(x)$是 $E\in\mathscr{L}_q$ 上的非负可测函数，$\{\varphi_n(x)\}$ 是 E 上的一列递增的非负简单函数，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(x) = f(x)(x\in E)$，则

$$\lim_{n\to\infty}\int_E \varphi_n(x)dx=\int_E f(x)dx. \qquad (5.1.6)$$

注 对于 $E\in\mathscr{L}_q$ 上的非负可测函数 $f(x)$，按照定理 4.1.6 证明中所述的方法，可以具体构造出 E 上的一列递增的非负简单函数 $\{\varphi_n(x)\}$，使 $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(x)=f(x)\ (x\in E)$，这个函数列 $\{\varphi_n(x)\}$ 由 $f(x)$ 完全决定. 如果我们直接把 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_E\varphi_n(x)dx$ 定义为 $f(x)$ 在 E 上的积分，显然与定义 5.1.2 是等价的.

非负可测函数的积分有如下性质.

定理 5.1.6 设 $f(x), g(x)$ 是 $E\in\mathscr{L}_q$ 上的非负可测函数.

1) 若 $mE=0$，则 $\int_E f(x)dx=0$；

2) 若在 E 上 $f(x)\leqslant g(x)$，则 $\int_E f(x)dx\leqslant\int_E g(x)dx$；

3) 若 E 为有限个或可数个两两不交的可测集 E_i 之并 $\bigcup\limits_i E_i$，则

$$\int_E f(x)dx=\sum_i\int_{E_i} f(x)dx;$$

4) $\int_E[f(x)+g(x)]dx=\int_E f(x)dx+\int_E g(x)dx$；

5) 若实数 $c\geqslant 0$，则 $\int_E cf(x)dx=c\int_E f(x)dx$.

证明 1)、2) 由积分的定义立即得证.

3) 由 $E=\bigcup\limits_i E_i$ 知，$G(E;f)=\bigcup\limits_i G(E_i;f)$，由诸 E_i 两两不交，知诸 $G(E_i;f)$ 两两不交，由 $f(x)$ 在 E_i 上可测知诸 $G(E_i;f)$ 可测. 所以，

$$mG(E;f)=\sum_i mG(E_i;f).$$

由定理 5.1.4 即知3) 成立.

4) 存在E上的两个非负递增简单函数列$\{\varphi_n(x)\}$与$\{\psi_n(x)\}$，使 $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(x)=f(x)(x\in E)$，$\lim\limits_{n\to\infty}\psi_n(x)=g(x)(x\in E)$.
从而

$$\lim_{n\to\infty}[\varphi_n(x)+\psi_n(x)]=f(x)+g(x)(x\in E).$$

由定理 5.1.5 及定理 5.1.3 的2)知

$$\begin{aligned}\int_E[f(x)+g(x)]dx&=\lim_{n\to\infty}\int_E[\varphi_n(x)+\psi_n(x)]dx\\&=\lim_{n\to\infty}\left(\int_E\varphi_n(x)dx+\int_E\psi_n(x)dx\right)\\&=\int_E f(x)dx+\int_E g(x)dx.\end{aligned}$$

5) 存在E上的非负递增简单函数列$\{\varphi_n(x)\}$，使$\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(x)=f(x)(x\in E)$. 从而

$$\lim_{n\to\infty}c\varphi_n(x)=cf(x)(x\in E).$$

由定理 5.1.5 及定理 5.1.3 的3)知

$$\int_E cf(x)dx=\lim_{n\to\infty}\int_E c\varphi_n(x)dx=\lim_{n\to\infty}c\int_E\varphi_n(x)dx=c\int_E f(x)dx.$$

证毕.

推论 5.1.7 1) **若非负函数 $f(x)$在 $E\in\mathscr{L}_q$ 上可积，则 $f(x)$在E的任何可测子集 E_0 上也可积.**

2) **设E为$\mathbb{R}^q$中两个不交可测集E_1,E_2之并，若E上的非负函数 $f(x)$分别在 E_1,E_2 上可积，则 $f(x)$在 E 上可积.**

证明 由定理 5.1.6 的3)立即可知. 证毕.

5.1.3 一般可测函数的积分

定义 5.1.3 设 $f(x)$是 $E\in\mathscr{L}_q$ 上的可测函数，若非负可测函数 $f^+(x),f^-(x)$在 E 上的积分不同时为$+\infty$，就称 $f(x)$在 E 上有积分并定义 $f(x)$在 E 上的积分为

$$\int_E f(x)dx=\int_E f^+(x)dx-\int_E f^-(x)dx \tag{5.1.7}$$

(它是有限数或$\pm\infty$). 当此积分为有限数时(即当$f^+(x)$、$f^-(x)$均在E上可积时),称$f(x)$在E上Lebesgue可积,简称$f(x)$在E上可积,记作$f\in L(E)$或$f\in L_E$.

显然当$f(x)$是非负可测函数时,此定义与定义5.1.2相一致.

例3 设$E\in\mathscr{L}_q$, $mE<+\infty$,若$f(x)$在E上有界可测,则$f(x)$在E上可积.

证明 因$f(x)$在E上有界,所以存在$B>0$,使$|f(x)|\leqslant B$ $(x\in E)$. 从而$f^+(x)\leqslant B(x\in E)$, $f^-(x)\leqslant B(x\in E)$. 由定理5.1.6的2)及定义5.1.1知

$$\int_E f^+(x)dx\leqslant\int_E Bdx=BmE<+\infty,$$

$$\int_E f^-(x)dx\leqslant\int_E Bdx=BmE<+\infty.$$

故$f(x)$在E上可积. 证毕.

定理5.1.8 设$f(x)$是$E\in\mathscr{L}_q$上的可测函数,若$f(x)$在E上有积分,则

$$\int_E f(x)dx=mG(E;f^+)-mG(E;f^-). \tag{5.1.8}$$

证明 由定义5.1.3和定理5.1.4立即可知. 证毕

定理5.1.8指出,可测函数如果有积分,这个积分就是它的正部的下方图形的Lebesgue测度减去它的负部的下方图形的Lebesgue测度所得之差.

定理5.1.9 设$f(x)$是$E\in\mathscr{L}_q$上的函数,作$\mathbf{R}^q$上的函数

$$\tilde{f}(x)=\begin{cases}f(x), & \text{当 } x\in E \text{ 时},\\ 0, & \text{当 } x\in\mathbf{R}^q-E \text{ 时},\end{cases}$$

则$f(x)$在E上有积分的充要条件是$\tilde{f}(x)$在$\mathbf{R}^q$上有积分,并且当

$f(x)$、$\hat{f}(x)$**有积分时**，

$$\int_E f(x)dx=\int_{\mathbf{R}^q}\hat{f}(x)dx.$$

证明 易知 $G(E;f^+)=G(\mathbf{R}^q;\hat{f}^+)$，$G(E;f^-)=G(\mathbf{R}^q;\hat{f}^-)$. 若 $f(x)$、$\hat{f}(x)$二者之一有积分，则此二函数均可测，这时由定理 5.1.4 知

$$\int_E f^+(x)dx=mG(E;f^+)=mG(\mathbf{R}^q;\hat{f}^+)=\int_{\mathbf{R}^q}\hat{f}^+(x)dx,$$

$$\int_E f^-(x)dx=mG(E;f^-)=mG(\mathbf{R}^q;\hat{f}^-)=\int_{\mathbf{R}^q}\hat{f}^-(x)dx.$$

所以定理 5.1.9 的结论成立. 证毕.

定理 5.1.9 使我们把函数在 $\mathbf{R}^q$ 中任一可测集上积分的问题归结为函数在整个 $\mathbf{R}^q$ 上积分的问题.

5.1.4 积分的初等性质

本节以下所涉及的集当无特别声明时，都是指 $\mathscr{L}_q$ 中的集.

定理 5.1.10 **若** $f(x)$，$g(x)$**在** E **上可积**，$f(x)\leqslant g(x)$ $(x\in E)$，**则**

$$\int_E f(x)dx\leqslant\int_E g(x)dx.$$

证明 显然 $f^+(x)\leqslant g^+(x)$ $(x\in E)$，$f^-(x)\geqslant g^-(x)$ $(x\in E)$. 由定理 5.1.6 的2) 知

$$\int_E f^+(x)dx\leqslant\int_E g^+(x)dx,\ \int_E f^-(x)dx\geqslant\int_E g^-(x)dx.$$

由定义 5.1.3 知定理 5.1.10 成立. 证毕.

注 把定理 5.1.10 中的条件“可积”改为“有积分”，仍然成立. 下列诸定理哪些可作这样的改动，请读者加以考虑.

定理 5.1.11 **1) 设** $f(x)$**在** E **上可测，则** $f(x)$**在** E **上可积** $\Leftrightarrow$

$|f(x)|$在E上可积.

2) 若$f(x)$在E上可积，则$\left|\int_E f(x)dx\right| \leqslant \int_E |f(x)|dx$.

证明 1) "$\Rightarrow$"：若f在E上可积，则f^+，f^-均在E上可积，而$|f| = f^+ + f^-$，由定理 5.1.6 的4)知

$$\int_E |f| dx = \int_E (f^+ + f^-) dx = \int_E f^+ dx + \int_E f^- dx < +\infty,$$

故$|f|$在E上可积.

"$\Leftarrow$"：若$|f|$在E上可积，由$f^+ \leqslant |f|$，$f^- \leqslant |f|$及定理 5.1.6的2)知f^+，f^-都在E上可积，故f在E上可积.

2) $$\left|\int_E f dx\right| = \left|\int_E f^+ dx - \int_E f^- dx\right| \leqslant \int_E f^+ dx + \int_E f^- dx$$
$$= \int_E (f^+ + f^-) dx = \int_E |f| dx.$$ 证毕.

定理 5.1.12 1) 设E为两个不交可测集E_1，E_2之并，若E上的函数$f(x)$分别在E_1，E_2上可积，则$f(x)$在E上可积.

2) 若$f(x)$在E上可积，则$f(x)$在E的任何可测子集E_0上也可积.

3) 设E为有限个或可数个两两不交的可测集E_i之并$\bigcup_i E_i$，若$f(x)$在E上可积，则

$$\int_E f(x)dx = \sum_i \int_{E_i} f(x)dx. \tag{5.1.9}$$

证明 1) 由题设知$f^+(x)$分别在E_1、E_2上可积，由推论 5.1.7 的2)知$f^+(x)$在E上可积，同理$f^-(x)$在E上可积. 所以$f(x)$在E上可积.

2) 根据推论 5.1.7的1)，类似于1)可证.

3) 由定理 5.1.6 的3)知

$$\int_E f^+ dx = \sum_i \int_{E_i} f^+ dx, \tag{5.1.10}$$

$$\int_E f^- dx = \sum_i \int_{E_i} f^- dx, \tag{5.1.11}$$

以上二式的左边为有限数，故右边的诸项也为有限数. 将(5.1.10)式的两边分别减去(5.1.11)式的两边就得到(5.1.9)式. 证毕.

定理 5.1.13 **1) 若 $mE=0$，则 E 上的任何函数 $f(x)$ 都可积，并且 $\int_E f(x)dx=0$.**

2) 若 $g(x)$ 在 E 上可积，$f(x)\sim g(x)$ 于 E，则 $f(x)$ 在 E 上也可积，且

$$\int_E f(x)dx=\int_E g(x)dx.$$

证明 1) 由 $mE=0$ 知 $f(x)$ 在 E 上可测，由定理 5.1.6 的1知 $\int_E f^+dx$ 与 $\int_E f^-dx$ 均为 0，故 $f(x)$ 在 E 上可积，且 $\int_E f(x)dx=0$.

2) 令 $E_0=E[f\neq g]$，则 $mE_0=0$，由定理 5.1.12 的2)知 g 在 $E-E_0$ 上可积，从而 f 在 $E-E_0$ 上可积. 又由1)知 f 在 E_0 上可积，再由定理 5.1.12的1)知 f 在 E 上可积，并且

$$\int_E f dx=\int_{E-E_0} f dx+\int_{E_0} f dx=\int_{E-E_0} f dx=\int_{E-E_0} g dx$$

$$=\int_{E-E_0} g dx+\int_{E_0} g dx=\int_E g dx. \text{ 证毕.}$$

注 把定理 5.1.13的2)中的"可积"换成"有积分"仍然成立.

定理5.1.13告诉我们，在一个零测度集上任意改变函数的值，既不影响函数的可积性也不影响函数的积分值. 今后当讨论函数积分方面的问题时，若 E_0 是 E 的零测度子集，函数 $f(x)$ 在 $E-E_0$ 上有积分(或可积)，即使 $f(x)$ 在 E_0 上无定义，我们仍说函数 $f(x)$ 在 E 上有积分(或可积)，我们规定 $f(x)$ 在 E 上的积分值就是 $f(x)$ 在 $E-E_0$ 上的积分值. 对于讨论函数的积分来说，我们这种做法不会造成混乱，却可以带来某些方便.

定理 5.1.14 **若 $f(x)$ 在 E 上可积，则 $f(x)$ 在 E 上几乎处处取**

有限值.

证明 记 $E_1=E[f=+\infty]$, $E_2=E[f=-\infty]$. 由于

$$E_1=E[f=+\infty]=\bigcap_{n=1}^{\infty}E[f>n],$$

$$E_2=E[f=-\infty]=\bigcap_{n=1}^{\infty}E[f<-n].$$

所以 E_1、E_2 是 E 的可测子集. 假设 $mE_1=\delta>0$, 显然 $\forall n\in\mathbf{N}$, 在 E_1 上恒有 $f^+(x)\geqslant n$. 据定理 5.1.6,

$$\int_E f^+dx=\int_{E-E_1}f^+dx+\int_{E_1}f^+dx\geqslant\int_{E_1}f^+dx\geqslant\int_{E_1}ndx=nmE_1$$
$$=n\delta.$$

从而 $\int_E f^+dx=+\infty$. 这与 $f(x)$ 在 E 上可积矛盾. 可见 $mE_1=0$. 同理可证 $mE_2=0$. 故 $f(x)$ 在 E 上几乎处处取有限值. 证毕.

定理 5.1.15 **若 $f(x)$, $g(x)$ 都在 E 上可积, 则 $f(x)+g(x)$ 在 E 上可积, 且**

$$\int_E[f(x)+g(x)]dx=\int_E f(x)dx+\int_E g(x)dx. \qquad (5.1.12)$$

证明 令 $E_0=E[f=\pm\infty]\cup E[g=\pm\infty]$, 据定理5.1.14, $mE_0=0$. 再据定理 5.1.13 及其后面的说明, 我们不妨设 $f(x)$, $g(x)$ 在 E 上处处取有限值. 由于

$$(f+g)^+=\max(f+g,0)\leqslant\max(f,0)+\max(g,0)=f^++g^+,$$

$$(f+g)^-=\max(-(f+g),0)\leqslant\max(-f,0)+\max(-g,0)$$
$$=f^-+g^-.$$

而 f^+,g^+,f^-,g^- 均在 E 上可积, 由定理5.1.6 知 $(f+g)^+$ 与 $(f+g)^-$ 在 E 上可积, 从而 $f+g$ 在 E 上可积. 又由于

$$(f+g)^+-(f+g)^-=f+g=f^+-f^-+g^+-g^-,$$

所以 $\qquad (f+g)^++f^-+g^-=(f+g)^-+f^++g^+.$

由定理 5.1.6 知

$$\int_E (f+g)^+ dx + \int_E f^- dx + \int_E g^- dx = \int_E (f+g)^- dx$$
$$+ \int_E f^+ dx + \int_E g^+ dx.$$

通过移项便可得到(5.1.12)式. 证毕.

定理 5.1.16 若 $f(x)$在E上可积, c 是任一实数, 则 $cf(x)$ 在E上可积, 且

$$\int_E cf(x)dx = c\int_E f(x)dx. \tag{5.1.13}$$

证明 1° 设 $c \geqslant 0$, 由定理 5.1.6 知

$$\int_E cf^+ dx = c\int_E f^+ dx, \tag{5.1.14}$$

$$\int_E cf^- dx = c\int_E f^- dx. \tag{5.1.15}$$

由于$(cf)^+ = \max(cf, 0) = c\max(f, 0) = cf^+$, 同理$(cf)^- = cf^-$, 而 f^+, f^-在E上可积, 所以$(cf)^+, (cf)^-$在E上可积, 从而cf在E上可积. (5.1.14)式两边分别减去(5.1.15)式的两边便得(5.1.13)式.

2° 设 $c = -1$, 这时 $cf = -f, (-f)^+ = f^-$, $(-f)^- = f^+$. 于是

$$\int_E (-f)dx = \int_E f^- dx - \int_E f^+ dx = -\left(\int_E f^+ dx - \int_E f^- dx\right)$$
$$= -\int_E f dx.$$

3° 设 $c < 0$, 这时 $cf = (-1)\cdot|c|\cdot f$. 由1°与2°即知

$$\int_E cf dx = \int_E (-1)\cdot|c|\cdot f dx = -\int_E |c| f dx = -|c|\int_E f dx$$
$$= c\int_E f dx.$$ 证毕.

定理 5.1.15 与定理 5.1.16 所述的可积函数的性质合起来称

为可积函数积分的线性性质.

定理 5.1.17 设 $f(x)$是 E 上的可测函数，若$\int_E |f(x)|dx=0$，则 $f(x)=0$ a.e. 于 E.

证明 因为 $E[|f|>0]=\bigcup_{n=1}^{\infty}E\left[|f|>\frac{1}{n}\right]$，假设定理的结论不成立，则至少有一个自然数 n_0，使$m\left(E\left[|f|>\frac{1}{n_0}\right]\right)=\delta>0$. 据定理 5.1.6,

$$\int_E |f|dx \geqslant \int_{E[|f|>\frac{1}{n_0}]} |f|dx \geqslant \int_{E[|f|>\frac{1}{n_0}]} \frac{1}{n_0}dx=\frac{\delta}{n_0}>0.$$

这与$\int_E |f|dx=0$矛盾. 故 $f(x)=0$ a.e. 于 E. 证毕.

定理 5.1.18 若 $f(x)$在 E 上可积，则 $\forall \varepsilon>0$，$\exists \delta>0$，使当 $e\subset E, me<\delta$ 时，恒有$\left|\int_e f(x)dx\right|<\varepsilon$.

证明 由题设知$|f(x)|$在 E 上可积. 据定义 5.1.2，存在 E 上的非负简单函数$\varphi(x)$，使在 E 上$\varphi(x)\leqslant|f(x)|$并且$\int_E \varphi dx>\int_E |f|dx-\frac{\varepsilon}{2}$. 因此

$$\int_E (|f|-\varphi)dx<\frac{\varepsilon}{2}.$$

又，显然存在正实数 M，使在 E 上 $\varphi(x)\leqslant M$. 令 $\delta=\frac{\varepsilon}{2M}$，则当 $e\subset E, me<\delta$ 时，

$$\begin{aligned}\left|\int_e f dx\right| &\leqslant \int_e |f|dx=\int_e (|f|-\varphi)dx+\int_e \varphi dx \\ &\leqslant \int_E (|f|-\varphi)dx+\int_e M dx<\frac{\varepsilon}{2}+M\cdot me \\ &<\frac{\varepsilon}{2}+M\cdot\frac{\varepsilon}{2M}=\varepsilon.\end{aligned}$$
证毕.

注 实际上得出了更强的结果：当 $me<\delta(e\subset E)$ 时，有

$$\int_e |f|\,dx<\varepsilon.$$

定理 5.1.18 所描写的性质叫做积分的绝对连续性.

习 题 5.1

1. 设 $\varphi(x)$ 是 $E\in\mathscr{L}_q$ 上的简单函数，且 $\varphi(x)$ 在 E 上有积分，则对于 $\varphi(x)$ 的任一初等分解 $\varphi(x)=\sum_{i=1}^{n}c_i\chi_{E_i}(x)\quad(x\in E)$，都有

$$\int_E \varphi(x)\,dx=\sum_{i=1}^{n}c_i mE_i.$$

2. 如果 $f(x)$ 在 Cantor 完全集 P_0 的点上等于 0，而在 P_0 的具有长度为 3^{-n} 的余区间上等于 n，则 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可积，且 $\int_{[0,1]}f(x)\,dx=3$.

3. 设 $E\in\mathscr{L}_q$，$mE<+\infty$，$f(x)$ 是 E 上的可测函数，$E_n=E[n-1\leqslant f<n]$. 证明：$f(x)$ 在 E 上可积 $\Longleftrightarrow\sum_{n\in Z}|n|mE_n<+\infty$.

4. 设 $E\in\mathscr{L}_q$，$mE<+\infty$，$f(x)$ 在 E 上可积，$e_n=E[|f|\geqslant n]$. 证明：

$$\lim_{n\to\infty}n(me_n)=0.$$

5. 若 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上可积且一致连续，则 $\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$.

6. 设 $f(x)$ 在 $E\in\mathscr{L}_q$ 上有积分，相应于每个自然数 n 作 E 上的函数

$$[f(x)]_n=\begin{cases}f(x)，当\ x\in E[|f|\leqslant n]时，\\ n，\ 当\ x\in E[f>n]时，\\ -n，\ 当\ x\in E[f<-n]时.\end{cases}$$

证明

$$\lim_{n\to\infty}\int_E[f(x)]_n\,dx=\int_E f(x)\,dx.$$

7. 设 $E\in\mathscr{L}_q$，且 $mE>0$，$f(x)$ 在 E 上可积. 若对于 E 上的任何有界可测函数 $g(x)$，都有 $\int_E f(x)g(x)\,dx=0$，则 $f(x)=0$ a.e. 于 E.

§5.2 Lebesgue 积分与 Riemann积分的关系

为了书写方便，我们把“Riemann 积分”、“Riemann 可积”

简写作"R 积分"、"R 可积"，而把"Lebesgue 积分"、"Lebesgue 可积"简写作"L 积分"、"L 可积". 并把数列$\{x_n\}$单调不减且收敛于x_0，记作 $x_n \uparrow x_0$；把$\{x_n\}$单调不增且收敛于 x_0，记作 $x_n \downarrow x_0$.

5.2.1 L 积分与 R 积分的关系

定理 5.2.1 若函数 $f(x)$在$[a,b]\subset\mathbb{R}^1$ 上 R 可积，则 $f(x)$在$[a,b]$上 L 可积，且

$$(L)\int_{[a,b]} f(x)dx = (R)\int_a^b f(x)dx. \qquad (5.2.1)$$

证明 记$[a,b]$为 E. 由 $f(x)$在E上 R 可积知，存在实数 M_1、M_2 使在E上 $M_1\leqslant f(x)\leqslant M_2$.

相应于每个自然数 n，把$[a,b]$分成 2^n 等份，得到分划

$$D_n: a=x_0^{(n)}<x_1^{(n)}<\cdots<x_{2^n}^{(n)}=b.$$

显然分划 D_{n+1} 的诸分点包含分划 D_n 的诸分点. 分划 D_n 的步长(即相邻两分点间的距离) $\lambda_n=\dfrac{b-a}{2^n}$，当 $n\to\infty$ 时，$\lambda_n\to 0$.

1° 相应于 D_n，作E上的简单函数

$$\underline{f}_n(x)=\begin{cases} f(a), & \text{当 } x=a \text{ 时}, \\ m_k^{(n)}, & \text{当 } x\in(x_{k-1}^{(n)},x_k^{(n)}],\ k=1,2,\cdots,2^n, \end{cases} \qquad (5.2.2)$$

其中 $m_k^{(n)}=\inf\{f(x)\mid x\in[x_{k-1}^{(n)},x_k^{(n)}]\}$.

由习题 5.1 的第 1 题知，$\underline{f}_n(x)$在E上的 L 积分为

$$(L)\int_E \underline{f}_n(x)dx=\sum_{k=1}^{2^n} m_k^{(n)}\cdot m(x_{k-1}^{(n)},x_k^{(n)}]$$

$$=\sum_{k=1}^{2^n} m_k^{(n)}(x_k^{(n)}-x_{k-1}^{(n)}). \qquad (5.2.3)$$

(5.2.3)式的后端恰是 $f(x)$关于分划 D_n 的 Darboux 下和 s_n. 由 $f(x)$在E上 R 可积知

$$s_n \uparrow (R)\int_a^b f(x)dx. \tag{5.2.4}$$

再看(5.2.3)式的前端．由于 $M_1 \leqslant \underline{f}_1(x) \leqslant \underline{f}_2(x) \leqslant \cdots \leqslant f(x)$ $(x\in E)$，故存在 E 上的函数 $\underline{f}(x)$ 使 $\underline{f}_n(x) \uparrow \underline{f}(x)$ $(x\in E)$．显然 $\underline{f}(x)$ 是有界可测函数且 $\underline{f}(x) \leqslant f(x)$ $(x\in E)$，非负简单函数列 $[\underline{f}_n(x)-M_1] \uparrow [\underline{f}(x)-M_1]$．由定理 5.1.5 知

$$(L)\int_E [\underline{f}_n(x)-M_1]dx \uparrow (L)\int_E [\underline{f}(x)-M_1]dx,$$

再由积分的线性性质知

$$(L)\int_E \underline{f}_n(x)dx \uparrow (L)\int_E \underline{f}(x)dx. \tag{5.2.5}$$

2° 相应于 D_n，作 E 上的简单函数

$$\bar{f}_n(x)=\begin{cases} f(a), & \text{当 } x=a \text{ 时}, \\ M_k^{(n)}, & \text{当 } x\in(x_{k-1}^{(n)}, x_k^{(n)}] \text{时}, k=1,2,\cdots,2^n. \end{cases} \tag{5.2.6}$$

其中 $M_k^{(n)}=\sup\{f(x)\mid x\in[x_{k-1}^{(n)}, x_k^{(n)}]\}$．

由习题 5.1 的第 1 题知，$\bar{f}_n(x)$ 在 E 上的 L 积分为

$$(L)\int_E \bar{f}_n(x)dx=\sum_{k=1}^{2^n} M_k^{(n)}(x_k^{(n)}-x_{k-1}^{(n)}). \tag{5.2.7}$$

(5.2.7)式的右端恰是 $f(x)$ 关于分划 D_n 的 Darboux 上和 S_n．由 $f(x)$ 在 E 上 R 可积知

$$S_n \downarrow (R)\int_a^b f(x)dx. \tag{5.2.8}$$

再看(5.2.7)式的左端．由于 $M_2 \geqslant \bar{f}_1(x) \geqslant \bar{f}_2(x) \geqslant \cdots \geqslant f(x)$ $(x\in E)$，故存在 E 上的函数 $\bar{f}(x)$ 使 $\bar{f}_n(x) \downarrow \bar{f}(x)$．显然 $\bar{f}(x)$ 是有界可测函数且 $f(x) \leqslant \bar{f}(x)$ $(x\in E)$，非负简单函数列 $[M_2-\bar{f}_n(x)]$ $\uparrow [M_2-\bar{f}(x)]$．由定理 5.1.5及积分的线性性质知

$$(L)\int_E \bar{f}_n(x)dx \downarrow (L)\int_E \bar{f}(x)dx. \qquad (5.2.9)$$

由 1° 与 2° 知$\underline{f}(x)\leqslant f(x)\leqslant \bar{f}(x)(x\in E)$，并且$\underline{f}(x)$与$\bar{f}(x)$在 E 上的 L 积分都等于$(R)\int_a^b f(x)dx$，所以

$$(L)\int_E [\bar{f}(x)-\underline{f}(x)]dx=0.$$

由于$[\bar{f}(x)-\underline{f}(x)]$在 E 上非负可测，由定理 5.1.17 知

$$\underline{f}(x)=\bar{f}(x)\text{a. e. 于 } E, \qquad (5.2.10)$$

从而$\underline{f}(x)=f(x)=\bar{f}(x)$a. e. 于 E. 据定理 5.1.13 的2) 知，$f(x)$ 在E上L可积，并且

$$(L)\int_E f(x)dx=(L)\int_E \underline{f}(x)dx=(L)\int_E \bar{f}(x)dx$$
$$=(R)\int_a^b f(x)dx. \text{ 证毕.}$$

注 1 在 $\mathbf{R}^q$ 中和定理 5.2.1 类似的定理也成立.

注 2 定理 5.2.1 的逆命题不成立. 例如，[0, 1]上的 Dirichlet 函数

$$D(x)=\begin{cases}1, \text{当 } x \text{ 是}[0,1]\text{中的有理数时},\\ 0, \text{当 } x \text{ 是}[0,1]\text{中的无理数时}\end{cases}$$

是非负简单函数，当然L可积，但它不是R可积的.

由此说明，L 积分确实是 R 积分的推广.

今后为了书写方便起见，在不致和R积分发生混淆的情况下，$f(x)$在闭区间$[a,b]\subset\mathbf{R}^1$上的L积分仍将简记为$\int_a^b f(x)dx$.

*5.2.2 R 可积函数的构造

上面定理 5.2.1 的证明中，除了 (5.2.4)、(5.2.8) 两式及 (5.2.9)式后面的几步外，其余的论断仅基于 $f(x)$在$[a, b]$上有界

的条件. 下面的讨论将引用这些论断.

设 $f(x)$是$[a,b]$上的有界函数，作$[a,b]$上的函数

$$m(x)=\sup_{\delta>0}\inf_{t\in(x-\delta,x+\delta)}f(t),$$

$$M(x)=\inf_{\delta>0}\sup_{t\in(x-\delta,x+\delta)}f(t).$$

$m(x)$与$M(x)$分别称为$f(x)$的 Baire 下函数与 Baire 上函数.

定理 5.2.2 设 $f(x)$是$[a,b]$上的有界函数,则 $f(x)$在点 $x_0\in[a,b]$连续$\Leftrightarrow m(x_0)=M(x_0)$.

证明 “$\Rightarrow$”: 设 $\delta>0$,令

$$m_\delta(x_0)=\inf_{x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)}f(x),$$

$$M_\delta(x_0)=\sup_{x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)}f(x),$$

则当 δ 变小时,$m_\delta(x_0)$不减而$M_\delta(x_0)$不增,因此

$$m(x_0)=\lim_{\delta\to0^+}m_\delta(x_0),\ M(x_0)=\lim_{\delta\to0^+}M_\delta(x_0).$$

若 $f(x)$在 x_0 点连续,则 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, 当 $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)\cap[a,b]$时,

$$f(x_0)-\varepsilon<f(x)<f(x_0)+\varepsilon,$$

因此

$$f(x_0)-\varepsilon\leqslant m_\delta(x_0)\leqslant M_\delta(x_0)\leqslant f(x_0)+\varepsilon.$$

令 $\delta\to0$,得到

$$f(x_0)-\varepsilon\leqslant m(x_0)\leqslant M(x_0)\leqslant f(x_0)+\varepsilon.$$

再令 $\varepsilon\to0$,就得到

$$m(x_0)=M(x_0).$$

“$\Leftarrow$”: 设 $m(x_0)=M(x_0)$, 此时 $f(x_0)=m(x_0)=M(x_0)$. $\forall\varepsilon>0$,取 $\delta>0$,使下面两个不等式

$$m(x_0)-\varepsilon<m_\delta(x_0)\leqslant m(x_0),\ M(x_0)\leqslant M_\delta(x_0)<M(x_0)+\varepsilon$$

都成立. 从而

$$f(x_0)-\varepsilon<m_\delta(x_0),\ M_\delta(x_0)<f(x_0)+\varepsilon.$$

当 $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)\cap[a,b]$ 时，$m_\delta(x_0)\leqslant f(x)\leqslant M_\delta(x_0)$，因此

$$f(x_0)-\varepsilon<f(x)<f(x_0)+\varepsilon.$$

故 $f(x)$ 在 x_0 点连续．证毕．

定理 5.2.3 **设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的有界函数，$\underline{f}_n(x)$，$\bar{f}_n(x)$ 是定理 5.2.1 证明中(5.2.2)、(5.2.6)两式所定义的函数．若 $x_0\in[a,b]$，$x_0\neq x_k^{(n)}$ $(k=0,1,\cdots,2^n;n=1,2,\cdots)$，则**

$$\lim_{n\to\infty}\underline{f}_n(x_0)=m(x_0),\ \lim_{n\to\infty}\bar{f}_n(x_0)=M(x_0).$$

证明 首先我们声明，以下证明中所用的记号，凡与定理 5.2.1 及定理 5.2.2 证明中所用记号相同时，其意义也相同．

对于分划 D_n，设包含 x_0 的小区间为 $[x_{k_0-1}^{(n)},x_{k_0}^{(n)}]$，由题设知 $x_0\in(x_{k_0-1}^{(n)},x_{k_0}^{(n)})$，因此，$\exists\delta>0$，使 $(x_0-\delta,x_0+\delta)\subset[x_{k_0-1}^{(n)},x_{k_0}^{(n)}]$，从而 $\underline{f}_n(x_0)\leqslant m_\delta(x_0)$，令 $\delta\to0$，得 $\underline{f}_n(x_0)\leqslant m(x_0)$，由于 $\underline{f}_n(x_0)\uparrow\underline{f}(x_0)$，所以 $\underline{f}(x_0)\leqslant m(x_0)$．

另一方面，任意固定 $\delta>0$，$\exists$ 自然数 N，使当 $n\geqslant N$ 时，包含 x_0 的区间 $[x_{k_0-1}^{(n)},x_{k_0}^{(n)}]\subset(x_0-\delta,x_0+\delta)$，从而当 $n\geqslant N$ 时，$\underline{f}_n(x_0)\geqslant m_\delta(x_0)$．由于 $\underline{f}_n(x_0)\uparrow\underline{f}(x_0)$，所以 $\underline{f}(x_0)\geqslant m_\delta(x_0)$．令 $\delta\to0$，就得到

$$\underline{f}(x_0)\geqslant m(x_0).$$

故 $\underline{f}(x_0)=m(x_0)$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}\underline{f}_n(x_0)=m(x_0)$．

同理可证 $\lim\limits_{n\to\infty}\bar{f}_n(x_0)=M(x_0)$．证毕．

注 定理 5.2.3 说明，$m(x)$，$M(x)$ 分别与定理 5.2.1 证明中导出的有界可测函数 $\underline{f}(x)$，$\bar{f}(x)$ 在 $[a,b]$ 上几乎处处相等．

定理 5.2.4 **设 $f(x)$ 是 $E=[a,b]$ 上的有界函数，则 $f(x)$ 在 E 上 R 可积 $\Leftrightarrow f(x)$ 的不连续点的全体是一个测度为零的点集．**

证明 "$\Rightarrow$"：设 $f(x)$ 在 E 上 R 可积，由定理 5.2.1 的证明

知，$\underline{f}(x)=\bar{f}(x)$a. e. 于 E(即(5.2.10)式)．再由定理 5.2.3 的证明及其注知 $m(x)=M(x)$a. e. 于 E. 再由定理 5.2.2 就知道 $f(x)$ 的不连续点的全体是一个零测度集.

"$\Leftarrow$"：设 $f(x)$ 的不连续点的全体为一零测度集，据定理 5.2.2，$m(x)=M(x)$a. e. 于 E. 据定理 5.2.3 的证明及其注，$\underline{f}(x)=\bar{f}(x)$a. e. 于 E. 由于 $\underline{f}(x)$、$\bar{f}(x)$ 是 E 上的有界可测函数，据§5.1 例 3，$\underline{f}(x)$、$\bar{f}(x)$在 E 上可积，且

$$(L)\int_E \underline{f}(x)dx=(L)\int_E \bar{f}(x)dx.$$

设 D_n 为定理 5.2.1 证明中所述的分划，$f(x)$ 相应于分划 D_n 的 Darboux 下和与上和分别为 s_n 与 S_n. 由定理 5.2.1 证明中的 (5.2.3)、(5.2.5)、(5.2.7)、(5.2.9)四式知

$$s_n \uparrow (L)\int_E \underline{f}(x)dx,\ S_n \downarrow (L)\int_E \bar{f}(x)dx.$$

于是 $S_n-s_n\to 0(n\to\infty)$，因此 $f(x)$在 E 上 R 可积．证毕.

定理 5.2.4 揭示了 Riemann 可积函数的构造．定理 5.2.4 的得到从一个方面反映了 Lebesgue 测度及积分理论的深刻性.

5.2.3 Lebesgue 积分与广义 Riemann 积分的关系

数学分析中的无穷积分及瑕积分统称为广义 Riemann 积分(简称广义 R 积分).

首先讨论无穷积分与 L 积分的关系.

定理 5.2.5 **设 $f(x)$是$[0,+\infty)$ 上的非负函数，当 $t\in(0,+\infty)$时$f(x)$在$[0,t]$上 R 可积，则广义 R 积分(广义R)$\int_0^{+\infty} f(x)dx$ 有确定的值 a(a 为有限数或$+\infty$)，并且**

$$(L)\int_{[0,+\infty)} f(x)dx=a.$$

证明 显然 $\lim\limits_{t\to+\infty}(R)\int_0^t f(x)dx$ 存在，记其值为 a，即

$$(\text{广义}R)\int_0^{+\infty} f(x)dx=a.$$

$\forall n\in\mathbf{N}$, $f(x)$在$[0,n]$上R可积，由定理 5.2.1 知$f(x)$在$[0,n]$上可测，从而 $f(x)$在$\bigcup_{n=1}^{\infty}[0,n]=[0,+\infty)$上可测. 据定理 5.1.6,

$$\begin{aligned}(L)\int_{[0,+\infty)} f(x)dx&=\sum_{i=1}^{\infty}(L)\int_{[i-1,i)} f(x)dx\\&=\lim_{n\to\infty}(L)\int_{[0,n]} f(x)dx\\&=\lim_{n\to\infty}(R)\int_0^n f(x)dx=a.\end{aligned}$$ 证毕.

定理 5.2.6 **设 $f(x)$是$[0,+\infty)$上的函数，当 $t\in(0,+\infty)$时 $f(x)$在$[0,t]$上 R 可积，并且(广义 R)$\int_0^{+\infty} f(x)dx$ 为有限数 a，则**

$$(\text{广义 }R)\int_0^{+\infty}|f(x)|dx$$

有确定的值 b，并且

1) **当 b 为有限数时**

$$(L)\int_{[0,+\infty)} f(x)dx=a;$$

2) **当 $b=+\infty$时，$f(x)$在$[0,+\infty)$上没有 L 积分.**

证明 当 $t\in(0,+\infty)$时 $f(x)$在$[0,t]$上R可积，故$|f(x)|$在$[0,t]$上R可积，从而 $f^{\pm}(x)=\frac{1}{2}[|f(x)|\pm f(x)]$在$[0,t]$上$R$可积，由定理 5.2.5 知(广义 R)$\int_0^{+\infty}|f(x)|dx$ 有确定的值 b，并且

$$\begin{aligned}(L)\int_{[0,+\infty)} f^{\pm}(x)dx&=(\text{广义 }R)\int_0^{+\infty} f^{\pm}(x)dx\\&=\lim_{t\to+\infty}(R)\int_0^t \frac{1}{2}[|f(x)|\pm f(x)]dx\end{aligned}$$

$$= \lim_{t\to+\infty}\left[(R)\int_0^t \frac{1}{2}|f(x)|dx \pm (R)\int_0^t \frac{1}{2}f(x)dx\right]$$

$$=\frac{1}{2}(b\pm a).$$

1) 当 b 为有限数时，$f^+(x)$，$f^-(x)$在$[0, +\infty)$上的 L 积分均为有限数，所以

$$(L)\int_{[0,+\infty)} f(x)dx=$$

$$(L)\int_{[0,+\infty)} f^+(x)dx-(L)\int_{[0,+\infty)} f^-(x)dx$$

$$=\frac{1}{2}(b+a)-\frac{1}{2}(b-a)=a.$$

2) 当 $b=+\infty$时，$f^+(x)$，$f^-(x)$在$[0, +\infty)$上的 L 积分均为 $+\infty$，所以 $f(x)$在$[0,+\infty)$上没有 L 积分. 证毕.

瑕积分与 L 积分的关系和上述无穷积分与 L 积分的关系类似.

由此可见，当广义 R 积分有确定的值时未必有相应的 L 积分，所以 L 积分虽然是 R 积分的推广，却不是广义 R 积分的推广.

习 题 5.2

1. 证明：$[0, 1]$上的 Cantor 完全集 P_0 的特征函数 $\chi_{P_0}(x)$在$[0, 1]$上 Riemann 可积.

2. 利用 Lebesgue 积分的性质证明：若 $f(x)$是在$[a,b]$ $(a<b)$ 上处处取正值的 Riemann 可积函数，则 $(R)\int_a^b f(x)dx>0$.

3. 设 $f(x)$是$[a,b]$上的有界函数，其不连续点集记为 D，若 D 只有可数个极限点，试证明 $f(x)$是$[a,b]$上的 Riemann 可积函数.

4. 设 $f\in L[a,b]$，且$\forall x\in[a,b]$，有$\int_a^x f(t)dt=0$，则$f(x)=0$ a. e. 于$[a,b]$.

§5.3 逐项积分定理

本节主要讨论积分和极限交换顺序的问题. 我们将看到在处理积分和极限交换顺序这个问题上,Lebesgue 积分所要求的条件要比 Riemann 积分弱得多. 所以本节中的一些定理在一般分析数学中被经常引用.

本节所涉及的点集如无特别声明,都是指 $\mathscr{L}_q$ 中的集.

5.3.1 非负可测函数列的逐项积分定理

定理 5.3.1(Levi 逐项积分定理) 设 $\{f_n(x)\}$ 是 E 上的非负可测函数列, $f_n(x)\leqslant f_{n+1}(x)(x\in E;n=1,2,\cdots)$, 则

$$\int_E \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx=\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)dx.$$

证明 由题设条件知, 存在 E 上的非负可测函数 $f(x)$, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)(x\in E)$, 并且

$$G(E;\ f_n)\subset G(E;\ f_{n+1})(n=1,2,\cdots),$$

$$\lim_{n\to\infty} G(E;\ f_n)=\bigcup_{n=1}^{\infty} G(E;f_n)=G(E;f).$$

由于 $G(E;f_n)(n=1,2,\cdots)$ 及 $G(E;f)$ 都是可测集, 据测度的下连续性,

$$\lim_{n\to\infty} mG(E;f_n)=mG(E;f).$$

再由定理 5.1.4 知

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)dx=\lim_{n\to\infty} mG(E;f_n)=mG(E;f)$$

$$=\int_E f(x)dx=\int_E \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx.$$ 证毕.

Levi 定理的成立, 实质上是 Lebesgue 可测集的全体对"可数

并"运算的封闭性及Lebesgue测度的下连续性的反映. 下面的例1说明,对Riemann积分来说,与**Levi**定理相应的提法不成立.

例1 设$E=[0,1]$,E中有理数的全体为$\{r_1,r_2,r_3,\cdots\}$. 作E上的函数列

$$f_n(x)=\begin{cases}1, & 当\ x\in\{r_1,r_2,\cdots,r_n\}时,\\ 0, & 当\ x\in E-\{r_1,r_2,\cdots,r_n\}时,\end{cases}\quad n=1,2,\cdots.$$

显然$\{f_n(x)\}$是E上的非负R可积函数列,且$f_n(x)\leqslant f_{n+1}(x)(x\in E;n=1,2,\cdots)$,但是$\{f_n(x)\}$的极限函数(即Dirichlet函数)在$E$上不是$R$可积的. 因此对于$\lim\limits_{n\to\infty}(R)\int_0^1 f_n(x)dx$来说极限号不能与积分号交换.

定理 5.3.2(Lebesgue**逐项积分定理**) **设**$\{f_n(x)\}$**是**E**上的非负可测函数列,则**

$$\int_E\left(\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)\right)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_E f_n(x)dx.$$

证明 相应于每个自然数k,令$g_k(x)=\sum\limits_{n=1}^{k}f_n(x)(x\in E)$,则$g_k(x)(k=1,2,\cdots)$在$E$上非负可测,且$g_k(x)\leqslant g_{k+1}(x)(x\in E;k=1,2,\cdots)$,据定理5.3.1,

$$\int_E\lim_{k\to\infty}g_k(x)dx=\lim_{k\to\infty}\int_E g_k(x)dx.$$

而$\lim\limits_{k\to\infty}g_k(x)$即$\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(x)$,

$$\int_E g_k(x)dx=\sum_{n=1}^{k}\int_E f_n(x)dx,$$

所以

$$\int_E\left(\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)\right)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_E f_n(x)dx.$$ 证毕.

定理 5.3.3(Fatou 引理) 设$\{f_n(x)\}$是E上的非负可测函数列，则

$$\int_E \varliminf_{n\to\infty} f_n(x)dx \leqslant \varliminf_{n\to\infty}\int_E f_n(x)dx.$$

证明 相应于每个自然数 n，令

$$g_n(x)=\inf\{f_n(x),f_{n+1}(x),\cdots\} \quad (x\in E),$$

则 $g_n(x)(n=1, 2, \cdots)$ 在E上非负可测，$g_n(x)\leqslant g_{n+1}(x)(x\in E; n=1,2,\cdots)$，

$$\varliminf_{n\to\infty} f_n(x)=\lim_{n\to\infty} g_n(x)(x\in E),$$

且 $g_n(x)\leqslant f_n(x)(x\in E; n=1,2,\cdots)$. 由定理 5.3.1 知

$$\begin{aligned}\int_E \varliminf_{n\to\infty} f_n(x)dx &= \int_E \lim_{n\to\infty} g_n(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_E g_n(x)dx \\ &= \varliminf_{n\to\infty}\int_E g_n(x)dx \leqslant \varliminf_{n\to\infty}\int_E f_n(x)dx.\end{aligned}$$

证毕.

注 定理 5.3.3 结论中的严格不等式可能成立. 见下面例 2.

例 2 设 $E=[0,1]$. 相应于每个自然数 n，作E上的函数

$$f_n(x)=\begin{cases} n, & x\in\left(0,\dfrac{1}{n}\right), \\ 0, & x\in E-\left(0,\dfrac{1}{n}\right), \end{cases}$$

则 $f_n(x)(n=1,2,\cdots)$是E上的非负可测函数，$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=0$ $(x\in E)$，因而$\int_E f(x)dx=0$，但$\int_E f_n(x)dx=\int_{\left(0,\frac{1}{n}\right)} n dx=1$，故

$$\int_E \varliminf_{n\to\infty} f_n(x)dx=0<1=\varliminf_{n\to\infty}\int_E f_n(x)dx.$$

5.3.2 可积函数列的逐项积分定理

定理 5.3.4(Vitali 逐项积分定理) 设 $mE<+\infty$; $f_n\in L(E)$

$(n=1,2,\cdots)$；$f_n \Rightarrow f$ 于E；$f_n(x)(n=1,2,\cdots)$的积分具有等度绝对连续性，即$\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0$，使当 $A \subset E, mA<\delta$ 时，对每个自然数 n 恒有

$$\left|\int_A f_n(x) dx\right|<\varepsilon,$$

则 $f \in L(E)$，且

$$\lim_{n \to \infty} \int_E f_n(x) dx=\int_E f(x) dx.$$

证明 假如 $f \in L(E)$，因为 $f_n \Rightarrow f$ 于 E，据测度收敛的定义，$\forall \varepsilon>0$ 及 $\forall \delta>0$，$\exists$ 自然数 $N=N(\varepsilon, \delta)$，当 $n \geqslant N$ 时，有

$$m(E_n(\varepsilon, \delta))=m\left(E\left[|f_n-f| \geqslant \frac{\varepsilon}{3mE+1}\right]\right)<\delta.$$

从而当 $n \geqslant N$ 时，有

$$\begin{aligned}
\left|\int_E f_n dx-\int_E f dx\right| & \leqslant \int_E |f_n-f| dx \\
& =\int_{E_n(\varepsilon, \delta)} |f_n-f| dx+\int_{E-E_n(\varepsilon, \delta)} |f_n-f| dx \\
& <\int_{E_n(\varepsilon, \delta)} |f_n| dx+\int_{E_n(\varepsilon, \delta)} |f| dx+\frac{\varepsilon}{3}.
\end{aligned}$$

于是，只要能证明 1° $|f_n(x)|(n=1, 2, \cdots)$的积分具有等度绝对连续性，2° $|f| \in L(E)$. 定理就得到证明. 下面证明这两件事都对.

因 $f_n(x)(n=1,2, \cdots)$ 的积分具有等度绝对连续性，即 $\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0$，使当 $A \subset E, mA<\delta$ 时，有

$$\left|\int_A f_n(x) dx\right|<\frac{\varepsilon}{6} \quad (n=1,2, \cdots).$$

令 $A_n^{+}=A[f_n \geqslant 0], A_n^{-}=A[f_n<0](n=1, 2, \cdots)$，则 $A=A_n^{+} \cup A_n^{-}$，$mA_n^{+} \leqslant mA<\delta, mA_n^{-} \leqslant mA<\delta(n=1,2, \cdots)$. 因此

$$\int_A |f_n|dx = \int_{A_n^+}|f_n|dx+\int_{A_n^-}|f_n|dx$$
$$=\left|\int_{A_n^+}f_ndx\right|+\left|\int_{A_n^-}f_ndx\right|<\frac{\varepsilon}{3}\quad (n=1,2,\cdots).$$

这说明$|f_n(x)|(n=1,2,\cdots)$的积分具有等度绝对连续性.

由于$|f_n|\Rightarrow|f|$于E，据 F. Riesz 定理(即定理 4.2.3 的 4))，存在$\{|f_n|\}$的子列$\{|f_{n_i}|\}$，使$|f_{n_i}|\xrightarrow{\text{a.e.}}|f|$于$E$. 不妨设$\{|f_{n_i}|\}$在$E$上处处收敛于$|f|$，据 Fatou 引理，对上述$\varepsilon$和$\delta$，$\forall A\subset E$，当$mA<\delta$时，都有

$$\int_A|f|dx\leqslant\varliminf_{i\to\infty}\int_A|f_{n_i}|dx\leqslant\frac{\varepsilon}{3}.$$

故$|f|\in L(A)$. 由于$mE<+\infty$，据习题 3.2 的第 8 题，可将E分解成有限个互不相交的测度小于δ的可测集之并：$E=\bigcup\limits_{j=1}^{k}E_j$，而$|f|\in L(E_j)\ (j=1,2,\cdots,k)$，据定理 5.1.12，$|f|\in L(E)$. 证毕.

注 1 把定理 5.3.4 中的条件"$f_n\Rightarrow f$于E"改为"$f_n\xrightarrow{\text{a.e.}}f$于$E$"，其结论仍然成立.

注 2 在定理 5.3.4 所述的条件下，若$\varphi(x)$是E上的任意有界可测函数，则$f\cdot\varphi\in L(E)$，且

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\varphi(x)dx=\int_E f(x)\varphi(x)dx.$$

注 3 定理 5.3.4 中的条件$mE<+\infty$不能去掉. 见下面例 3.

例 3 设$E=[0,+\infty)$，$f(x)=0$，$x\in E$. 作E上的函数列

$$f_n(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{n}, & \text{当 } x\in[0,n]\text{时},\\ 0, & \text{当 } x\in E-[0,n]\text{时},\end{cases}\qquad n=1,2,\cdots.$$

显然$f_n\Rightarrow f$于E，$f_n\in L(E)$，$n=1,2,\cdots$. 现证$\{f_n(x)\}\ (n=1,2,\cdots)$的积分具有等度绝对连续性：$\forall\varepsilon>0$，取正数$\delta<\varepsilon$，当$A\subset E$，$mA<\delta$时，对于每一个自然数$n$恒有

$$\left|\int_A f_n dx\right| \leqslant \frac{1}{n} mA < \frac{\delta}{n} \leqslant \delta < \varepsilon.$$

但
$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)dx = 1 > 0 = \int_E f(x)dx.$$

定理 5.3.5(Lebesgue 控制收敛定理) 设

1) $\{f_n(x)\}$是E上的可测函数列;

2) 存在E上的非负可积函数$F(x)$,使

$$|f_n(x)| \leqslant F(x) \text{a.e. 于} E \quad (n=1,2,\cdots);$$

3) $f_n(x) \Rightarrow f(x)$于E,

则$f \in L(E)$,并且

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)dx = \int_E f(x)dx.$$

证明 分两步讨论:

1° 先设$mE < +\infty$.

由定理的条件2)知$f_n \in L(E)$ $(n=1,2,\cdots)$. 现证$f_n(x)$ $(n=1,2,\cdots)$的积分具有等度绝对连续性. 由于$F(x)$的积分具有绝对连续性,所以,$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$,当$A \subset E$, $mA < \delta$时,有

$$\left|\int_A F(x)dx\right| = \int_A F(x)dx < \varepsilon,$$

从而对每一个自然数n恒有

$$\left|\int_A f_n(x)dx\right| \leqslant \int_A |f_n(x)|dx \leqslant \int_A F(x)dx < \varepsilon.$$

由 Vitali 定理知$f \in L(E)$,且

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)dx = \int_E f(x)dx.$$

2° 设$mE = +\infty$.

由$|f_n(x)| \leqslant F(x)$a.e. 于E $(n=1, 2,\cdots)$及$F \in L(E)$知$f_n \in L(E)$ $(n=1,2,\cdots)$. 由于$f_n \Rightarrow f$于E,据定理4.2.3的4) (F. Riesz 定理),存在$\{f_n\}$的子列$\{f_{n_i}\}$,使$f_{n_i} \xrightarrow{\text{a.e.}} f$于$E$,因此$|f(x)|$

$\leqslant F(x)$ a. e. 于 E，从而 $f\in L(E)$.

据引理 3.2.8，E 可表为可数个互不相交的测度有限的可测集 A_i 之并 $\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i$. 记 $E_k=\bigcup_{i=1}^{k}A_i$. 由定理 5.1.12 知

$$\int_E Fdx=\sum_{i=1}^{\infty}\int_{A_i}Fdx=\lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{k}\int_{A_i}Fdx=\lim_{k\to\infty}\int_{E_k}Fdx.$$

$\forall\varepsilon>0$，由上式知 $\exists$ 自然数 k_0，使

$$\int_{E-E_{k_0}}Fdx<\frac{\varepsilon}{3}.$$

由 $|f_n(x)|\leqslant F(x)$ a. e. 于 $E(n=1,2,\cdots)$ 及 $|f(x)|\leqslant F(x)$ a. e. 于 E 知

$$\left|\int_{E-E_{k_0}}f_ndx\right|<\frac{\varepsilon}{3}(n=1,2,\cdots),\left|\int_{E-E_{k_0}}fdx\right|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

$mE_{k_0}<+\infty$. 将 $f_n(x)(n=1,2,\cdots)$，$f(x)$ 及 $F(x)$ 限制在 E_{k_0} 上时，仍满足定理的条件. 据 1°，

$$\lim_{n\to\infty}\int_{E_{k_0}}f_ndx=\int_{E_{k_0}}fdx.$$

从而存在自然数 N，使当 $n\geqslant N$ 时，

$$\left|\int_{E_{k_0}}f_ndx-\int_{E_{k_0}}fdx\right|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

于是，当 $n\geqslant N$ 时，

$$\begin{aligned}&\left|\int_E f_ndx-\int_E fdx\right|\\&=\left|\int_{E_{k_0}}f_ndx-\int_{E_{k_0}}fdx+\int_{E-E_{k_0}}f_ndx-\int_{E-E_{k_0}}fdx\right|\\&\leqslant\left|\int_{E_{k_0}}f_ndx-\int_{E_{k_0}}fdx\right|+\left|\int_{E-E_{k_0}}f_ndx\right|+\left|\int_{E-E_{k_0}}fdx\right|\\&<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.\end{aligned}$$

所以$\lim\limits_{n\to\infty}\int_E f_n(x)dx=\int_E f(x)dx$. 证毕.

仔细分析一下定理 5.3.5 的证明过程，便可立即得到

推论 5.3.6 把定理 5.3.5 中的条件 "$f_n(x)\Rightarrow f(x)$于E"改为"$f_n(x)\xrightarrow{\text{a.e.}} f(x)$于$E$"，其结论仍然成立.

定理5.3.7(Lebesgue有界收敛定理) 设$mE<+\infty$，$\{f_n(x)\}$是在E上几乎处处一致有界的可测函数列，若$f_n(x)\Rightarrow f(x)$于E或$f_n(x)\xrightarrow{\text{a.e.}} f(x)$于$E$，则$f\in L(E)$，且

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)dx=\int_E f(x)dx.$$

证明 由题设知存在正实数M，使得$|f_n(x)|\leqslant M$ a.e. 于E $(n=1,2,\cdots)$. 令$F(x)=M$, $x\in E$. 由$mE<+\infty$知$F\in L(E)$，再由定理 5.3.5 和推论 5.3.6 就知道定理 5.3.7 成立. 证毕.

注 定理 5.3.7 中$mE<+\infty$的条件不能去掉. 这从本节的例 3 即可看出.

下面再举一些逐项积分定理的应用.

例 4 设$E\in\mathscr{L}_q$，函数$f(x,t)$的定义域为$\{(x,t)\mid x\in E, t\in[\alpha,\beta]\}$. 若对任何固定的$t\in[\alpha,\beta]$，$f(x,t)$作为$x$的函数在$E$上可积，对任何固定的$x\in E$，$f(x,t)$作为$t$的函数在$[\alpha,\beta]$上可微，并且存在$E$上的可积函数$F(x)$使在$E\times[\alpha,\beta]$上

$$\left|\frac{\partial}{\partial t}f(x,t)\right|\leqslant F(x),$$

则在$[\alpha,\beta]$上

$$\frac{d}{dt}\int_E f(x,t)dx=\int_E\frac{\partial}{\partial t}f(x,t)dx.$$

证明 对任意固定的$t\in[\alpha,\beta]$，任取数列$\{h_n\}$使$h_n\to 0(n\to\infty)$，$h_n\neq 0$，$t+h_n\in[\alpha,\beta]$(这是可以做到的). 由题设知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(x,t+h_n)-f(x,t)}{h_n}=\frac{\partial}{\partial t}f(x,t)\ (x\in E).$$

由微分中值定理知

$$\frac{f(x,\ t+h_n)-f(x,\ t)}{h_n}=\frac{\partial}{\partial t}f(x,t+\theta_n h_n)\,(x\in E;\ n=1,2,\cdots),$$

其中 θ_n 与 x 有关且满足 $0<\theta_n<1$. 由于

$$\left|\frac{\partial}{\partial t}f(x,t+\theta_n h_n)\right|\leqslant F(x)(x\in E;n=1,2,\cdots),$$

据推论 5.3.6,

$$\lim_{n\to\infty}\int_E\frac{f(x,\ t+h_n)-f(x,\ t)}{h_n}dx=\int_E\frac{\partial}{\partial t}f(x,t)dx.$$

所以$\frac{d}{dt}\int_E f(x,t)dx=\int_E\frac{\partial}{\partial t}f(x,t)dx$. 证毕.

例 5 设 $mE<+\infty$, $\{f_n(x)\}$ 是 E 上的可测函数列. 则

$$f_n\Rightarrow 0\ 于\ E\Leftrightarrow\lim_{n\to\infty}\int_E\frac{|f_n|}{1+|f_n|}dx=0.$$

证明 "$\Rightarrow$": 因 $f_n\Rightarrow 0$ 于 E, 所以 $\frac{|f_n|}{1+|f_n|}\Rightarrow 0$ 于 E. 又 $0\leqslant\frac{|f_n|}{1+|f_n|}<1(n=1,2,\cdots)$, 据 Lebesgue 有界收敛定理,

$$\lim_{n\to\infty}\int_E\frac{|f_n|}{1+|f_n|}dx=\int_E 0dx=0.$$

"$\Leftarrow$": 因 $y=\frac{x}{1+x}=1-\frac{1}{1+x}$, 当 $x>-1$ 时是严格增加函数, 因此 $\forall\sigma>0$ 及 $\forall n\in\mathbf{N}$, 有

$$\begin{aligned}\int_E\frac{|f_n|}{1+|f_n|}dx&\geqslant\int_{E[|f_n|\geqslant\sigma]}\frac{|f_n|}{1+|f_n|}dx\\&\geqslant\int_{E[|f_n|\geqslant\sigma]}\frac{\sigma}{1+\sigma}dx\\&=\frac{\sigma}{1+\sigma}m(E[|f_n|\geqslant\sigma])\geqslant 0.\end{aligned}$$

从而当$\lim\limits_{n\to\infty}\int_E \frac{|f_n|}{1+|f_n|}dx=0$时，必有$\lim\limits_{n\to\infty}m(E[|f_n|\geqslant\sigma])=0$，即有$f_n\Rightarrow 0$于$E$. 证毕.

例 6 计算$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_{-1}^{1}\frac{x^2}{(1-x^2)^n}dx$.

解 令 $f_n(x)=\frac{x^2}{(1+x^2)^n}$，则 $f_n(x)(n=1,2,\cdots)$在$[-1,1]$上非负连续，从而非负可测. 当 $x=0$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(x)=0$；当 $x\neq 0$ 时，

$$\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)=\frac{x^2}{1+x^2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(1+x^2)^n}\right)=\frac{x^2}{1+x^2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{1+x^2}}=1.$$

设 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(x)$，则

$$f(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } x\neq 0 \text{ 时},\\ 0, & \text{当 } x=0 \text{ 时}.\end{cases}$$

据 Lebesgue 逐项积分定理，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-1}^{1}\frac{x^2}{(1+x^2)^n}dx=\int_{-1}^{1}f(x)dx=\int_{-1}^{1}1dx=2.$$

此例若用R积分理论进行计算，就变得相当麻烦，因为函数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)^n}$在$[-1,1]$上不一致收敛，所以它不满足$R$逐项积分定理的条件. 可见$L$积分在运算方面确实要比$R$积分灵活和方便.

习 题 5.3

1. 设 $E\in\mathscr{L}_q$，$f_n\in L(E)$ $(n=1,2,\cdots)$；$f_n(x)\leqslant f_{n+1}(x)$ （或 $f_n(x)\geqslant$

$f_{n+1}(x)$) $(x\in E;\ n=1,2,\cdots)$；$\left\{\int_E f_n(x)dx\right\}$有上界(或有下界)．则$\{f_n(x)\}$在$E$上收敛于一可积函数$f(x)$，且

$$\int_E f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)dx.$$

2．设$E\in\mathscr{L}_q$，$f_n\in L(E)$ $(n=1,2,\cdots)$，且有$g\in L(E)$，使$f_n(x)\geqslant g(x)$ a.e. 于$E(n=1,2,\cdots)$，又$\varliminf_{n\to\infty}\int_E f_n(x)dx<+\infty$，则$\varliminf_{n\to\infty}f_n\in L(E)$，且

$$\int_E\varliminf_{n\to\infty}f_n(x)dx\leqslant\varliminf_{n\to\infty}\int_E f_n(x)dx.$$

3．设$E\in\mathscr{L}_q$，$f_n\in L(E)$ $(n=1,2,\cdots)$，且有$g\in L(E)$，使$f_n(x)\leqslant g(x)$ a.e. 于$E(n=1,2,\cdots)$，又$\varlimsup_{n\to\infty}\int_E f_n(x)dx>-\infty$，则$\varlimsup_{n\to\infty}f_n\in L(E)$，且

$$\int_E\varlimsup_{n\to\infty}f_n(x)dx\geqslant\varlimsup_{n\to\infty}\int_E f_n(x)dx.$$

4．设$E\in\mathscr{L}_q$，$\{f_n(x)\}$是E上的一列非负可测函数，

$$f_1(x)\geqslant f_2(x)\geqslant f_3(x)\geqslant f_4(x)\geqslant\cdots\geqslant f_n(x)\geqslant\cdots(x\in E),$$

$f_n(x)\xrightarrow{\text{a.e.}}f(x)$于$E$．若$\exists n_0\in\mathrm{N}$使$f_{n_0}\in L(E)$，则$f\in L(E)$，且

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)dx=\int_E f(x)dx.$$

5．设$E\in\mathscr{L}_q$，$f(x)$是E上的非负可测函数．令

$$[f(x)]_n=\begin{cases}f(x),\text{当 }x\in E[f\leqslant n]\text{时},\\0,\text{当 }x\in E[f>n]\text{时},\end{cases}\quad n=1,2,\cdots.$$

若$f(x)$在E上几乎处处有限，则

$$\lim_{n\to\infty}\int_E[f(x)]_n dx=\int_E f(x)dx.$$

6．设$f(x,t)$当$|t-t_0|<\delta$时是x在$[a,b]$上的可积函数，又有常数k，使$\left|\frac{\partial}{\partial t}f(x,t)\right|\leqslant k$，$a\leqslant x\leqslant b$，$|t-t_0|<\delta$．则

$$\frac{d}{dt}\int_a^b f(x,t)dx=\int_a^b\frac{\partial}{\partial t}f(x,t)dx\quad(|t-t_0|<\delta).$$

7．试从$\frac{1}{1+x}=(1-x)+(x^2-x^3)+\cdots(0<x<1)$推证

$$\ln 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots.$$

8．求下列极限的值：

(1) $\lim_{n\to\infty}\int_{[0,1]}\frac{nx}{1+n^2x^2}\sin nx\,dx$; (2) $\lim_{n\to\infty}\int_{[0,1]}\frac{nx^{\frac{1}{2}}}{1+n^2x^2}dx$.

9. 证明：$\lim_{n\to\infty}\int_{(0,+\infty)}\frac{dt}{\left(1+\frac{t}{n}\right)^n\cdot t^{\frac{1}{n}}}=1$.

10. 若 $f(x)$ 在 $(a-\varepsilon,b+\varepsilon)$ $(\varepsilon>0)$ 上可积，则

$$\lim_{h\to 0}\int_a^b|f(x+h)-f(x)|dx=0 \quad （积分连续性）.$$

§5.4 Fubini 定理

本节讨论重积分和累次积分的关系，以及累次积分中交换积分顺序的问题. 我们将会看到在重积分化为累次积分以及累次积分交换积分顺序这些问题上，Lebesgue 积分所要求的条件要比 Riemann 积分弱得多.

定理 5.4.1 设 $E\subset\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q$ 可测，则 $m(x)=mE_x$ 是 $\mathbb{R}^p$ 上几乎处处有定义的可测函数，且 $mE=\int_{\mathbb{R}^p}mE_x dx$.

证明 （一）当 E 是有界可测集，即 $E\subset\Delta_0$, $\Delta_0\subset\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q$ 是开区间时，分以下五步进行讨论：

1° 当 E 是一左开右闭区间时，设 $E=\Delta^{(1)}\times\Delta^{(2)}\subset\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q$，则

$$mE_x=\begin{cases}m\Delta^{(2)}=|\Delta^{(2)}|, \text{当 } x\in\Delta^{(1)} \text{ 时},\\ m\varnothing=0, \text{当 } x\overline{\in}\Delta^{(1)} \text{ 时}.\end{cases}$$

是 $\mathbb{R}^p$ 上的简单函数，因而非负可测，且

$$\int_{\mathbb{R}^p}mE_x dx=\int_{\Delta^{(1)}}|\Delta^{(2)}|dx=|\Delta^{(1)}|\cdot|\Delta^{(2)}|=mE.$$

2° 当 E 是开集时，据定理 2.1.2，可设

$E=\bigcup_{i=1}^{\infty}I_i, I_i\cap I_j=\varnothing\,(i\neq j)$，$I_i\,(i=1,2,\cdots)$ 为左开右闭区

间. 由于 $\forall x\in \mathbf{R}^p$, $E_x=\bigcup_{i=1}^{\infty}(I_i)_x\subset \mathbf{R}^q$可测, $(I_i)_x\cap (I_j)_x=\varnothing\,(i\neq j)$, 从而 $mE_x=\sum_{i=1}^{\infty}m(I_i)_x$. 据 1°, $m(I_i)_x(i=1,2,\cdots)$在 $\mathbf{R}^p$ 上非负可测,所以,mE_x 在 $\mathbf{R}^p$ 上非负可测,由 Lebesgue 逐项积分定理知

$$\int_{\mathbf{R}^p} mE_x dx=\sum_{i=1}^{\infty}\int_{\mathbf{R}^p} m(I_i)_x dx=\sum_{i=1}^{\infty}mI_i=mE.$$

3° 当 E 是 G_δ 型集时,设 $E=\bigcap_{i=1}^{\infty}G_i$, $G_i(i=1,2,\cdots)$为开集,且

$$\Delta_0\supset G_1\supset G_2\supset\cdots\supset G_i\supset\cdots,$$

从而 $\forall x\in \mathbf{R}^p$,有

$$(\Delta_0)_x\supset (G_1)_x\supset (G_2)_x\supset\cdots\supset (G_i)_x\supset\cdots,\quad E_x=\bigcap_{i=1}^{\infty}(G_i)_x,$$

且 $(G_i)_x(i=1,2,\cdots)$是 $\mathbf{R}^q$ 中的可测集, 据定理 3.1.15(测度的上连续性),

$$mE_x=\lim_{i\to\infty}m(G_i)_x.$$

据 2°, $m(G_i)_x(i=1,2,\cdots)$在 $\mathbf{R}^p$ 上非负可积, 再由习题 5.3 的第 1 题知 mE_x 在 $\mathbf{R}^p$ 上非负可积, 且

$$\int_{\mathbf{R}^p} mE_x dx=\lim_{i\to\infty}\int_{\mathbf{R}^p} m(G_i)_x dx=\lim_{i\to\infty}mG_i=mE.$$

4° 当 $mE=0$ 时, 据定理3.4.4., $mE_x=0$ a. e. 于 $\mathbb{R}^p$, 即 mE_x 是在 $\mathbb{R}^p$ 上几乎处处有定义的可测函数, 且 $\int_{\mathbf{R}^p} mE_x dx=0=mE$.

5° 当 E 是任意有界可测集时, 据定理 3.2.6 及其注, 有 G_δ 型集 $A\supset E$, 使 $A\subset\Delta_0$, $mA=mE$, 从而 $m(A-E)=0$, $A=(A-E)\cup E$, $A_x=(A-E)_x\cup E_x$, 即 $mA_x=m(A-E)_x+mE_x$, 所以, $mE_x=$

$mA_x - m(A-E)_x$. 由 3° 及 4° 知，mA_x 及 $m(A-E)_x$ 都在 $\mathbf{R}^p$ 上可积，且 mE_x 是在 $\mathbf{R}^p$ 上几乎处处有定义的可测函数，从而，mE_x 也在 $\mathbf{R}^p$ 上可积，且

$$\int_{\mathbf{R}^p} mE_x dx = \int_{\mathbf{R}^p} mA_x dx - \int_{\mathbf{R}^p} m(A-E)_x dx = mA = mE.$$

总之，当 E 是有界可测集时，定理成立.

（二）当 E 是无界可测集时，因任意无界可测集均可表为可数个互不相交的有界可测集之并，因此，可将 E 表为：

$$E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i, E_i \cap E_j = \varnothing (i \neq j), E_i (i=1,2,\cdots) \text{有界可测}.$$

据（一），每个 $m(E_i)_x$ 都是在 $\mathbf{R}^p$ 上几乎处处有定义的非负可测函数，再由 $E_x = \bigcup_{i=1}^{\infty}(E_i)_x (\forall x \in \mathbf{R}^p)$ 知，$mE_x = \sum_{i=1}^{\infty} m(E_i)_x$ a·e·于 $\mathbf{R}^p$. 从而 mE_x 也是在 $\mathbf{R}^p$ 上几乎处处有定义的非负可测函数，且由 Lebesgue 逐项积分定理知

$$\int_{\mathbf{R}^p} mE_x dx = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{\mathbf{R}^p} m(E_i)_x dx = \sum_{i=1}^{\infty} mE_i = mE. \quad \text{证毕.}$$

注 1 把定理 5.4.1 的结论中的“x”换成“y”，“$\mathbf{R}^p$”换成“$\mathbf{R}^q$”，所得结论仍然成立.

注 2 由定理 5.4.1 可知，定理 3.4.4 的逆定理成立，即若 $E \subset \mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^q$ 可测，$mE_x = 0$ a.e. 于 $\mathbf{R}^p$，则 $mE = 0$.

定理 5.4.2（Fubini 定理） **设 $f(x,y)$ 是在 $\mathbf{R}^{p+q} = \mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^q$ 上的可积函数，则**

1) $f(x,y) \in L(\mathbf{R}^q)$ a.e. 于 $\mathbf{R}^p$，

2) **在 $\mathbf{R}^p$ 上几乎处处有定义的函数**

$$g(x) = \int_{\mathbf{R}^q} f(x,y) dy \in L(\mathbf{R}^p),$$

3) $\int_{\mathbf{R}^{p+q}} f(M) dM = \int_{\mathbf{R}^p} dx \int_{\mathbf{R}^q} f(x,y) dy.$

证明 分以下两步进行讨论:

1° 设 $f(x,y)$是 $\mathbf{R}^{p+q}$ 上的非负可积函数.

由于 $f(x,y)$在 $\mathbb{R}^{p+q}$ 上非负可测, 从而 $G=G(\mathbf{R}^{p+q};\ f)$是 $\mathbf{R}^{p+q+1}$ 中的可测集,据定理 5.1.4,

$$\int_{\mathbf{R}^{p+q}} f(M)dM = mG(\mathbb{R}^{p+q};f)<+\infty. \qquad (5.4.1)$$

据定理 5.4.1, mG_x 是在 $\mathbb{R}^p$ 上几乎处处有定义的非负可测函数,且

$$\int_{\mathbf{R}^p} mG_x dx = mG(\mathbf{R}^{p+q};f)<+\infty. \qquad (5.4.2)$$

因此,$mG_x \in L(\mathbf{R}^p)$,从而 $mG_x<+\infty$ a.e. 于 $\mathbb{R}^p$. 又因为$\forall x\in\mathbf{R}^p$,

$$\begin{aligned} G_x &= \{(y,z)\mid (x,y,z)\in G(\mathbf{R}^{p+q};f)\} \\ &= \{(y,z)\mid y\in\mathbb{R}^q, 0\leqslant z<f(x,y)\}. \end{aligned}$$

所以, G_x 就是对任意固定的 $x\in\mathbf{R}^p$, 视 $f(x,y)$为 y 的函数时, $f(x,y)$在 $\mathbf{R}^q$ 上的下方图形. 因此

$$g(x)=\int_{\mathbf{R}^q} f(x,y)dy = mG_x<+\infty \text{ a.e. 于 } \mathbb{R}^p. \qquad (5.4.3)$$

故 1),2)得证.

再由(5.4.1)、(5.4.2)、(5.4.3)三式即知,

$$\int_{\mathbf{R}^{p+q}} f(M)dM = \int_{\mathbf{R}^p} mG_x dx = \int_{\mathbf{R}^p} dx \int_{\mathbf{R}^q} f(x,y)dy.$$

所以,当 $f(x,y)$是 $\mathbf{R}^{p+q}$ 上的非负可积函数时,定理成立.

2° 设 $f(x,y)$是$\mathbf{R}^{p+q}$ 上的一般可积函数.

此时 $f^+(x,y), f^-(x,y)$都是 $\mathbf{R}^{p+q}$ 上的非负可积函数, 据 1°,

$$f^+(x,y)\in L(\mathbf{R}^q) \text{ a.e. 于 } \mathbb{R}^p, f^-(x,y)\in L(\mathbf{R}^q) \text{ a.e. 于 } \mathbf{R}^p,$$

从而 $f(x,y)=f^+(x,y)-f^-(x,y)\in L(\mathbf{R}^q)$ a.e. 于 $\mathbf{R}^p$. 又因为

$$g_1(x)=\int_{\mathbf{R}^q} f^+(x,y)dy,\ g_2(x)=\int_{\mathbf{R}^q} f^-(x,y)dy$$

都是在 $\mathbf{R}^p$ 上几乎处处有定义且在 $\mathbb{R}^p$ 上可积的函数,所以

$$g(x)=g_1(x)-g_2(x)=\int_{\mathbb{R}^q} f^+(x,y)\,dy-\int_{\mathbb{R}^q} f^-(x,y)\,dy$$
$$=\int_{\mathbb{R}^q} f(x,y)\,dy$$

也是在 $\mathbb{R}^p$ 上几乎处处有定义且在 $\mathbb{R}^p$ 上可积的函数,故

$$\int_{\mathbb{R}^{p+q}} f(M)\,dM=\int_{\mathbb{R}^{p+q}} f^+(M)\,dM-\int_{\mathbb{R}^{p+q}} f^-(M)\,dM$$
$$=\int_{\mathbb{R}^p} dx\int_{\mathbb{R}^q} f^+(x,y)\,dy-\int_{\mathbb{R}^p} dx\int_{\mathbb{R}^q} f^-(x,y)\,dy$$
$$=\int_{\mathbb{R}^p} dx\left\{\int_{\mathbb{R}^q} f^+(x,y)\,dy-\int_{\mathbb{R}^q} f^-(x,y)\,dy\right\}$$
$$=\int_{\mathbb{R}^p} dx\int_{\mathbb{R}^q} f(x,y)\,dy.$$ 证毕.

推论 5.4.3 **若 $f(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q$ 上可积,则累次积分**

$\int_{\mathbb{R}^p} dx\int_{\mathbb{R}^q} f(x,y)\,dy$ **及** $\int_{\mathbb{R}^q} dy\int_{\mathbb{R}^p} f(x,y)\,dx$ **都存在,且**

$$\int_{\mathbb{R}^{p+q}} f(M)\,dM=\int_{\mathbb{R}^p} dx\int_{\mathbb{R}^q} f(x,y)\,dy=\int_{\mathbb{R}^q} dy\int_{\mathbb{R}^p} f(x,y)\,dx.$$

推论 5.4.4 **若 $f(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q$ 上非负可测,则**

1) 存在 $A\subset\mathbb{R}^p$, $mA=0$, 使当 $x\in\mathbb{R}^p-A$ 时, $f(x,y)$ 是 y 在 $\mathbb{R}^q$ 上的非负可测函数;

2) 存在 $B\subset\mathbb{R}^q$, $mB=0$, 使当 $y\in\mathbb{R}^q-B$ 时, $f(x,y)$ 是 x 在 $\mathbb{R}^p$ 上的非负可测函数;

3) $$\int_{\mathbb{R}^{p+q}} f(M)\,dM=\int_{\mathbb{R}^p} dx\int_{\mathbb{R}^q} f(x,y)\,dy$$
$$=\int_{\mathbb{R}^q} dy\int_{\mathbb{R}^p} f(x,y)\,dx.$$

证明留为习题.

注 把定理 5.4.2、推论 5.4.3、推论 5.4.4 中的 $\mathbb{R}^p$、$\mathbb{R}^q$ 分别换成 $\mathbb{R}^p$、$\mathbb{R}^q$ 中的可测集 E、F, 所得到的相应的三个定理都仍然成立.

习 题 5.4

1. 证明推论 5.4.4.

2. 设在 $E=[-1,1]\times[-1,1]$ 上定义

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{(x^2+y^2)^2}, & x^2+y^2>0,\\ 0, & x=y=0.\end{cases}$$

则推论 5.4.3 中的两个累次积分均存在且相等，但 $f(x,y)$ 不是 E 上的可积函数.

3. 设在 $E=(0,1)\times(0,1)$ 上定义 $f(x,y)=\dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$. 证明

$$\int_{(0,1)}dx\int_{(0,1)}f(x,y)dy\neq\int_{(0,1)}dy\int_{(0,1)}f(x,y)dx.$$

这是否与推论 5.4.3 矛盾？何故？

4. 设 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}^p$ 上可积，$g(y)$ 在 $\mathbf{R}^q$ 上可积，证明 $f(x)g(y)$ 在 $\mathbf{R}^p\times\mathbf{R}^q$ 上可积.

§5.5 微分与 Lebesgue 不定积分

本节就空间是一维的情形(即在 $\mathbf{R}^1$ 空间)讨论微分与 Lebesgue 不定积分的关系以及 Newton-Leibniz 公式成立的条件，为此，还要引进有界变差函数与绝对连续函数等概念.

我们约定，本节中凡说到测度、可测函数、积分，如无特别声明，均指在 Lebesgue 意义之下. 凡说到单调函数均指处处取有限值的单调函数.

5.5.1 有界变差函数

定义 5.5.1 设 $f(x)$是$[a,b]$上的有限函数，在$[a,b]$上任取一组分点：$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$. 记此组分点为 P. 称和式

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}[f,P]=\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})|$$

为 f 对分点组 P 的变差. 若数集

$$\left\{ \bigvee_a^b [f,P] \mid P \text{ 为}[a,b]\text{的分点组} \right\}$$

有上界,就称 $f(x)$ 为$[a, b]$上的有界变差函数,记为 $f\in \mathrm{V}[a,b]$ $\Big($ $\mathrm{V}[a,b]$表示$[a,b]$上有界变差函数全体所成之集). 并称

$$\bigvee_a^b (f)=\sup_P\left\{ \bigvee_a^b [f,P] \mid P \text{ 为}[a,b]\text{的分点组} \right\}$$

为 $f(x)$ 在$[a,b]$上的全变差.

显然,如果 $f\in \mathrm{V}[a,b]$, 则对任何$[c,d]\subset[a,b]$, 也有 $f\in \mathrm{V}[c,d]$. 因此, 若 $f\in\mathrm{V}[a,b]$, 则 $\mathrm{V}(x)=\bigvee_a^x(f)$ (规定 $\bigvee_a^a(f)=0$)是在$[a,b]$上有定义的单调不减的非负函数,称此函数为 f 在$[a,b]$上的全变差函数.

例 1 若 $f(x)$ 是$[a,b]$上的单调函数, 则 $f\in\mathrm{V}[a,b]$, 且

$$\bigvee_a^b (f)=|f(b)-f(a)|.$$

例 2 设 $f(x)$ 在$[a,b]$上满足 Lipschitz 条件, 即存在常数 $L>0$, 使得当 $x_1,x_2\in[a,b]$时,有

$$|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant L|x_1-x_2|.$$

则 $f\in\mathrm{V}[a,b]$.

证明 对$[a,b]$的任意分点组 P: $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$.

$$\bigvee_a^b [f,P]=\sum_{i=1}^n |f(x_i)-f(x_{i-1})|\leqslant L\sum_{i=1}^n(x_i-x_{i-1})=L(b-a).$$

故 $f\in V[a,b]$，且 $\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)\leqslant L(b-a)$.

由此例可知，如果 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上处处存在导数，且导函数有界，即存在 $L>0$，使对一切 $x\in[a,b]$，有 $|f'(x)|\leqslant L$，则由Lagrange微分中值公式知，$f\in V[a,b]$.

例 3 连续函数不一定是有界变差函数. 例如

$$f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x}, & x\in(0,1],\\ 0, & x=0\end{cases}$$

是 $[0,1]$ 上的连续函数，如果取分点组 P:

$$x_0=0,\ x_i=\frac{1}{[(n-1)-i]\pi+\dfrac{\pi}{2}}(i=1,\cdots,n-1),\ x_n=1,$$

则

$$\overset{1}{\underset{0}{V}}[f,P]=\sum_{i=1}^{n}\left|x_i\sin\frac{1}{x_i}-x_{i-1}\sin\frac{1}{x_{i-1}}\right|$$

$$>\sum_{i=2}^{n-1}\left[\frac{1}{(n-1-i)\pi+\dfrac{\pi}{2}}+\frac{1}{[(n-1)-(i-1)]\pi+\dfrac{\pi}{2}}\right]$$

$$=\sum_{k=1}^{n-2}\left(\frac{1}{(k-1)\pi+\dfrac{\pi}{2}}+\frac{1}{k\pi+\dfrac{\pi}{2}}\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{n-2}\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{k-\dfrac{1}{2}}+\frac{1}{k+\dfrac{1}{2}}\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{n-2}\frac{1}{\pi}\cdot\frac{2k}{k^2-\dfrac{1}{4}}>\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n-2}\frac{1}{k}.$$

但$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n-2}\frac{1}{k}=+\infty$，所以$\sup\limits_P \bigvee\limits_0^1[f,\ P]=+\infty$，故$f(x)$不是有界变差函数.

定理 5.5.1 **有界变差函数具有下面一些性质:**

1° 若 $f\in V[a,b]$，则 $f(x)$在$[a,b]$上有界.

2° 若 $f,g\in V[a,b]$，α,β 是两个常数，则 $\alpha f+\beta g\in V[a,b]$，且$\bigvee\limits_a^b(\alpha f+\beta g)\leqslant|\alpha|\bigvee\limits_a^b(f)+|\beta|\bigvee\limits_a^b(g)$.

3° 若 $f,g\in V[a,b]$，则 $f\cdot g\in V[a,b]$；又若$|g(x)|\geqslant\alpha>0$，则 $f/g\in V[a,b]$.

4° 若 $f\in V[a,b]$，且$\bigvee\limits_a^b(f)=0$时，则 $f(x)$ 必是常数.

5° $\forall c\in(a,b)$，则 $f\in V[a,b]\Leftrightarrow f\in V[a,c]$，且 $f\in V[c,b]$，并有$\bigvee\limits_a^b(f)=\bigvee\limits_a^c(f)+\bigvee\limits_c^b(f)$.

6° 若 $g_n\in V[a,\ b]$，$n=1,\ 2,\cdots$，$\left\{\bigvee\limits_a^b(g_n)\right\}$ 有界，且 $\lim\limits_{n\to\infty}g_n(x)=g(x)\ (x\in[a,b])$，则 $g\in V[a,b]$，且

$$\bigvee_a^b(g)\leqslant\sup_n\bigvee_a^b(g_n).$$

证明 我们只证明 2°，5°，6°，其余留为习题.

2° 任取$[a,b]$上的一组分点 P：$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$. 由于

$$\begin{aligned}\bigvee_a^b[\alpha f+\beta g,P]&=\sum_{i=1}^n|\alpha f(x_i)+\beta g(x_i)-\alpha f(x_{i-1})-\beta g(x_{i-1})|\\&\leqslant|\alpha|\sum_{i=1}^n|f(x_i)-f(x_{i-1})|\end{aligned}$$

$$+|\beta|\sum_{i=1}^{n}|g(x_i)-g(x_{i-1})|$$

$$=|\alpha|\bigvee_a^b[f,P]+|\beta|\bigvee_a^b[g,P]$$

$$\leqslant|\alpha|\bigvee_a^b(f)+|\beta|\bigvee_a^b(g).$$

故 $\alpha f+\beta g\in\mathrm{V}[a,b]$，且

$$\bigvee_a^b(\alpha f+\beta g)\leqslant|\alpha|\bigvee_a^b(f)+|\beta|\bigvee_a^b(g).$$

5° 当 $f\in\mathrm{V}[a,b]$时，则由本节前面的讨论就知 $f\in\mathrm{V}[a,c]$，$f\in\mathrm{V}[c,b]$. $\forall\varepsilon>0$，在$[a,c]$，$[c,b]$上分别存在分点组

$$P_1:a=x_0<x_1<\cdots<x_n=c,P_2:c=x_0'<x_1'<\cdots<x_m'=b,$$

使得

$$\bigvee_a^c[f,P_1]>\bigvee_a^c(f)-\varepsilon,\quad\bigvee_c^b[f,P_2]>\bigvee_c^b(f)-\varepsilon,$$

则 $$P:\ a=x_0<x_1<\cdots<x_n=x_0'<x_1'<\cdots<x_m'=b$$

是$[a,b]$的一个分点组，且

$$\bigvee_a^b(f)\geqslant\bigvee_a^b[f,P]=\bigvee_a^c[f,P_1]+\bigvee_c^b[f,P_2]$$

$$>\bigvee_a^c(f)+\bigvee_c^b(f)-2\varepsilon.$$

令 $\varepsilon\to0$ 得 $$\bigvee_a^b(f)\geqslant\bigvee_a^c(f)+\bigvee_c^b(f).$$

反之，当 $f\in\mathrm{V}[a,c]$，$f\in\mathrm{V}[c,b]$时，对$[a,b]$的任意分点组$P:a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$. 若 c 是 P 的一个分点，则 P 可以拆成$[a,c]$的一个分点组 P_1 和$[c,b]$的一个分点组 P_2，且

$$\bigvee_a^b[f,P]=\bigvee_a^c[f,P_1]+\bigvee_c^b[f,P_2]\leqslant\bigvee_a^c(f)+\bigvee_c^b(f).$$

若 c 不是 P 的分点，将 c 点添入 P 的分点后就得到 $[a,b]$ 的一个新分点组 P'，显然

$$\bigvee_a^b[f,P]\leqslant\bigvee_a^b[f,P']\leqslant\bigvee_a^c(f)+\bigvee_c^b(f).$$

这说明 $f\in V[a,b]$，且

$$\bigvee_a^b(f)\leqslant\bigvee_a^c(f)+\bigvee_c^b(f).$$

综合以上两个方面的结果，就知性质 5° 成立.

6° 设 $M=\sup_n\bigvee_a^b(g_n)<+\infty$. 对 $[a,b]$ 上任意给定的一组分点 $P: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$. 由于

$$\bigvee_a^b[g,P]=\sum_{i=1}^n|g(x_i)-g(x_{i-1})|$$

$$=\sum_{i=1}^n\lim_{m\to\infty}|g_m(x_i)-g_m(x_{i-1})|$$

$$=\lim_{m\to\infty}\sum_{i=1}^n|g_m(x_i)-g_m(x_{i-1})|\leqslant M.$$

故 $g\in V[a,b]$，且 $\bigvee_a^b(g)\leqslant\sup_n\bigvee_a^b(g_n)$.

定理 5.5.2(Jordan 分解定理) $f\in V[a,b]\Leftrightarrow f(x)$ **可以表成两个非负单调不减函数之差.**

证明 充分性显然. 现证必要性：作函数

$$f_1(x)=\frac{1}{2}\left(\bigvee_a^x(f)+f(x)+|f(a)|\right),$$

$$f_2(x)=\frac{1}{2}\left(\overset{x}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f)-f(x)+|f(a)|\right).$$

$\forall x_1,x_2\in[a,b]$，当 $x_2>x_1$ 时，由于

$$|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant\overset{x_2}{\underset{x_1}{\mathrm{V}}}(f)=\overset{x_2}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f)-\overset{x_1}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f),$$

所以

$$\overset{x_1}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f)+f(x_1)\leqslant\overset{x_2}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f)+f(x_2),$$

$$\overset{x_1}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f)-f(x_1)\leqslant\overset{x_2}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f)-f(x_2).$$

这说明 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 都是 $[a,b]$ 上的单调不减函数. 再由 f_1 和 f_2 的定义就知道这两个函数在 $[a,b]$ 上都是非负的. 由于

$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{1}{2}\left(\overset{x}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f)+f(x)+|f(a)|\right)\\&\quad-\frac{1}{2}\left(\overset{x}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f)-f(x)+|f(a)|\right)\\&=f_1(x)-f_2(x),\end{aligned}$$

故定理的必要性得证. 证毕.

由定理 5.5.2 和习题 1.3 的第 3 题可立即得到

推论 5.5.3 **设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的有界变差函数，则 $f(x)$ 的不连续点都是第一类的；$f(x)$ 的不连续点全体最多是一可数集；$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是 Riemann 可积的.**

定理 5.5.4 **设 f 是 $[a,b]$ 上的有界变差函数，那末唯一地存在在 (a,b) 上右连续的有界变差函数 g，使得 (i) 在 (a,b) 中 $f(x)$ 的连续点上 $g(x)=f(x)$；(ii) $g(a)=f(a)$，$g(b)=f(b)$；(iii) $\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(g)\leqslant\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f)$.**

证明 在 $[a,b]$ 上作函数

$$g(x)=\begin{cases}f(a), & x=a,\\ f(x+0), & x\in(a,b),\\ f(b), & x=b.\end{cases} \tag{5.5.1}$$

显然由(5.5.1)式定义的 g 是由 f 唯一确定的，并且 $g(a)=f(a), g(b)=f(b)$.

如果 $x_0\in(a,b)$是 $f(x)$的一个连续点，由于$f(x_0+0)=f(x_0)$，所以$g(x_0)=f(x_0+0)=f(x_0)$，即$g(x)=f(x)$在(a,b)中 $f(x)$的连续点上成立.

再证 $g(x)$在(a,b)上右连续：$\forall x_0\in(a,b), \forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当$x\in(x_0,x_0+\delta)$时，成立着

$$f(x_0+0)-\varepsilon<f(x)<f(x_0+0)+\varepsilon.$$

对$(x_0,x_0+\delta)$中每一点 x，只要取 $x_n\in(x, x_0+\delta)$，并且 $x_n\to x(n\to\infty)$，从上式立即得到

$$f(x_0+0)-\varepsilon\leqslant f(x+0)\leqslant f(x_0+0)+\varepsilon.$$

即当 $x\in(x_0,x_0+\delta)$时，$|g(x)-g(x_0)|<\varepsilon$. 这说明 $g(x)$在 x_0 点是右连续的. 因 x_0 是(a,b)中任意取的一点，所以 $g(x)$在(a,b)上右连续.

最后证明：$g\in V[a,b]$，且 $\overset{b}{\underset{a}{V}}(g)\leqslant\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)$.

事实上，在$[a,b]$上任取一组分点：$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$. 再取 y_i：$x_i<y_i<x_{i+1}, i=1,2,\cdots,n-1$，从而又得到$[a,b]$的一组分点：$a=x_0<y_1<y_2<\cdots<y_{n-1}<x_n=b$. 由于

$$|f(y_1)-f(x_0)|+\sum_{i=2}^{n-1}|f(y_i)-f(y_{i-1})|+|f(x_n)-f(y_{n-1})|$$
$$\leqslant\overset{b}{\underset{a}{V}}(f),$$

令 $y_i\to x_i(i=1,2,\cdots,n-1)$，从上式和 $g(x_i)=\lim\limits_{y_i\to x_i^+}f(y_i)$就得到

$$\sum_{i=1}^{n}|g(x_i)-g(x_{i-1})|\leqslant \bigvee_a^b(f).$$

因此，$g\in V[a,b]$，且 $\bigvee_a^b(g)\leqslant \bigvee_a^b(f)$. 证毕.

5.5.2 单调函数的微分性质

为了讨论单调函数的微分性质，我们还需要引入列导数的概念和 Vitali 意义下的覆盖概念，并建立一些引理.

定义 5.5.2 设 $f(x)$是$[a,b]$上的有限函数，$x_0\in[a,b]$，若存在序列 $h_n\to 0(h_n\neq 0, x_0+h_n\in[a,b])$，使

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_0+h_n)-f(x_0)}{h_n}=\lambda$$

(λ 为有限数或$\pm\infty$)，则称 λ 为 $f(x)$在 x_0 点相应于$\{h_n\}$的列导数(或称 λ 为 $f(x)$ 在 x_0 点的一个列导数)，记成 $\lambda=D_{\{h_n\}}f(x_0)$，或简记为$\lambda=Df(x_0)$. 列导数的值 λ 是与序列 h_n 相关的. 若 $f(x)$ 在 x_0 点的一切(可能存在的)列导数相等，则称 $f(x)$ 于 x_0 点(广义)可微，并称其中任何一个列导数的值为 $f(x)$在 x_0 点的导数，记作 $f'(x_0)$.

例 4 考察函数

$$f(x)=\begin{cases}\sin\dfrac{\pi}{x}, x\neq 0,\\ 0, x=0.\end{cases}$$

在 $x=0$ 处的列导数情况.

取 $h_n=\dfrac{1}{n}$，有$\dfrac{f(h_n)-f(0)}{h_n}=0$;

取 $h_n=\dfrac{1}{2n+\frac{1}{2}}$，有$\dfrac{f(h_n)-f(0)}{h_n}=2n+\dfrac{1}{2}\to+\infty(n\to\infty)$;

取 $h_n=\dfrac{1}{2n-\dfrac{1}{2}}$，有 $\dfrac{f(h_n)-f(0)}{h_n}=-\left(2n-\dfrac{1}{2}\right)$

$$\to-\infty\,(n\to\infty);$$

$\forall\lambda\in(-\infty,+\infty),\lambda\neq0$，取 $h_n=\dfrac{1}{2n-\dfrac{\lambda}{2n\pi}}$，则

$$\frac{f(h_n)-f(0)}{h_n}=\frac{\sin\dfrac{\lambda}{2n}}{\dfrac{n}{2n^2+\dfrac{\lambda}{2\pi}}}.$$

由于

$$\lim_{y\to+\infty}\frac{\sin\dfrac{\lambda}{2y}}{\dfrac{y}{2y^2+\dfrac{\lambda}{2\pi}}}=\lim_{y\to+\infty}\frac{\left(\sin\dfrac{\lambda}{2y}\right)'}{\left(\dfrac{y}{2y^2+\dfrac{\lambda}{2\pi}}\right)'}=\lim_{y\to+\infty}\frac{\lambda\cos\dfrac{\lambda}{2y}}{\dfrac{\left(2y^2-\dfrac{\lambda}{2\pi}\right)2y^2}{\left(2y^2+\dfrac{\lambda}{2\pi}\right)^2}}$$

$$=\lambda.$$

故 $$\lim_{n\to\infty}\frac{f(h_n)-f(0)}{h_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\dfrac{\lambda}{2n}}{\dfrac{n}{2n^2+\dfrac{\lambda}{2\pi}}}=\lambda.$$

因此，$f(x)$在 $x=0$ 点可以有取值于$[-\infty,\ +\infty]$ 之中的任何值的列导数，也就是说 $f(x)$在 $x=0$ 点的所有列导数所成之集为 $\hat{\mathbb{R}}=[-\infty,+\infty]$.

例 5 符号函数 $f(x)=\mathrm{sign}x$ 在 $x=0$ 点具有导数 $f'(0)=+\infty$，但 $f(x)$在 $x=0$ 点并不连续.

定义 5.5.3 设 $E\subset\mathbb{R}^1$，$\mathscr{M}=\{d\}$是长度为正的闭区间所成的集，若 $\forall x\in E$，恒有一闭区间列 $d_n\in\mathscr{M}\,(n=1,2,\cdots)$，使得

$$x\in d_n(n=1,2,\cdots),md_n\to 0(n\to\infty).$$

则称 $\mathscr{M}$ 依 Vitali 意义覆盖 E.

引理 5.5.5(Vitali引理) **设 $E\subset\mathbb{R}^1$ 为有界集，$\mathscr{M}$ 依 Vitali 意义覆盖 E，则可由 $\mathscr{M}$ 中选出有限个或可数个互不相交的闭区间 $d_1,d_2,\cdots$，使 $m\left(E-\bigcup_k d_k\right)=0$.**

证明 设 $E\subset\Delta=(a,b)$. 由于 $\mathscr{M}$ 依 Vitali 意义覆盖 E，故由 $\mathscr{M}$ 中除去一切不含于 (a,b) 内的那些 d 所得的集 $\mathscr{M}_0$ 仍然覆盖 E，以下用归纳法进行证明：

设 $\alpha_0=\sup\limits_{d\in\mathscr{M}_0}md$，则 $\alpha_0>0$. 先由 $\mathscr{M}_0$ 中任取一个 d_1，使 $md_1>\frac{1}{2}\alpha_0$，如果 $m(E-d_1)=0$，则引理已得证. 如果 $m^*(E-d_1)\neq 0$，令 $G_1=(a,b)-d_1$，G_1 为开集，并令 $\alpha_1=\sup\{md\mid d$ 是 $\mathscr{M}_0$ 中含于 G_1 的闭区间$\}$. 显然，$\alpha_1>0$，于是据上确界的定义，可由 $\mathscr{M}_0$ 中取 $d_2\subset G_1$，使 $md_2>\frac{1}{2}\alpha_1$，则 $d_2\cap d_1=\varnothing$. 如果 $m\left(E-\bigcup\limits_{k=1}^{2}d_k\right)=0$，则引理已经得证. 如果 $m^*\left(E-\bigcup\limits_{k=1}^{2}d_k\right)\neq 0$，则按上述办法继续进行. 一般地，设 $d_1,d_2,\cdots,d_n$ 是已从 $\mathscr{M}_0$ 中取出的彼此互不相交的闭区间，如果 $m\left(E-\bigcup\limits_{k=1}^{n}d_k\right)=0$，则引理得证. 如果 $m^*\left(E-\bigcup\limits_{k=1}^{n}d_k\right)\neq 0$，令 $F_n=\bigcup\limits_{k=1}^{n}d_k$，$G_n=(a,b)-F_n$，

$$\alpha_n=\sup\{md\mid d\text{ 是 }\mathscr{M}_0\text{ 中含于 }G_n\text{ 的闭区间}\}.$$

则 G_n 为开集，且 $\alpha_n>0$. 在 $\mathscr{M}_0$ 中取 $d_{n+1}\subset G_n$，使 $md_{n+1}>\frac{1}{2}\alpha_n$.

如上述手续至有限间而止，则引理已经得证，否则，就得到一列互不相交的闭区间：$d_1,d_2,\cdots,d_k,\cdots$.

现证：$m\left(E-\bigcup_{k=1}^{\infty}d_k\right)=0$.

对于每个 d_k，作闭区间 $D_k\supset d_k$，使 D_k 与 d_k 有相同的中心，且 $mD_k=5md_k$，由于 $\sum_k md_k\leqslant m\Delta=b-a$，故级数 $\sum_k mD_k$ 收敛. 因此，只要能证明，$\forall$ 自然数 i，有

$$E-\bigcup_{k=1}^{\infty}d_k\subset\bigcup_{k=i}^{\infty}D_k.$$

从而 $m^*\left(E-\bigcup_{k=1}^{\infty}d_k\right)\leqslant\sum_{k=i}^{\infty}mD_k\to0(i\to\infty)$. 引理就得证.

为此，任取 $x\in E-\bigcup_{k=1}^{\infty}d_k$，$\forall$ 自然数 i，有 $x\in G_i$，因 G_i 为开集，故 $\mathscr{M}_0$ 中有一个 $d\subset G_i$，使 $x\in d$，对于这个 d，关系式

$$d\subset G_n$$

不可能对一切自然数 n 成立，因为不然将有 $md\leqslant\alpha_n<2md_{n+1}$. 注意到 $md_{n+1}\to0(n\to\infty)$，有 $md=0$，这样 d 将不是正长度的区间. 故确有自然数 n，使关系式 $d\subset G_n$ 不成立，即有自然数 n，使 $d\cap F_n\neq\varnothing$. 设满足此式的最小自然数为 n_0. 由于 $d\cap F_i=\varnothing$，故 $n_0>i$，据 n_0 的定义知

$$d\cap F_{n_0-1}=\varnothing,d\cap F_{n_0}\neq\varnothing.$$

于是有

1° 因 $\varnothing\neq d\cap F_{n_0}=d\cap(F_{n_0-1}\cup d_{n_0})=(d\cap F_{n_0-1})\cup(d\cap d_{n_0})$，有 $d\cap d_{n_0}\neq\varnothing$;

2° 因 $d\subset G_{n_0-1}$，故有 $md\leqslant\alpha_{n_0-1}<2md_{n_0}$.

由此二事实即知 d 与 d_{n_0} 有公共点，且 d 的长度不超过 d_{n_0} 长度的两倍，故不论 d 的位置如何，有 $d\subset D_{n_0}$. 既然 $n_0>i$，更有 $d\subset$

$\bigcup_{k=i}^{\infty} D_k$，从而 $x\in\bigcup_{k=i}^{\infty} D_k$. 故 $E-\bigcup_{k=1}^{\infty} d_k\subset\bigcup_{k=i}^{\infty} D_k$. 证毕.

在应用上，有时也将引理 5.5.5 写成下面的形式:

推论 5.5.6　设 $E\subset\mathbb{R}^1$ 为有界集，$\mathscr{M}$ 依 Vitali 意义覆盖 E，则 $\forall\varepsilon>0$，可由 $\mathscr{M}$ 中选出有限个互不相交的闭区间 $d_1, d_2, \cdots, d_n$，使

$$m^*\left(E-\bigcup_{k=1}^{n} d_k\right)<\varepsilon.$$

证明　据引理 5.5.5，可从 $\mathscr{M}$ 中选出有限个或可数个互不相交的闭区间 $d_1, d_2, \cdots$，使

$$m\left(E-\bigcup_{k} d_k\right)=0.$$

如果区间个数有限，则推论已得证；否则，$\forall\varepsilon>0$，取 $n=n(\varepsilon)\in\mathbb{N}$，使 $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} md_k<\varepsilon$，则 $d_1, d_2, \cdots, d_n$ 适合本推论的要求:

$$m^*\left(E-\bigcup_{k=1}^{n} d_k\right)\leqslant m^*\left(E-\bigcup_{k=1}^{\infty} d_k\right)+m\left(\bigcup_{k=n+1}^{\infty} d_k\right)<\varepsilon. \text{证毕.}$$

引理 5.5.7　设 $f(x)$ 为 $[a, b]$ 上的严增函数，令 E 为 $[a, b]$ 中这样的点 x 所成之集：存在一个列导数 $Df(x)\leqslant p$，p 为一个非负常数，则

$$m^*f(E)\leqslant pm^*E,$$

这里 $f(E)$ 表示 E 的象集 $\{f(x)\mid x\in E\}$.

证明　$\forall\varepsilon>0$，取开集 $G\supset E$，使 $mG<m^*E+\varepsilon$.

任取常数 $p_0>p$ 及 $\forall x_0\in E$，则由列导数的定义知，有 $h_n\to 0$ ($h_n\neq 0, x_0+h_n\in[a,b]$)，使

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_0+h_n)-f(x_0)}{h_n}=Df(x_0)\leqslant p<p_0.$$

当 $h_n>0$ 时,记

$$d_n(x_0)=[x_0,x_0+h_n],\Delta_n(x_0)=[f(x_0),f(x_0+h_n)];$$

当 $h_n<0$ 时,记

$$d_n(x_0)=[x_0+h_n,x_0],\Delta_n(x_0)=[f(x_0+h_n),f(x_0)].$$

由于 $f(x)$为严增函数,故 $m(\Delta_n(x_0))>0$,且$f[d_n(x_0)]\subset\Delta_n(x_0)$. 既然 $m(d_n(x_0))\to 0(n\to\infty)$, 且$G$为开集,故对一切充分大的 n,恒有

$$d_n(x_0)\subset G,\quad \frac{f(x_0+h_n)-f(x_0)}{h_n}<p_0.$$

必要时可以从$\{h_n\}$中去掉有限个不论,因而不妨设对一切 $n\in\mathbf{N}$,上述二关系式同时成立. 于是有

$$m(\Delta_n(x_0))<p_0m(d_n(x_0)).$$

由此可见,$m(\Delta_n(x_0))\to 0(n\to\infty)$. 故闭区间集$\{\Delta_n(x)\,|\,x\in E,\ n=1,2,\cdots\}$依 Vitali 意义覆盖 $f(E)$. 据引理 5.5.5, 存在互不相交的闭区间列$\{\Delta_{n_i}(x_i)\}$,使

$$m\Big(f(E)-\bigcup_i\Delta_{n_i}(x_i)\Big)=0.$$

从而有

$$m^*f(E)\leqslant\sum_i m(\Delta_{n_i}(x_i))<p_0\sum_i m(d_{n_i}(x_i))=p_0m\Big(\bigcup_i d_{n_i}(x_i)\Big).$$

因为 $\bigcup_i d_{n_i}(x_i)\subset G$,故

$$m^*f(E)<p_0mG<p_0(m^*E+\varepsilon).$$

令 $\varepsilon\to 0,p_0\to p$,得$m^*f(E)\leqslant pm^*E$. 证毕.

引理 5.5.8 设 $f(x)$为$[a,b]$上的严增函数,令 E 表示$[a,b]$中这样的点 x 所成之集: 存在一个列导数 $Df(x)\geqslant q$, $q\geqslant 0$ 为常数,则 $m^*f(E)\geqslant qm^*E$.

证明 $\forall\varepsilon>0$,存在有界开集 $G\supset f(E)$,使 $mG<m^*f(E)+\varepsilon$.

记 $S=\{x_0 | x_0\in E, f(x)$ 在 x_0 点连续$\}$. 则 $E-S$ 至多是一个可数集.

当 $q=0$ 时，定理显然成立. 不妨设 $q>0$，任取 $q_0\in(0,q)$ 及 $\forall x_0\in E$，则由列导数的定义知，有 $h_n\to 0(h_n\neq 0, x_0+h_n\in[a,b])$，使

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_0+h_n)-f(x_0)}{h_n}=Df(x_0)\geqslant q>q_0.$$

当 $h_n>0$ 时，记

$$d_n(x_0)=[x_0, x_0+h_n], \Delta_n(x_0)=[f(x_0), f(x_0+h_n)];$$

当 $h_n<0$ 时，记

$$d_n(x_0)=[x_0+h_n, x_0], \Delta_n(x_0)=[f(x_0+h_n), f(x_0)].$$

如果 $x_0\in S$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_0+h_n)=f(x_0)\in G$. 因此，当 n 充分大以后，恒有

$$\Delta_n(x_0)\subset G,\quad \frac{f(x_0+h_n)-f(x_0)}{h_n}>q_0.$$

不妨设对一切自然数 n，上述二关系式同时成立. 于是有

$$m(\Delta_n(x_0))>q_0 m(d_n(x_0)).$$

由于闭区间集 $\{d_n(x) | x\in S, n=1,2,\cdots\}$ 依 Vitali 意义覆盖 S，所以，可从中选出互不相交的闭区间列 $\{d_{n_i}(x_i)\}$，使

$$m(S-\bigcup_i d_{n_i}(x_i))=0.$$

由 $f(x)$ 严增知诸 $\Delta_{n_i}(x_i)$ 也互不相交，并且 $\bigcup\limits_i \Delta_{n_i}(x_i)\subset G$. 又因为

$$E\subset(E-S)\cup(S-\bigcup_i d_{n_i}(x_i))\cup\left(\bigcup_i d_{n_i}(x_i)\right),$$

故

$$m^*E\leqslant\sum_i m(d_{n_i}(x_i))<\frac{1}{q_0}\sum_i m(\Delta_{n_i}(x_i))$$

$$=\frac{1}{q_0}m\left(\bigcup_i \Delta_{n_i}(x_i)\right)\leqslant\frac{1}{q_0}mG<\frac{1}{q_0}(m^*f(E)+\varepsilon).$$

令 $\varepsilon\to 0, q_0\to q(q>0)$，得

$$m^*f(E)\geqslant qm^*E.$$ 证毕.

定理 5.5.9(Lebesgue 定理)　设 $f(x)$ 是$[a,b]$ 上的单调函数,则 $f(x)$ 在$[a,b]$上几乎处处存在有限导数.

证明　不妨设 $f(x)$ 是$[a,b]$ 上的单调不减函数(因当 $f(x)$ 在$[a,b]$ 上单调不增时,考虑 $-f(x)$ 就可以了). 证明分以下两步进行:

1° 证明 $f(x)$ 在$[a,b]$上的有限或无穷大导数几乎处处存在.

设 $g(x)=f(x)+x$,则 $g(x)$ 是$[a,b]$上的严增函数,且 $g(x)$ 与 $f(x)$ 在$[a,b]$上的可微性相同. 实际上,在有列导数存在的点 x 有 $Dg(x)=Df(x)+1$. 因此,只要就 $f(x)$ 在$[a,b]$上是严增的情形证明定理即可.

设 E 为使 $f'(x)$ 不存在的点所成之集,于是对 E 中任一点 x_0,有相异列导数 $D_1f(x_0)$ 和 $D_2f(x_0)$,不妨设 $D_1f(x_0)<D_2f(x_0)$,于是存在两个正有理数 $p,q\,(p<q)$,适合

$$D_1f(x_0)<p<q<D_2f(x_0).$$

令 $E_{p,q}$ 表示满足上述关系式的一切点 x_0 所成之集,显然 $E=\bigcup\limits_{p,q}E_{p,q}$,这里求和记号对一切 $p<q$ 的正有理数偶(p,q)而言. 若能证明每个 $E_{p,q}$ 为零测度集,则因可数个零测度集之并仍为零测度集,故有 $mE=0$. 由引理5.5.7和引理5.5.8,可立得

$$qm^*E_{p,q}\leqslant m^*f(E_{p,q})\leqslant pm^*E_{p,q}.$$

由于 $q>p$,故有 $m^*E_{p,q}=0$.

2°　证明 $E_0=\{x\,|\,x\in[a,b],f'(x)=+\infty\}$ 是零测度集.

与 1° 一样,只要以 $f(x)$ 为$[a,b]$上严增函数的情形来证 $mE_0=0$ 即可. 由于$\forall x\in E_0$及每个自然数n,有$Df(x)\geqslant n$. 据引理 5.5.8,有

$$m^*f(E_0)\geqslant nm^*E_0,$$

但 $$m^*f(E_0)\leqslant f(b)-f(a),$$

故 $$m^*E_0\leqslant\frac{1}{n}[f(b)-f(a)],\text{令 } n\to\infty \text{ 得 } mE_0=0.$$

综合 1°,2° 两步的结果知,定理成立. 证毕.

由定理 5.5.2 和定理 5.5.9 可立得如下结果:

推论 5.5.10 设 $f\in V[a,b]$, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上几乎处处存在有限导数.

定理 5.5.11(Fubini 定理) 设 $f_1(x),f_2(x),\cdots,f_n(x),\cdots$ 都是 $[a,b]$ 上的单调不减函数, 且 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ $(\forall x\in[a,b])$, 则 $f'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}f'_n(x)$ a.e. 于 $[a,b]$.

证明 不妨设 $f_n(a)=0(n=1,2,\cdots)$, 否则只要讨论 $\{f_n(x)-f_n(a)\}$ 就可以了. 令 $s_n(x)=\sum\limits_{i=1}^{n}f_i(x)$, 则 $s_n(x),f(x)$ 都是 $[a,b]$ 上的单调不减函数, 因此, 存在 $E\subset[a,b]$, $mE=0$, 使在 $[a,b]-E$ 上, 导数 $f'_1(x),f'_2(x),\cdots,f'_n(x),\cdots,f'(x)$ 都处处存在且有限. 由于 $s_n(x)-s_{n-1}(x)=f_n(x)$ (规定 $s_0(x)\equiv 0$), $f(x)-s_n(x)$ 都是 $[a,b]$ 上的单调不减函数, 所以, 当 $x\in[a,b]-E$ 时, 有

$$(s_n(x)-s_{n-1}(x))'\geqslant 0,\ (f(x)-s_n(x))'\geqslant 0.$$

即当 $x\in[a,b]-E$ 时, 有 $s'_{n-1}(x)\leqslant s'_n(x)\leqslant f'(x)$. 于是 $\forall x\in[a,b]-E$, 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}s'_n(x)$ 存在且有限, 故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f'_n(x)=\lim\limits_{n\to\infty}s'_n(x)$ 在 $[a,b]-E$ 上处处收敛. 如能证明存在 $\{s'_n(x)\}$ 的一个子列 $\{s'_{n_k}(x)\}$, 使 $s'_{n_k}(x)\xrightarrow{\text{a.e.}}f'(x)$ 于 $[a,b]$, 定理就得证.

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}s_n(b)=f(b)$, 所以, 对每个自然数 k, 总有自然数 n_k, 使 $f(b)-s_{n_k}(b)<\frac{1}{2^k}$. 又因为 $f(x)-s_{n_k}(x)$ 也是 x 的单调不减函

数，且 $f(a)-s_{n_k}(a)=0$. 所以

$$0\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}(f(x)-s_{n_k}(x))\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}(f(b)-s_{n_k}(b))<\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}=1.$$

这说明 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\{f(x)-s_{n_k}(x)\}$ 也是由单调不减函数 $(f(x)-s_{n_k}(x))$ 所构成的收敛级数，根据前面已经证明的事实，便得

$$\sum_{k=1}^{\infty}(f'(x)-s_{n_k}'(x))<+\infty \text{ a.e. 于}[a,b].$$

故 $s_{n_k}'(x)\xrightarrow{\text{a.e.}}f'(x)$ 于 $[a,b]$. 证毕.

注 1 当 $f_n(x)(n=1,2,\cdots)$ 都是关于 x 在 $[a,b]$ 上的单调不增函数时，定理也成立.

注 2 将条件 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上处处收敛减弱为在端点 a 和 b 处 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(a)$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(b)$ 收敛，定理仍成立.

定理 5.5.12 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的单调不减函数，则 $f'(x)\in L[a,b]$，且

$$\int_a^b f'(x)dx\leqslant f(b)-f(a). \tag{5.5.2}$$

证明 设在 $(b,\ b+1]$ 上 $f(t)=f(b)$. 对任意自然数 n，令

$$\varphi_n(t)=\frac{f\left(t+\frac{1}{n}\right)-f(t)}{\frac{1}{n}},$$

则 $\varphi_n(t)$ 在 $[a,b]$ 上不仅 Lebesgue 可积而且 Riemann 可积，$\varphi_n(t)\geqslant 0$. 由于

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b\varphi_n(t)dt=\lim_{n\to\infty}n\left[\int_a^b\left(f\left(t+\frac{1}{n}\right)-f(t)\right)dt\right]$$

$$=\varliminf_{n\to\infty} n\left[\int_{a+\frac{1}{n}}^{b+\frac{1}{n}} f(t)dt-\left(\int_a^{a+\frac{1}{n}} f(t)dt+\int_{a+\frac{1}{n}}^{b} f(t)dt\right)\right]$$

$$=\varliminf_{n\to\infty} n\left[\int_b^{b+\frac{1}{n}} f(t)dt-\int_a^{a+\frac{1}{n}} f(t)dt\right]\leqslant f(b)-f(a).$$

由 Fatou 引理得到

$$\int_a^b f'(t)dt=\int_a^b \lim_{n\to\infty}\varphi_n(t)\leqslant \varliminf_{n\to\infty}\int_a^b \varphi_n(t)dt$$

$$\leqslant f(b)-f(a)<+\infty.$$ 证毕.

注 定理 5.5.12 中的不等式(5.5.2)，不能把“$\leqslant$”号改成“$=$”号. 下面的例 6 说明，即使 $f(x)$ 是$[a,b]$上的连续单调不减函数，也不能保证(5.5.2)式成为等式.

例 6 利用 Cantor 三分集 P_0 作$[0,1]$上的函数 $\theta(x)$:

1° 在开集 $G_0=[0,1]-P_0$ 的各构成区间上规定 $\theta(x)$ 的值如下:

在$\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$上 $\theta(x)$ 取$\frac{1}{2}$，在$\left(\frac{1}{9},\frac{2}{9}\right)$、$\left(\frac{7}{9},\frac{8}{9}\right)$上 $\theta(x)$ 分别取$\frac{1}{4}$，$\frac{3}{4}$. 在$\left(\frac{1}{27},\frac{2}{27}\right)$、$\left(\frac{7}{27},\frac{8}{27}\right)$、$\left(\frac{19}{27},\frac{20}{27}\right)$、$\left(\frac{25}{27},\frac{26}{27}\right)$上 $\theta(x)$ 分别取$\frac{1}{8}$、$\frac{3}{8}$、$\frac{5}{8}$、$\frac{7}{8}$. 一般地，对任意自然数 n，在

$$\left(\frac{1}{3^n},\frac{2}{3^n}\right),\ \left(\frac{7}{3^n},\frac{8}{3^n}\right),\ \left(\frac{19}{3^n},\frac{20}{3^n}\right),\cdots\left(\frac{3^n-2}{3^n},\frac{3^n-1}{3^n}\right)$$

上 $\theta(x)$ 分别取

$$\frac{1}{2^n},\ \frac{3}{2^n},\ \frac{5}{2^n},\cdots,\frac{2^n-1}{2^n}.$$

2° 规定: $\theta(0)=0$, $\theta(1)=1$. 当 $x\in P_0-\{0,1\}$时, $\theta(x)=\sup\{\theta(t)\mid t\in G_0,\ t<x\}$.

所作函数 $\theta(x)$称为 Cantor 函数.

显然$\theta(x)$在[0,1]上单调不减. 再证$\theta(x)$在[0,1]上连续:假若$\theta(x)$在$x_0\in[0,1]$上不连续,则开区间$(\theta(x_0-0),\ \theta(x_0+0))$非空,此开区间中的每个数都不属于$\theta(x)$的值域,这与$\overline{\theta(G_0)}=[0,1]$的事实相矛盾.

当$x\in G_0$时,显然$\theta'(x)=0$,故$\theta'(x)=0$ a·e·于[0,1],从而

$$\int_0^1 \theta'(x)dx=0<1=\theta(1)-\theta(0).$$

推论 5.5.13 若$f\in V[a,b]$,则$f'(t)\in L[a,b]$.

5.5.3 Lebesgue 不定积分与绝对连续函数

定义 5.5.4 设$f\in L[a,b]$,C是任一常数,我们把$[a,b]$上的函数

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt+C,x\in[a,b]$$

称为$f(x)$的一个 Lebesgue 不定积分(简称不定积分).

下面我们探讨一个函数能够写成某个 Lebesgue 可积函数的不定积分的条件.

设$f\in L[a,b]$,并且

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt+C\quad (x\in[a,b])$$

是$f(x)$的任一不定积分. 由于$|f(x)|$在$[a,b]$上具积分之绝对连续性,所以$\forall\varepsilon>0$,,$\exists\delta>0$,使当$e\subset[a,b]$,$me<\delta$时,恒有

$$\int_e |f(x)|dx<\varepsilon.$$

因此,对$[a,b]$中任意有限个互不相交的开区间(a_i,b_i), $i=1,2,\cdots,n$,当$m\left(\bigcup_{i=1}^n (a_i,b_i)\right)=\sum_{i=1}^n (b_i-a_i)<\delta$时,

$$\sum_{i=1}^n |F(b_i)-F(a_i)|=\sum_{i=1}^n \left|\int_{a_i}^{b_i} f(t)dt\right|\leqslant\sum_{i=1}^n\int_{a_i}^{b_i}|f(t)|dt$$

$$=\int_{\bigcup_{i=1}^{n}(a_i,b_i)}|f(t)|dt<\varepsilon.$$

由此可见，能够写成某个 Lebesgue 可积函数的不定积分的函数 $F(x)$，它要具有比普通连续性更强的连续性，将这种连续性抽象出来，引入如下定义：

定义 5.5.5 设 $F(x)$ 是 $[a,b]$ 上的有限函数，如果 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，使对 $[a,b]$ 中的任意有限个互不相交的开区间 (a_i,b_i)，$i=1,2,\cdots,n$，当 $\sum_{i=1}^{n}(b_i-a_i)<\delta$ 时，有

$$\sum_{i=1}^{n}|F(b_i)-F(a_i)|<\varepsilon.$$

则称 $F(x)$ 是 $[a,b]$ 上的绝对连续函数（或全连续函数）.

由以上讨论可知，若 $f\in L[a,b]$，则 $f(x)$ 的 Lebesgue 不定积分是 $[a,b]$ 上的绝对连续函数.

由定义 5.5.5 还可以看出，若 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上绝对连续，则必然一致连续，从而在 $[a,b]$ 上有界. 但 $[a,b]$ 上的一致连续函数却不一定在 $[a,b]$ 上绝对连续（见本节例 3）.

例 7 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足 Lipschitz 条件，则 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的绝对连续函数.

证明 由题设知，存在常数 $L>0$，使当 $x_1,x_2\in[a,b]$ 时，有

$$|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant L|x_1-x_2|.$$

$\forall\varepsilon>0$，取 $\delta=\frac{\varepsilon}{L}$，对 $[a,b]$ 中任意有限个互不相交的开区间 $\{(a_i,b_i)\}$，当 $\sum_{i}(b_i-a_i)<\delta$ 时，

$$\sum_{i}|f(b_i)-f(a_i)|\leqslant L\cdot\sum_{i}(b_i-a_i)<L\cdot\delta=\varepsilon.$$ 证毕.

定理5.5.14 绝对连续函数具有如下性质：

1° 若 $f(x),g(x)$都是$[a,b]$上的绝对连续函数,α,β 是两个常数,则$\alpha f(x)+\beta g(x)$、$f(x)\cdot g(x)$、$\frac{f(x)}{g(x)}(g(x)\neq 0)$也都是$[a,b]$上的绝对连续函数.

2° 若 $f(x)$是$[a,b]$上的绝对连续函数,则$f\in V[a,b]$.

证明 1° 的证明留为习题,下面我们证明 2°:

取 $\varepsilon=1$,由题设知必有 $\delta>0$,使对$[a,b]$中的任意有限个互不相交的开区间$\{(a_i,b_i)\}$,当$\sum_i(b_i-a_i)<\delta$时,有

$$\sum_i|f(b_i)-f(a_i)|<1.$$

取自然数 N,使得 $\frac{b-a}{N}<\delta$. 将$[a,b]N$等分,得到分点组

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_N=b.$$

对$[x_{i-1},x_i]$ 上任何一组分点 $P_i:x_{i-1}=z_0<z_1<\cdots<z_k=x_i$,由于$\sum_{j=1}^{k}(z_j-z_{j-1})=x_i-x_{i-1}<\delta$,所以

$$\bigvee_{x_{i-1}}^{x_i}[f,P_i]=\sum_{j=1}^{k}|f(z_j)-f(z_{j-1})|<1.$$

从而$\bigvee_{x_{i-1}}^{x_i}(f)\leqslant 1$. 故$\bigvee_a^b(f)=\sum_{i=1}^{N}\bigvee_{x_{i-1}}^{x_i}(f)\leqslant N$,即 $f\in V[a,b]$.

证毕.

推论 5.5.15 若 $f(x)$是$[a,b]$上的绝对连续函数,则 $f(x)$在$[a,b]$上几乎处处存在有限导数,且 $f'(x)\in L[a,b]$.

5.5.4 Lebesgue 不定积分与微分的关系

在数学分析中,关于 Riemann 积分有如下两个结论:

1° 若 $F(x)$在$[a,b]$上具有 Riemann 可积的导函数,则

$$(R)\int_a^x F'(t)dt=F(x)-F(a)\quad (x\in[a,b]). \tag{5.5.3}$$

2° **若 $f(x)$ 是$[a,b]$上的连续函数,则**

$$\frac{d}{dx}\left[(R)\int_a^x f(t)dt+C\right]=f(x)\quad (x\in[a,b]). \tag{5.5.4}$$

下面我们对于 Lebesgue 积分来建立相应于 1°、2° 的定理.

定理 5.5.16 若$F(x)$在$[a,b]$上绝对连续,则$F'(x)\in L[a,b]$,且 $\forall x\in[a,b]$,有

$$\int_a^x F'(t)dt=F(x)-F(a). \tag{5.5.5}$$

((5.5.5)即 Lebesgue 积分的 Newton-Leibniz 公式)

证明 据推论 5.5.15,$F'(x)\in L[a,b]$. 剩下的问题是要证明(5.5.5)式成立.

在$(b,b+1]$上补充定义 $F(x)$的值为常数 $F(b)$, 则 $F(x)$便成为$[a,b+1]$上的绝对连续函数. 相应于每个自然数 n, 作$[a,b]$上的函数

$$\varphi_n(x)=\frac{F\left(x+\frac{1}{n}\right)-F(x)}{\frac{1}{n}}.$$

显然 $\varphi_n(x)$在$[a,b]$上连续,从而 $\varphi_n(x)$在 $[a,b]$上不仅 Lebesgue 可积,而且Riemann 可积. 又因为$\varphi_n(x)\xrightarrow{\text{a.e.}}F'(x)$于$[a,b]$, 所以如果能证明 $\varphi_n(x)(n=1,2,\cdots)$ 的积分具有等度绝对连续性, 据 Vitali 逐项积分定理,就有

$$\int_a^x F'(t)dt=\lim_{n\to\infty}\int_a^x\varphi_n(t)dt=\lim_{n\to\infty}n\int_a^x\left[F\left(t+\frac{1}{n}\right)-F(t)\right]dt$$

$$=\lim_{n\to\infty}n\left[\int_{a+\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}}F(t)dt-\int_a^x F(t)dt\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty} n\left[\int_x^{x+\frac{1}{n}} F(t)dt - \int_a^{a+\frac{1}{n}} F(t)dt\right]$$
$$=F(x)-F(a).$$

因此，问题归结为证明 $\varphi_n(x)(n=1,2,\cdots)$ 的积分具有等度绝对连续性，即要证明 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，使得当 $A\subset[a,b]$，$mA<\delta$ 时，有

$$\left|\int_A \varphi_n(x)dx\right|<\varepsilon \quad (n=1,2,\cdots).$$

分以下三步进行证明：

1° 当 $A\subset[a,b]$ 为开集时，不妨设 A 可以表为可数个互不相交的开区间 I_i 之并 $\bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$，其中 $I_i=(a_i,b_i)(i=1,2,\cdots)$ 为 A 的构成区间. 对任意给定的自然数 n 及每个自然数 k，

$$\int_{\bigcup_{i=1}^{k} I_i} \varphi_n(x)dx=\sum_{i=1}^{k}\int_{a_i}^{b_i}\frac{F\left(x+\frac{1}{n}\right)-F(x)}{\frac{1}{n}}dx$$
$$=n\cdot\sum_{i=1}^{k}\left[\int_{b_i}^{b_i+\frac{1}{n}}F(x)dx-\int_{a_i}^{a_i+\frac{1}{n}}F(x)dx\right]$$
$$=n\cdot\sum_{i=1}^{k}\int_0^{\frac{1}{n}}[F(b_i+x)-F(a_i+x)]dx$$
$$=n\cdot\int_0^{\frac{1}{n}}\sum_{i=1}^{k}[F(b_i+x)-F(a_i+x)]dx.$$

因 $F(x)$ 在 $[a,b+1]$ 上绝对连续，于是 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，使对 $[a,b+1]$ 中的任意有限个互不相交的开区间 $\{(c_i,d_i)\}$，当 $\sum_i (d_i-c_i)<\delta$ 时，有

$$\sum_i |F(d_i)-F(c_i)|<\varepsilon.$$

从而当 $mA=\sum_{i=1}^{\infty}(b_i-a_i)<\delta$ 时，$\forall x\in\left[0,\ \frac{1}{n}\right]$，有

$$\sum_{i=1}^{\infty}[(b_i+x)-(a_i+x)]=\sum_{i=1}^{\infty}(b_i-a_i)<\delta,$$

即对每个自然数 k，有

$$\sum_{i=1}^{k}|F(b_i+x)-F(a_i+x)|<\varepsilon.$$

所以

$$\left|\int_{\bigcup\limits_{i=1}^{k}I_i}\varphi_n(x)dx\right|\leqslant n\cdot\int_0^{\frac{1}{n}}\left|\sum_{i=1}^{k}[F(b_i+x)-F(a_i+x)]\right|dx<\varepsilon.$$

由于

$$|\chi_{\bigcup\limits_{i=1}^{k}I_i}(x)\varphi_n(x)|\leqslant|\varphi_n(x)|\quad(x\in[a,\ b];k=1,2,\cdots),$$

$$\lim_{k\to\infty}\chi_{\bigcup\limits_{i=1}^{k}I_i}(x)\varphi_n(x)=\chi_A(x)\varphi_n(x).$$

据 Lebesgue 控制收敛定理，

$$\lim_{k\to\infty}\left|\int_{\bigcup\limits_{i=1}^{k}I_i}\varphi_n(x)dx\right|=\lim_{k\to\infty}\left|\int_a^b\chi_{\bigcup\limits_{i=1}^{k}I_i}(x)\varphi_n(x)dx\right|$$

$$=\left|\int_a^b\chi_A(x)\varphi_n(x)dx\right|=\left|\int_A\varphi_n(x)dx\right|\leqslant\varepsilon.$$

故
$$\left|\int_A\varphi_n(x)dx\right|\leqslant\varepsilon\quad(n=1,2,\cdots).$$

2° 当 $A\subset[a,b]$ 为 G_δ 型集，$mA<\delta$ 时，设 $A=\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}G_i$，$G_i$ 为开集，且 $[a,b]\supset G_1\supset G_2\supset\cdots\supset G_i\supset\cdots$，由于 $\lim\limits_{i\to\infty}mG_i=mA<\delta$，所以当 i 充分大以后，有 $mG_i<\delta$。和 1° 同理，据 Lebesgue 控制收敛

定理，

$$\left|\int_A \varphi_n(x)dx\right| = \left|\int_a^b \chi_A(x)\varphi_n(x)dx\right|$$

$$= \left|\int_a^b \lim_{i\to\infty}\chi_{G_i}(x)\varphi_n(x)dx\right|$$

$$= \lim_{i\to\infty}\left|\int_a^b \chi_{G_i}(x)\varphi_n(x)dx\right|$$

$$= \lim_{i\to\infty}\left|\int_{G_i} \varphi_n(x)dx\right| \leqslant e$$

$$(n=1,2,\cdots).$$

3° 当 $A\subset[a,b]$ 为任意可测集，$mA<\delta$ 时，据定理 3.2.6，有 G_δ 型集 $B\supset A$，使 $mB=mA$，从而 $m(B-A)=0$，于是

$$\left|\int_A \varphi_n(x)dx\right| = \left|\int_A \varphi_n(x)dx + \int_{B-A}\varphi_n(x)dx\right|$$

$$= \left|\int_B \varphi_n(x)dx\right| \leqslant e \quad (n=1,2,\cdots).$$ 证毕.

推论 5.5.17 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上绝对连续 $\Leftrightarrow$ 存在 $f\in L[a,b]$，使

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt+C, x\in[a,b].$$

定理 5.5.18 设 $f\in L[a,b]$，则函数

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt+C(C \text{ 为常数}, x\in[a,b])$$

在 $[a,b]$ 上几乎处处存在有限导数，且 $F'(x)\sim f(x)$ 于 $[a,b]$

证明 据推论 5.5.17 和推论 5.5.15，$F(x)$ 在 $[a,b]$ 上绝对连续，从而 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上几乎处处存在有限导数，且 $F'(x)\in L[a,b]$，所以 $F'(x)-f(x)\in L[a,b]$，据定理 5.5.16，$\forall x\in[a,b]$，有

$$\int_a^x [F'(t)-f(t)]dt=[F(x)-F(a)]-[F(x)-C]$$

$$=C-F(a)=F(a)-F(a)=0.$$

再由习题 5.2 的第 4 题知，$F'(x)\sim f(x)$ 于 $[a,b]$. 证毕.

通过上面的讨论可以看出：利用 Lebesgue 积分这一工具，把数学分析中原函数、不定积分、Newton-Leibniz 公式之间相互关系的讨论深入了一大步.

5.5.5 Lebesgue 积分的分部积分公式和换元积分公式

定理 5.5.19 设 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上绝对连续，$g\in L[a,b]$，$G(x)$ 是 $g(x)$ 的 Lebesgue 不定积分，则

$$\int_a^b F(x)g(x)dx=F(x)G(x)\Big|_a^b-\int_a^b F'(x)G(x)dx.$$

证明 因为 $F(x)$、$G(x)$ 都在 $[a,b]$ 上绝对连续，从而它们都在 $[a,b]$ 上有界，即存在常数 $M>0$，$L>0$，使对一切 $x\in[a,b]$，有 $|F(x)|\leqslant M$，$|G(x)|\leqslant L$. 由于

$$|F(x)g(x)|\leqslant M|g(x)|,\ M|g(x)|\in L[a,b];$$

$$|F'(x)G(x)|\leqslant L|F'(x)|,\ L|F'(x)|\in L[a,b],$$

所以，$\qquad F(x)g(x)\in L[a,b],\ F'(x)G(x)\in L[a,b],$

从而 $\qquad F'(x)G(x)+F(x)g(x)\in L[a,b].$

令 $H(x)=F(x)G(x)$，则 $H(x)$ 在 $[a,b]$ 上绝对连续，且 $H'(x)=F'(x)G(x)+F(x)g(x)$ a.e. 于 $[a,b]$. 据定理 5.5.16

$$\int_a^b F'(x)G(x)dx+\int_a^b F(x)g(x)dx=H(b)-H(a)$$

$$=F(x)G(x)\Big|_a^b.$$

故 $\displaystyle\int_a^b F(x)g(x)dx=F(x)G(x)\Big|_a^b-\int_a^b F'(x)G(x)dx$. 证毕.

***定理 5.5.20** 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的 Lebesgue 可积函数，$\varphi(t)$ 是 $[\alpha,\beta]$ 上严格增加的绝对连续函数，并且 $a=\varphi(\alpha)$，$b=\varphi(\beta)$，

则

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt.$$

证明留为习题.

习 题 5.5

1. 证明定理 5.5.1 的 1°、3°、4° 及定理 5.5.14 的1°.

2. 证明 $F(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x^2}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$，在$[-1,1]$上处处可微，但 $F(x)$不绝对连续.

3. 设 $f\in V[a,b]$，则$\frac{d}{dx}\overset{x}{\underset{a}{V}}(f)=|f'(x)|$ a·e·于$[a,b]$.

4. 设 $f(x)$在$[a,b]$上连续，则 $f(x)$ 在$[a,b]$上绝对连续$\Leftrightarrow|f(x)|$在$[a,b]$上绝对连续.

5. 设 $F(x)$ 是$[a,b]$ 上的绝对连续函数，且 $F'(x)=0$ a·e·于$[a,b]$，则 $F(x)\equiv$常数.

6. 设 $f\in L[a,b]$，则有 $E\subset[a,b]$，$mE=0$，使当 $x_0\in[a,b]-E$ 时，有

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{x_0-h_1}^{x_0+h_2}|f(x)-f(x_0)|dx=0,$$

其中，$h_1\geqslant 0$，$h_2\geqslant 0$，并且 $h=h_1+h_2>0$.

7. 设 $f(x)$在$[a,b]$上绝对连续，则 $\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)=\int_a^b|f'(t)|dt$.

8. 证明：$f(x)$在$[a,b]$上绝对连续$\Leftrightarrow\overset{x}{\underset{a}{V}}(f)$在$[a,b]$上绝对连续.

*9. 证明定理 5.5.20.

*§5.6 一般测度空间$(X,\mathscr{S},\mu)$上可测函数的积分

关于一般测度空间$(X,\mathscr{S},\mu)$上可测函数的积分，其建立的顺序和 Lebesgue 积分是类似的. 也是先建立关于$\mathscr{S}$的非负简单函

数的积分，再建立关于$\mathscr{S}$的非负可测函数的积分，然后建立关于$\mathscr{S}$的一般可测函数的积分.

定义 5.6.1 设$(X,\mathscr{S},\mu)$是一测度空间，$E\in\mathscr{S}$，$\varphi(x)$是E上关于$\mathscr{S}$的非负简单函数，$\varphi(x)$的标准初等分解为

$$\varphi(x)=\sum_{i=1}^{n}c_i\chi_{E_i}(x),\quad x\in E.$$

我们把和数$\sum_{i=1}^{n}c_i\mu(E_i)$称为$\varphi(x)$在$E$上关于测度$\mu$的积分，记作$\int_E\varphi(x)d\mu$或$\int_E\varphi d\mu$. 当此积分为有限数时，称$\varphi(x)$在$E$上关于测度$\mu$可积.

把本章§5.1定义5.1.2和定义5.1.3的表述在测度空间$(X,\mathscr{S},\mu)$的意义下来解释(积分号中的dx改为$d\mu$)，便得到关于$\mathscr{S}$的(非负、一般)可测函数$f(x)$在E上关于测度μ的积分及关于测度μ可积的定义.

设$(X,\mathscr{S},\mu)$是σ-有限的完全测度空间. 此时，本章§5.1、§5.3所述的积分诸性质都可以推广到上述$(X,\mathscr{S},\mu)$意义下的积分中来，一般只须把原表述（包括证明）中的dx改为$d\mu$并在$(X,\mathscr{S},\mu)$的意义下来解释即可. 关于本章§5.4的Fubini定理也可以推广到两个全σ-有限的完全测度空间的乘积测度空间中来

*§5.7 Lebesgue–Stieltjes 积分

由于一般分析数学、数学物理和概率论等课程中常用的积分除Lebesgue积分外，还有n维欧几里得空间上关于Lebesgue-Stieltjes测度的积分，特别是直线$\mathbf{R}^1$上关于Lebesgue-Stieltjes测度的积分，对此再作一些简单介绍.

设g是$\mathbf{R}^1$上单调不减的右连续函数(又称为$\mathbf{R}^1$上分布)，根

据§3.3例11和例16,我们就得到Lebesgue-Stieltjes可测集,即g^*-可测集，用$\mathscr{L}^g$表示g^*-可测集全体,$\mathscr{L}^g$上的测度g^*仍记为g,这样就得到一个完全测度空间$(\mathbf{R}^1,\mathscr{L}^g,g)$，称它为(1维) Lebesgue-Stieltjes测度空间.g显然是全σ-有限的，而且$\mathscr{L}^g\supset\mathscr{B}_1$($\mathbf{R}^1$上Borel集全体),其中四种类型的区间的测度是:

$$g((a,b])=g(b)-g(a);$$
$$g((a,b))=g(b-0)-g(a);$$
$$g([a,b))=g(b-0)-g(a-0);$$
$$g([a,b])=g(b)-g(a-0).$$

由于$\mathscr{S}(\mathscr{O}_1)=\mathscr{B}_1$是代数,根据定理3.3.12，对每个$E\in\mathscr{L}^g$,必有$A,B\in\mathscr{B}_1$,使得$A\supset E\supset B$,及

$$g(A-E)=g(E-B)=0.$$

而且可以证明$E\in\mathscr{L}^g\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0$,必有开集$O$及闭集$F$,使得$O\supset E\supset F$,且$g(O-F)<\varepsilon$. 如果$E\in\mathscr{L}^g$,$f$是$E$上关于$\mathscr{L}^g$的可测函数,按§5.6方式建立关于测度$g$的积分，通常称为Lebesgue-Stieltjes积分,简称为L-S积分,记作$\int_E fdg$. 当E是区间$[a,b]$时，又常记作$\int_a^b fdg$. 当g满足$\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=1$, 即$g(\mathbf{R}^1)=1$时,$(\mathbf{R}^1,\mathscr{L}^g,g)$就是一种概率测度空间，在这种空间上的L-S积分是概率论中最基本的工具之一.

由于L-S测度是一般测度的特殊情形，所以一般测度空间上可测函数的积分的性质及逐项积分定理基本上都可以搬到L-S积分中来.

附录5.8 Riemann-Stieltjes积分

Riemann-Stieltjes积分是Riemann积分的推广，在本书泛函分析部分证明$C[a,b]$上连续线性泛函的表示定理(Riesz定理)时要用这种积分，所以我们在这里将此积分的有关定义和基本性质列出，以备查考，但不给证明.

定义 5.8.1 设f,g是$[a,b]$上的两个有限实值函数，在$[a,b]$上任取一个分点组

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b,$$

作和式

$$S(f,g;x_0,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)(g(x_i)-g(x_{i-1})), \qquad (5.8.1)$$

其中$\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$. 记$\lambda=\max\limits_i(x_i-x_{i-1})$. 如果存在实数$A$，使得

$$\lim_{\lambda\to 0}S(f,g;x_0,\cdots,x_n)=A, \qquad (5.8.2)$$

则称f关于g在$[a,b]$上Riemann-Stieltjes可积分，并记$A=\int_a^b f(x)dg(x)$或$A=\int_a^b fdg$，称$\int_a^b fdg$为f关于g在$[a,b]$上的Riemann-Stieltjes积分.

显然，当$g(x)=x$时，Riemann-Stieltjes积分就是Riemann积分.

为了书写方便，以下将“Riemann-Stieltjes可积”、“Riemann-Stieltjes积分”简写作“(R-S)可积”、“(R-S)积分”.

当然，(R-S)积分也可以推广到复值函数或$\mathbf{R}^1$中无限区间(其意义见定义2.1.5的注2)的情形.

定理 5.8.1 (R-S) **积分有如下性质**(这里只列出区间$[a,b]$

上的情形):

1) 假定 x_0 既是 f 又是 g 的不连续点，则 f、g 的(R-S)积分不存在.

2) 如果 f_1、f_2 关于 g 在 $[a,b]$ 上都是(R-S)可积的，则 f_1、f_2 的线性组合关于 g 在 $[a,b]$ 上也是(R-S)可积的，并且

$$\int_a^b (\alpha f_1+\beta f_2)dg=\alpha\int_a^b f_1dg+\beta\int_a^b f_2dg,$$

其中 α、β 是常数.

3) 当 f 关于 g 在 $[a,b]$ 上(R-S)可积时，对任何 $c\in(a,b)$，f 关于 g 在 $[a,c]$、$[c,b]$ 上都(R-S)可积，并且

$$\int_a^b fdg=\int_a^c fdg+\int_c^b fdg.$$

4) (分部积分公式) 如果 f 关于 g 在 $[a,b]$ 上(R-S)可积，则 g 关于 f 在 $[a,b]$ 上必然(R-S)可积，并且

$$\int_a^b fdg=f(b)g(b)-f(a)g(a)-\int_a^b gdf.$$

5) 如果 f 关于 g_1、g_2 在 $[a,b]$ 上都是(R-S)可积的，则 f 关于 g_1、g_2 的线性组合在 $[a,b]$ 上也是(R-S)可积的，并且

$$\int_a^b fd(\alpha g_1+\beta g_2)=\alpha\int_a^b fdg_1+\beta\int_a^b fdg_2,$$

其中 α、β 是常数.

6) (积分存在的一个充分条件) 如果 f 在 $[a,b]$ 上连续，g 在 $[a,b]$ 上单调增加(或单调减少)，则 f 关于 g 在 $[a,b]$ 上的(R-S)积分存在，并且

$$\left|\int_a^b fdg\right|\leqslant \sup_{x\in[a,b]}|f(x)|\,|g(b)-g(a)|.$$

如果 f 在 $[a,b]$ 上连续，g 是 $[a,b]$ 上有界变差函数，则 f 关于 g 在 $[a,b]$ 上的(R-S)积分存在，并且

$$\left|\int_a^b f dg\right| \leqslant \sup_{x\in[a,b]} |f(x)| \bigvee_a^b (g).$$

7)（积分存在的充要条件） 设 f 是$[a,b]$上的有界函数，g是$[a,b]$上的有界变差函数，ω_k 表示 f 在区间$[x_{k-1},x_k]$ 上的振幅，即

$$\omega_k = \sup_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x) - \inf_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x),$$

则 f 关于 g 在$[a,b]$上(R-S)可积的充要条件是 $\forall \eta>0$,

$$\lim_{\lambda\to 0} \sum_{\omega_k>\eta} |g(x_k)-g(x_{k-1})| = 0.$$

下面是极限性质：

8) 设$\{f_n\}$是$[a,b]$上一列关于 g(R-S)可积的函数，并且在$[a,b]$上一致收敛于 f，又设 g 是$[a,b]$上的有界变差函数，则

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n dg = \int_a^b f dg.$$

9) 设 f 是$[a,b]$上的连续函数，$\{g_n\}$是$[a,b]$上处处收敛于g的有界变差函数列，并且存在正数M，使得 $\bigvee_a^b (g_n) \leqslant M < +\infty$ ($n=1,2,\cdots$)，则 g 必是$[a,b]$上的有界变差函数，而且

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f dg_n = \int_a^b f dg.$$

参 考 文 献

[1] 陈建功，实函数论，科学出版社，1978.

[2] 江泽坚、吴智泉，实变函数论，人民教育出版社，1961.

[3] 夏道行等，实变数函数论与泛函分析概要，上海科学技术出版社，1963.

[4] 夏道行等，实变函数论与泛函分析(上册)，高等教育出版社，第二版，1983.

[5] 郑维行、王声望，实变函数与泛函分析概要(第一册)，人民教育出版社，1980.

[6] 周民强，实变函数，北京大学出版社，1985.

[7] И. П. Натансон, Теория Функций Вещественной Переменной, Изд. 2-ое, Гос. Москва, 1957. (中译本，实变函数论，高等教育出版社，1958.)

[8] P. R. Halmos, Measure Theory, D. Van Nostrand, New York, 1950. (中译本，测度论，科学出版社，1958.)

[9] A. Mukherjea and K. Pothoven, Real and Functional Analysis, 1984.

[10] H. L. Royden, Real Analysis (2nd ed.), Macmillan, New York, 1968.

[11] A. C. Zaanen, An Introduction to the Theory of Integration, North-Holland, Amsterdam, 1958.

符号索引

符号	含意	章节段
$\forall$	对任意的，对每一个	1.1.1
$\exists$	存在	1.1.1
$\Rightarrow$	蕴含(如 $A\Rightarrow B$ 表示若 A 成立，则 B 一定成立)	1.1.1
$\Leftrightarrow$	充分必要或等价	1.1.1
"$\Rightarrow$"	必要性	1.1.1
"$\Leftarrow$"	充分性	1.1.1
$a\in A(A\ni a)$	a 属于 A	1.1.1
$a\notin A(A\not\ni a)$	a 不属于 A	1.1.1
$A\subset B$	A 包含于 B	1.1.1
$B\supset A$	B 包含 A	1.1.1
$\bigcup$	并	1.1.2
$\bigcap$	交	1.1.2
$A-B(A\backslash B)$	A 减 B 的差	1.1.2
$B^c(\mathscr{C}B)$	B 的余集	1.1.2
$A\Delta B$	A 与 B 的对称差	1.1.2
$\overline{\lim\limits_{n}}A_n$	集列 $\{A_n\}$ 的上限集	1.1.3
$\underline{\lim\limits_{n}}A_n$	集列 $\{A_n\}$ 的下限集	1.1.3
$\lim\limits_{n\to\infty}A_n$	集列 $\{A_n\}$ 的极限集	1.1.3
χ_A	集 A 的特征函数	1.1.4
$\mathscr{D}(f)$	f 的定义域	1.2.1
$\mathscr{R}(f)$	f 的值域	1.2.1
$g\|_A$	g 在 A 上的限制	1.2.1
gf	f 与 g 的复合映射	1.2.1
i_A	A 上的恒同映射	1.2.1
f^{-1}	f 的逆映射	1.2.2

$A\sim B$	A 与 B 对等	1.2.2
$\overline{\overline{A}}$	A 的势	1.2.2
$\mathbf{N}$	自然数集	1.3①
$\mathbf{Z}$	整数集	1.3
$\mathbf{Q}$	有理数集	1.3
$\mathbf{R}$	实数集	1.3
$\aleph_0$	可数集的势	1.3
2^A	A 的子集全体	1.4
$\aleph$	连续集的势	1.4
$\sup X_0$	X_0 的上确界	1.5
$\inf X_0$	X_0 的下确界	1.5
$\mathbf{R}^n$	n 维欧几里得空间	2.1
$\rho(x,y)$	x,y 之间的距离	2.1
$O(x_0,\delta)$	x_0 的 δ-邻域	2.1
$x_k\to x$	$\{x_k\}$ 收敛于 x	2.1
$d(M)$	集 M 的直径	2.1
E^0	E 的内域	2.1
$(a_1,b_1;\cdots;a_n,b_n)$	$\mathbf{R}^n$ 中的开区间	2.1
$[a_1,b_1;\cdots;a_n,b_n]$	$\mathbf{R}^n$ 中的闭区间	2.1
$(a_1,b_1;\cdots;a_n,b_n]$	$\mathbf{R}^n$ 中的左开右闭区间	2.1
$\langle a_1,b_1;\cdots;a_n,b_n\rangle$	$\mathbf{R}^n$ 中的区间	2.1
$\|I\|$	区间 I 的体积	2.1
E^b	E 的边界	2.1
E'	E 的导集	2.1
$\overline{E}$	E 的闭包	2.1
$\rho(A,B)$	集 A 与集 B 之间的距离	2.3
$\rho(x,B)$	点 x 到集 B 的距离	2.3
m_J^*E	E 的 Jordan 外测度	3.0
$m_*^J E$	E 的 Jordan 内测度	3.0
$m_J E$	E 的 Jordan 测度	3.0

① 1.3 表示第一章第 3 节，即 § 1.3，下同。

$\mathscr{D}_n$	$\mathbf{R}^n$ 中的左开右闭区间全体	3.1.1
$\mathscr{I}_n$	$\mathbf{R}^n$ 中的区间全体	3.1.1
$\hat{\mathbf{R}}$	广义实数集	3.1.1
m^*E	E 的 Lebesgue 外测度	3.1.1
mE	E 的 Lebesgue 测度	3.1.2
$\mathscr{L}_n$	$\mathbf{R}^n$ 中的 Lebesgue 可测集全体	3.1.2
$\mathscr{B}_n$	$\mathbf{R}^n$ 中的 Borel 集全体	3.2.1
$\mathscr{J}_n$	$\mathbf{R}^n$ 中的 Jordan 可测集全体	3.2.1
$\mathscr{R}(\mathscr{E})$	集类 $\mathscr{E}$ 所张成的环	3.3.1
$\mathscr{S}(\mathscr{E})$	集类 $\mathscr{E}$ 所张成的 σ-环	3.3.1
$(X,\mathscr{S})$	可测空间	3.3.1
$(X,\mathscr{S},\mu)$	测度空间	3.3.1
μ^*	由测度 μ 所引出的外测度	3.3.2
$\mathscr{R}^*$	μ^*-可测集全体	3.3.3
$(\mathbf{R}^n,\mathscr{L}_n,m)$	n 维 Lebesgue 测度空间	3.3.3
$X\times Y$	集 X 和集 Y 的乘积	3.4
a.e.	几乎处处	3.4
E_x	E 的 x 截口	3.4
$E[f>a]$	E 中使 $f(x)>a$ 的 x 全体	4.1
max	最大的	4.1
min	最小的	4.1
$G(E;f)$	f 在 E 上的下方图形	4.1
f^+	f 的正部	4.1
f^-	f 的负部	4.1
$f\sim g$ 于 E	f 与 g 在 E 上对等	4.1
$f_n \xrightarrow{\text{a.e.}} f$ 于 E	$\{f_n\}$ 在 E 上几乎处处收敛于 f	4.1
$f_n \xrightarrow{\text{a.u.}} f$ 于 E	$\{f_n\}$ 在 E 上几乎一致收敛于 f	4.2
$f_n\Rightarrow f$ 于 E	$\{f_n\}$ 在 E 上依测度收敛于 f	4.2
$\int_E \varphi dx$	φ 在 E 上的 Lebesgue 积分	5.1.1
$\varphi\in L(E)$	φ 在 E 上 Lebesgue 可积	5.1.1

$x_n \uparrow x$	$\{x_n\}$单调不减且收敛于x	5.2
$x_n \downarrow x$	$\{x_n\}$单调不增且收敛于x	5.2
$\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}[f,P]$	f对分点组P的变差	5.5.1
$\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f)$	f的全变差	5.5.1
$\int_E \varphi d\mu$	φ在E上关于测度μ的积分	5.6
$\int_E f dg$	f在E上关于g的L-S积分	5.7

索 引

Bernstein 定理 1.2.2

Borzano-Weierstrass 定理 2.1

Borel 有限覆盖定理 2.1

Borel 集 3.2.1

Cantor 完全集 2.1

Cantor 开集 2.1

Cantor 函数 5.5.2

Carathéodory 条件 3.1.2

De Morgan 法则 1.1.2

Dirichlet 函数 4.1

Fatou 引理 5.3.1

Fubini 积分定理 5.4

Fubini 逐项微分定理 5.5.2

F_σ 型集 3.2.1

G_δ 型集 3.2.1

Hamkel 容积 3.0

Jordan 外测度 3.0

Jordan 内测度 3.0

Jordan 可测集 3.0

Jordan 测度 3.0

Jordan 分解定理 5.5.1

Lebesgue 内测度 3.0

Lebesgue 外测度 3.1.1

Lebesgue 可测集 3.1.2

Lebesgue 测度 3.1.2

　～的有限可加性 3.1.2

　～的可数可加性 3.1.2

　～的上连续性 3.1.2

　～的下连续性 3.1.2

　～的平移不变性 3.2.2

　～的反射不变性 3.2.2

Lebesgue可测函数 4.1

Lebesgue 积分 5.1.1, 5.1.2, 5.1.3

　～的单调性 5.1.4

　～的绝对可积性 5.1.4

　～的有限可加性 5.1.4

　～的可数可加性 5.1.4

　～的线性 5.1.4

　～的绝对连续性 5.1.4

Lebesgue 可积 5.1.1, 5.1.2, 5.1.3

Lebesgue 逐项积分定理 5.3.1

Lebesgue 控制收敛定理 5.3.2

Lebesgue 有界收敛定理 5.3.2

Lebesgue 关于单调函数的可微性定理 5.5.2

Lebesgue 不定积分 5.5.3

Lebesgue-Stieltjes 测度 3.3.3

Lebesgue-Stieltjes 积分 5.7

Levi 定理 5.3.1

Lipschitz 条件 5.5.1

m-零集 3.2.1

Newton-Leibniz 公式 5.5.4

n 维欧几里得空间 2.1

p 进位表数法 2.0

Riesz 定理 4.2

Riemann 积分 5.2

Riemann-Stieltjes 积分 5.8

Vitali 逐项积分定理 5.3.2

Vitali 覆盖 5.5.2

Vitali 引理 5.5.2

Zermelo 选择公理 1.5

Zorn 引理 1.5

Егоров 定理 4.2

Лузин 定理 4.3

μ-零集 3.3.3

μ^*-可测集 3.3.3

σ-环 3.3.1

σ-代数 3.3.1

σ-有限测度 3.3.1

一 画

一一映射 1.2.1

一一对应 1.2.2

二 画

几乎处处 3.4

～收敛 4.1

几乎一致收敛 4.2

三 画

上限集 1.1.3

上界 1.5

上确界 1.5

下限集 1.1.3

下界 1.5

下确界 1.5

下方图形 4.1

子集 1.1.1

子覆盖 2.1

广义实数集 3.1.1

广义实值集函数 3.1.1

广义实值函数 4.1

广义可微 5.5.2

四 画

元素 1.1.1

无限集 1.1.1

无最大势定理 1.4

开集 2.1

～的构造定理 2.1

开区间 2.1

不可数集 1.4

不可测集 3.2.3

区间 2.1

～的体积 2.1

内点 2.1

内域 2.1

分部积分公式 5.5.5

双射 1.2.1

五 画

对等 1.2.2

对称差 1.1.2

半序集 1.5

正部 4.1

左开右闭区间 2.1

～分解 2.1

可加性 3.1

可数集 1.3

可测函数 4.4

可测空间 3.3.1

代数数 1.3

代数 3.3.1
外测度 3.3.2
包含 1.1.1
边界点 2.1
边界 2.1

六 画

交集 1.1.2
并集 1.1.2
闭集 2.1
闭区间 2.1
闭包 2.1
有限集 1.1.1
有限测度 3.3.1
　全～ 3.3.1
　σ-～ 3.3.1
　全σ-～ 3.3.1
有界集 2.1
有界变差函数 5.5.1
全变差 5.5.1
全序集 1.5
全集 1.1.2
负部 4.1
自密集 2.1
导集 2.1
列导数 5.5.2
收敛点列 2.1
收敛集列 1.1.3
阶梯函数 4.1

七 画

完全测度 3.3.3
　～空间 3.3.3
极大元 1.5
极小元 1.5
极限 2.1
　～点 2.1
　～集 1.1.3
初等分解 3.3.1
余区间 2.2
余集 1.1.2
邻域 2.1

八 画

实值函数(有限函数) 4.1
空集 1.1.1
单调类 3.3.1
单调集列 1.1.3
单调函数 5.5.1
势 1.2.2
直径 2.1
　～小于σ的有限分解 2.1
直线上开集的构造定理 2.2
环 3.3.1
孤立点 2.1
孤立点集 2.1
函数可测的充要条件 4.1
依测度收敛 4.2
单射 1.2.1

九 画

指标集 1.1.2
测度 3.3.1
　～空间 3.3.1



映射 1.2.1
～的定义域 1.2.1
～的值域 1.2.1
～的延拓与限制 1.2.1
逆映射 1.2.1
恒同映射 1.2.1
复合映射 1.2.1
绝对连续函数 5.5.3
～～张成的环 3.3.1
～～张成的 σ-环 3.3.1
～的特征函数 1.1.4
等价关系 3.2.3
等价类 3.2.3
疏朗集 2.1
超越数 1.4
隔离性定理 2.3

十画

原象 1.2.1
积分 5.6
乘积空间 3.4
～的测度定理 3.4

十一画

象 1.2.1

十二画

换元积分公式 [illegible]
集 [illegible]
～上的连[illegible]
～类 [illegible]

十三画

稠密集 2.1
满射 1.2.1
简单函数 4.1
～的初等分解 4.1
～的标准初等分解 4.1
微分与积分交换顺序定理 5.3.2

十四画

截口 3.4

十八画

[illegible] 2.1



映射	1.2.1	～～张成的环	3.3.1
～的定义域	1.2.1	～～张成的 σ-环	3.3.1
～的值域	1.2.1	～的特征函数	1.1.4
～的延拓与限制	1.2.1	等价关系	3.2.3
逆映射	1.2.1	等价类	3.2.3
恒同映射	1.2.1	疏朗集	2.1
复合映射	1.2.1	超越数	1.4
绝对连续函数	5.5.3	隔离性定理	2.3

十　画

原象	1.2.1
积分	5.6
乘积空间	3.4
～的测度定理	3.4

十　一　画

象	1.2.1

十　二　画

换元积分公式	[illegible]
集	
～上的连[illegible]	[illegible]
～类	

十　三　画

稠密集	2.1
满射	1.2.1
简单函数	4.1
～的初等分解	4.1
～的标准初等分解	4.1
微分与积分交换顺序定理	5.3.2

十　四　画

截口	3.4

十　八　画

[illegible]	2.1

实变函数与泛函分析

薛昌兴 编

下册

高等教育出版社

实变函数与泛函分析

下　册

薛昌兴　编



高等教育出版社

（京）112号

本书是作者参照高等师范院校和中学教师进修高等师范本科数学专业《实变函数与泛函分析教学大纲》编写的．分上、下两册出版，上册为实变函数，下册为泛函分析．本书为下册，共四章，内容为度量空间、线性算子与线性泛函、内积空间和Hilbert空间、线性算子的谱．系统地介绍了度量空间、赋范线性空间、Banach空间和Hilbert空间中的基本概念、基本定理与基本方法，并扼要介绍了全连续算子和自共轭算子的谱理论．书中列举了较多的例、反例和注，每节后均配有一定数量的习题，有助于读者加深对概念的理解．

本书结构紧凑，叙述详尽，论证严谨，语言通俗，重点突出，由浅入深，思路清晰，便于自学．

本书可作为高等师范院校和教育学院数学系的教材，也可作理、工科数学类各专业的教材或教学参考书，还可作函授和自学者用书．

责任编辑　丁鹤龄



实变函数与泛函分析

下册

薛昌兴　编

*

高等教育出版社出版

新华书店总店科技发行所发行

三河科教印刷厂印装

*

开本850×1168　1/32　印张8.875　字数210 000

1993年6月第1版　1993年6月第1次印刷

印数0 001—5 961

ISBN7-04-004151-0/O·1194

定价3.45元

目 录

第六章 度量空间……1

§6.1 度量空间的定义及例……1

6.1.1 度量空间的定义(1) 6.1.2 度量空间中的极限(3)
6.1.3 度量空间的例(4) 习题6.1.(11)

§6.2 赋范线性空间的定义及例……12

6.2.1 线性空间(12) 6.2.2 赋范线性空间(16) 6.2.3 线性空间上的等价范数(26) 习题 6.2 (27)

§6.3 度量空间中的点集及连续映射……29

6.3.1 度量空间中的点集(29) 6.3.2 连续映射(34)
习题 6.3 (37)

§6.4 稠密性与可分性……38

6.4.1 稠密集与疏朗集(38) 6.4.2 可分集(41)
习题 6.4 (44)

§6.5 完备性……45

6.5.1 完备度量空间的概念及例(45) 6.5.2 完备度量空间的两个性质(50) 6.5.3 度量空间的完备化(52) 习题 6.5(58)

§6.6 压缩映射原理……58

6.6.1 压缩映射原理(58) 6.6.2 压缩映射原理的应用(61)
习题 6.6(63)

§6.7 列紧性……64

6.7.1 列紧集和完全有界集(64) 6.7.2 $C[a, b]$ 及 $L^p[a,b]$ $(1<p<+\infty)$中列紧集的特征 (69) 6.7.3 紧集及紧集上的连续映射(75) 习题 6.7(78)

§6.8 有限维赋范线性空间……79

6.8.1 有限维线性空间(79) 6.8.2 有限维赋范线性空间(79)
习题6.8(85)

第七章　线性算子与线性泛函……………………………………86

§7.1　线性算子(泛函)的概念及有界性……………………86

7.1.1　线性算子与线性泛函的定义 (86)　7.1.2　线性算子的有界性与连续性(89)　7.1.3　线性算子空间 (97)　7.1.4　有界线性算子空间(98)　习题 7.1(100)

§7.2　Hahn-Banach 泛函延拓定理……………………………102

7.2.1　线性泛函的延拓定理(102)　*7.2.2　几何形式——凸集分离定理(111)　习题 7.2(118)

§7.3　几个常用空间上连续线性泛函的表示………………119

7.3.1　$C[a,b]$ 上连续线性泛函的表示(120)　7.3.2　$L^p[a,b]$ $(1\leqslant p<+\infty)$ 上连续线性泛函的表示(124)　7.3.3　$l^p(1\leqslant p<+\infty)$ 上连续线性泛函的表示(131)　习题 7.3(134)

§7.4　逆算子定理、闭图象定理和共鸣定理………………134

7.4.1　逆算子和正则算子 (135)　7.4.2　开映射定理和逆算子定理(137)　7.4.3　闭图象定理 (141)　7.4.4　共鸣定理(143)　习题 7.4.(148)

§7.5　自反空间与共轭算子……………………………………150

7.5.1　二次共轭空间与自反空间(150)　7.5.2　共轭算子(153)　习题 7.5(158)

§7.6　弱收敛和弱列紧性………………………………………160

7.6.1　算子列的一致、强、弱收敛(160)　7.6.2　泛函列的*弱收敛与向量列的弱收敛(162)　7.6.3　弱列紧性与*弱列紧性(166)　习题 7.6(169)

第八章　内积空间和Hilbert 空间……………………………171

§8.1　内积空间的基本概念和性质…………………………171

8.1.1　内积空间的定义及特征(171)　8.1.2　正交与正交分解(179)　8.1.3　标准正交系(182)　8.1.4　线性无关向量系的正交化(193)　8.1.5 可分 Hilbert 空间的模型(196)　习题 8.1(197)

§8.2　Riesz 表示定理…………………………………………199

8.2.1 Hilbert空间上连续线性泛函的表示(199) 8.2.2 Hilbert空间的"自共轭性"(200) *8.2.3 Hilbert空间上连续共轭双线性泛函的表示(201) 习题8.2(206)

§8.3 Hilbert空间上的几种有界线性算子……207

8.3.1 Hilbert共轭算子(207) 8.3.2 自共轭算子(212) 8.3.3 投影算子(215) *8.3.4 正算子(218) *8.3.5 正常算子(223) *8.3.6 酉算子(224) 习题8.3(225)

*第九章 线性算子的谱……228

§9.1 有界线性算子的谱……228

9.1.1 谱的概念(228) 9.1.2 有界线性算子的谱性质(231) 习题9.1(236)

§9.2 全连续算子的谱……236

9.2.1 全连续算子的定义和基本性质(236) 9.2.2 全连续算子的谱(241) 习题9.2(247)

§9.3 自共轭算子的谱……248

9.3.1 自共轭算子的谱性质(248) 9.3.2 例(253) 习题9.3(254)

§9.4 自共轭全连续算子的谱分解……254

9.4.1 自共轭全连续算子的谱分解(254) 9.4.2 应用(260) 习题9.4(263)

参考文献……265

符号索引……266

索引……269

第六章 度量空间

从本章开始，我们将介绍泛函分析的基本知识. 泛函分析是数学中的一个较新的重要分支,大约在本世纪30年代才正式成为一门独立的学科. 泛函分析起源于经典数学物理中的变分问题,它概括了经典分析、函数论等学科中某些重要概念、问题和成果,并受到现代物理和现代工程技术的有力刺激,它综合地运用分析、代数和几何的观点与方法,研究分析数学、现代物理和现代工程技术等方面所提出的有关问题，从而使得一些分别属于各种学科领域中的问题得到统一的处理. 它是本世纪出现的第一个高度综合性的数学学科. 近年来泛函分析不仅在理论上有很大发展，而且在应用上日益广泛，现在泛函分析的概念和方法已经渗透到现代数学、现代物理及现代工程技术理论的许多分支，并取得丰硕的成果.

本书介绍泛函分析的一些基础概念和理论，主要内容有度量空间、线性算子与线性泛函、内积空间和Hilbert空间、线性算子的谱等.

本章所介绍的度量空间，可以看作是有限维欧几里得空间的推广. 在这一章里，我们主要讨论度量空间和赋范线性空间的概念、度量空间的稠密性、可分性、完备性、列紧性以及压缩映射原理等内容.

§6.1 度量空间的定义及例

6.1.1 度量空间的定义

现在，我们将n维欧几里得空间的“距离”概念拓广到一般的

集合上，并给出度量空间的概念.

定义 6.1.1 设X是一个非空集，如果对于X中任意两个元素x、y，按照某一法则都有唯一确定的实数$\rho(x,y)$与之对应，且满足下列条件：

(1) 非负性：$\rho(x,y)\geqslant 0$，且$\rho(x,y)=0\Leftrightarrow x=y$；

(2) 对称性：$\rho(x,y)=\rho(y,x)$；

(3) 三角不等式：$\rho(x,y)\leqslant\rho(x,z)+\rho(z,y)\ (\forall x, y, z\in X)$，

则称$\rho(x,y)$是x与y之间的距离，称$X\times X$上满足上述条件的函数$\rho=\rho(\cdot,\cdot)$为X上的一个距离，并称X按照距离ρ成为度量空间或距离空间，记作(X,ρ)，或者简单地记作X. X中的元素称为点.

X中的非空子集A按照X中的距离ρ显然也是一个度量空间，称为X的子空间.

注 由三角不等式，用数学归纳法可证得推广的三角不等式：

$\rho(x_1,x_n)\leqslant\rho(x_1,x_2)+\rho(x_2,x_3)+\cdots+\rho(x_{n-1},x_n)\ (\forall x_1, x_2,\cdots, x_n\in X)$.

在一个度量空间(X,ρ)中，如果存在正数α，使得$\forall x, y\in X$，$x\neq y$时，都有$\rho(x,y)\geqslant\alpha$，则称(X,ρ)是一致离散的度量空间.

例如，对于任何非空集X，可以如下引进距离：

$$\rho(x,y)=\begin{cases}1, & \text{当 } x\neq y \text{ 时},\\ 0, & \text{当 } x=y \text{ 时}.\end{cases}\tag{6.1.1}$$

显然这样定义的ρ满足距离的全部条件，因此(X,ρ)是一致离散的度量空间.

此例说明，任一非空集都可在其中适当地引进距离使之成为一致离散的度量空间.

如果在非空集X中同时定义了两个距离ρ和ρ_1，且$\rho(x,y)\neq\rho_1(x,y)$，则(X,ρ)同(X,ρ_1)应看成不同的度量空间. 一般地说，

如果X中不只一点，那末在X中可以引进许多距离使之成为不同的度量空间.

6.1.2 度量空间中的极限

引进了距离的概念以后，就可以建立点列收敛的概念.

定义 6.1.2 设(X,ρ)是一度量空间，$x_n(n=1,2,\cdots)$、$x\in X$. 如果当$n\to\infty$时，数列$\rho(x_n,x)\to 0$，则称点列$\{x_n\}$按照距离ρ收敛于x，记作$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$或$x_n\to x$. 这时称$\{x_n\}$为收敛点列，$x$称为$\{x_n\}$的极限.

定理 6.1.1 度量空间(X,ρ)中的点列$\{x_n\}$最多只有一个极限，即收敛点列的极限是唯一的. 又若$\{x_n\}$收敛于x，则$\{x_n\}$的任一子列$\{x_{n_k}\}$也收敛于x.

证明 先证定理的第一部分. 设x、y都是$\{x_n\}$的极限，由距离的定义知

$$0\leqslant\rho(x,y)\leqslant\rho(x_n,x)+\rho(x_n,y),\ \forall n\in\mathbf{N}^{①}.$$

当$n\to\infty$时，$\rho(x_n,x)\to 0$，$\rho(x_n,y)\to 0$，必然$\rho(x,y)=0$，因此$x=y$. 这说明$\{x_n\}$最多只有一个极限，即收敛点列的极限是唯一的.

其次证明定理的第二部分. 设$\{x_n\}$收敛于x，于是$\forall\varepsilon>0$，$\exists$自然数N，当$n\geqslant N$时，$\rho(x_n,x)<\varepsilon$. 由于$n_k\geqslant k$，从而当$k\geqslant N$时，也有$\rho(x_{n_k},x)<\varepsilon$. 故$\{x_{n_k}\}$收敛于$x$. 证毕.

定理 6.1.2 设(X,ρ)是一个度量空间，$\{x_n\}$、$\{y_n\}$是X中的点列. 如果$x_n\to x$，$y_n\to y$，则$\rho(x_n,y_n)\to\rho(x,y)$(也就是说，距离$\rho(x,y)$是两个变元$x$、$y$的"连续函数").

证明 由距离的定义可得

$$\rho(x_n,y_n)\leqslant\rho(x_n,x)+\rho(x,y)+\rho(y_n,y),\ \forall n\in\mathbf{N};$$

---

① 本书中用$\mathbf{N}$表示自然数集，今后常用这个记号.

$$\rho(x,y)\leqslant\rho(x_n,x)+\rho(x_n,y_n)+\rho(y_n,y),\ \forall n\in\mathbb{N}.$$

由以上两个不等式得到

$$|\rho(x_n,y_n)-\rho(x,y)|\leqslant\rho(x_n,x)+\rho(y_n,y),\ \forall n\in\mathbb{N}.$$

令 $n\to\infty$,就得到所要证明的结论. 证毕.

注 设(X,ρ)是度量空间，由定理 6.1.2 的证明可得到下面的不等式:

$$|\rho(x_1,x_2)-\rho(x_3,x_4)|\leqslant\rho(x_1,x_3)+\rho(x_2,x_4)\ (\forall x_1,x_2,x_3,x_4\in X).$$

6.1.3 度量空间的例

例 1(见第二章) **n 维欧几里得空间 $\mathbb{R}^n$** $\mathbb{R}^n$ 表示有序 n 元数组$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的全体,此处 $x_i(i=1,2,\cdots,n)$都是实数. 在第二章我们已经指出 $\mathbb{R}^n$ 中任意两点 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$、$y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$之间的距离可以定义为

$$\rho(x,y)=\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|^2\right)^{\frac{1}{2}},\qquad(6.1.2)$$

则 ρ 满足定义 6.1.1 的全部条件. 在第二章中，我们没有逐一验证这些条件,现在进行验证. 显然 ρ 满足距离的条件(1)和(2),只须再证 ρ 满足三角不等式. 为此先证明 Cauchy 不等式:

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right),\qquad(6.1.3)$$

其中 a_i、$b_i(i=1,2,\cdots,n)$为实数. 任取实数 λ,则

$$0\leqslant\sum_{i=1}^{n}(a_i+\lambda b_i)^2=\sum_{i=1}^{n}a_i^2+2\lambda\sum_{i=1}^{n}a_ib_i+\lambda^2\sum_{i=1}^{n}b_i^2,$$

右端是 λ 的二次三项式,它对 λ 的一切实数值都是非负的,故其判别式不会大于零,即

$$\left(2\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2-4\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right)\leqslant 0,$$

从而

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right).$$

所以 Cauchy 不等式成立. 由 Cauchy 不等式可得

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2&=\sum_{i=1}^{n}a_i^2+2\sum_{i=1}^{n}a_ib_i+\sum_{i=1}^{n}b_i^2\\&\leqslant\sum_{i=1}^{n}a_i^2+2\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\cdot\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right)^{\frac{1}{2}}+\sum_{i=1}^{n}b_i^2\\&=\left[\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2.\end{aligned}\qquad(6.1.3')$$

在 $\mathbf{R}^n$ 中任取

$$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n),y=(y_1,y_2,\cdots,y_n),z=(z_1,z_2,\cdots,z_n),$$

并在(6.1.3′)式中令

$$a_i=z_i-x_i,b_i=y_i-z_i\quad(i=1,2,\cdots,n),$$

就立即得到三角不等式:

$$\rho(x,y)\leqslant\rho(x,z)+\rho(z,y).$$

因此 $\mathbf{R}^n$ 按距离(6.1.2)是一个度量空间.

如果 $\boldsymbol{R}^n$[①] 中每个点的坐标是复数, 距离仍由(6.1.2)式定义, 由不等式

$$\sum_{i=1}^{n}|a_i+b_i|^2\leqslant\sum_{i=1}^{n}(|a_i|+|b_i|)^2\leqslant\left[\left(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\sum_{i=1}^{n}|b_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2,\qquad(6.1.3'')$$

---

① 如果是全体实数组成的集时, 用 $\mathbf{R}$ 表示, 如果用 $\boldsymbol{R}$ 表示时, 其元素可以是全体实数, 也可以是全体复数.

这里 $a_i, b_i(i=1,2,\cdots,n)$是复数，用类似于上面的方法，就可以证明 $\boldsymbol{R}^n$ 仍是一个度量空间. 今后我们称 $\mathbf{R}^n$ 赋以距离(6.1.2)且 $\mathbf{R}^n$ 中点的坐标均为实数的情形为 n 维实欧几里得空间，称 $\boldsymbol{R}^n$ 赋以距离(6.1.2)且 $\boldsymbol{R}^n$ 中点的坐标可以是复数的情形为 n 维复欧几里得空间，并称(6.1.2)为欧几里得距离.

在第二章我们已经知道，在 n 维实欧几里得空间 $\mathbf{R}^n$ 中，点列按距离(6.1.2)收敛等价于按(每个)坐标收敛. 这个结论在 n 维复欧几里得空间 $\boldsymbol{R}^n$ 中仍然成立.

事实上，设$\{x_k\}=\{(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \cdots, x_n^{(k)})\}$是 n 维复欧几里得空间 $\boldsymbol{R}^n$ 中一个点列，$x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$是 n 维复欧几里得空间 $\boldsymbol{R}^n$ 中一点. 由不等式

$$\max_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i^{(k)}-x_i|\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i^{(k)}-x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant\sqrt{n}\max_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i^{(k)}-x_i| \quad (\forall k\in\mathbf{N})$$

就知道

$$\lim_{k\to\infty}x_k=x\Leftrightarrow\lim_{k\to\infty}x_i^{(k)}=x_i\ (i=1,2,\cdots,n).$$ 证毕.

例 2　空间 $C[a,b]$　区间$[a,b]$上的复(或实)值连续函数全体记为$C[a,b]$. 令

$$\rho(x,y)=\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)-y(t)| \quad (\forall x,y\in C[a,b]), \tag{6.1.4}$$

则 $C[a,b]$按(6.1.4)式规定的 ρ 成为一个度量空间.

事实上，距离的条件(1)与(2)是明显的，我们仅验证三角不等式. $\forall x,y,z\in C[a,b]$，则 $\forall t\in[a,b]$，有

$$\begin{aligned}|x(t)-y(t)|&\leqslant|x(t)-z(t)|+|z(t)-y(t)|\\&\leqslant\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)-z(t)|+\max_{a\leqslant t\leqslant b}|z(t)-y(t)|\\&=\rho(x,z)+\rho(z,y).\end{aligned}$$

故

$$\rho(x,y)=\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)-y(t)|\leqslant\rho(x,z)+\rho(z,y).$$

因此 $C[a,b]$按(6.1.4)规定的 ρ 成为一个度量空间. 以后当说到函数空间 $C[a,b]$时，我们始终用(6.1.4)规定的 ρ 作为其上的距离，除非另外说明.

$C[a,b]$中点列$\{x_n\}$按距离(6.1.4)收敛于 $x\in C[a,b]$的充要条件是：函数列$\{x_n(t)\}$在$[a,b]$上一致收敛于 $x(t)$.

事实上，设$\{x_n\}$按距离(6.1.4)收敛于 x，即

$$\rho(x_n,x)=\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x_n(t)-x(t)|\to 0(n\to\infty).$$

这意味着 $\forall\varepsilon>0$，$\exists$ 自然数 N，当 $n\geqslant N$ 时，

$$\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x_n(t)-x(t)|<\varepsilon.$$

因此对所有的 $t\in[a,b]$，只要 $n\geqslant N$ （N与 t 无关而仅与 ε 有关），就有

$$|x_n(t)-x(t)|<\varepsilon,$$

即$\{x_n(t)\}$在$[a,b]$上一致收敛于 $x(t)$.

反之，设函数列$\{x_n(t)\}$在$[a,b]$上一致收敛于 $x(t)$，于是 $\forall\varepsilon>0$，$\exists$ 自然数 N(N 与 t 无关而仅与 ε 有关)，使得当 $n\geqslant N$ 时，不等式

$$|x_n(t)-x(t)|<\varepsilon$$

对于所有的 $t\in[a,b]$一致地成立，于是

$$\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x_n(t)-x(t)|<\varepsilon\quad(n\geqslant N),$$

即当 $n\geqslant N$ 时，$\rho(x_n,x)<\varepsilon$，因此 $\rho(x_n,x)\to 0(n\to\infty)$. 这表明点列$\{x_n\}$在空间 $C[a,b]$中按距离(6.1.4)收敛于 x. 证毕.

例 3 **空间 s** 复数列(或实数列)$\{x_i\}(i=1,2,\cdots)$的全体记为 s，称 x_i 为点 $x=\{x_i\}$的第 i 个坐标. 令

$$\rho(x,y)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\frac{|x_i-y_i|}{1+|x_i-y_i|}\quad(\forall x=\{x_i\},y=\{y_i\}\in s).$$

(6.1.5)

(注　s 中的元 $x=\{x_i\}$ 也常表示成 $x=(x_1,x_2,\cdots,\ x_i,\ \cdots)$ 或 $x=(x_1,x_2,\cdots)$.)

现在验证(6.1.5)满足距离的全部条件. 事实上，(6.1.5)显然满足距离的条件(1)和(2)，只须再证三角不等式. 为此先证明对于任意的复数 a、b，有

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|}\leqslant\frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|}.\qquad(6.1.6)$$

因为函数 $\varphi(t)=\frac{t}{1+t}$ 在$[0,+\infty)$上是单调增加的，由不等式$|a+b|\leqslant|a|+|b|$可得

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|}\leqslant\frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|}=\frac{|a|}{1+|a|+|b|}+\frac{|b|}{1+|a|+|b|}$$
$$\leqslant\frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|}.$$

因此，(6.1.6)式成立. $\forall x=\{x_i\},y=\{y_i\},z=\{z_i\}\in s$，据不等式(6.1.6)，

$$\rho(x,y)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\frac{|x_i-z_i+z_i-y_i|}{1+|x_i-z_i+z_i-y_i|}$$
$$\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\left(\frac{|x_i-z_i|}{1+|x_i-z_i|}+\frac{|z_i-y_i|}{1+|z_i-y_i|}\right)$$
$$=\rho(x,z)+\rho(z,y).$$

因此，s 按照距离(6.1.5)成为一个度量空间. 今后当说到数列空间 s 时，若无特别声明，其上的距离总是指(6.1.5).

空间 s 中点列按距离收敛等价于按坐标收敛. 这就是说，设

$\{x_n\}=\{(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \cdots, x_i^{(n)}, \cdots)\}\subset s$[1]，$x=(x_1, x_2, \cdots, x_i, \cdots)\in s$，则

$$\rho(x_n, x)\to 0(n\to\infty)\Leftrightarrow\lim_{n\to\infty}x_i^{(n)}=x_i, \forall i\in\mathrm{N}.$$

事实上，如果

$$\rho(x_n, x)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\frac{|x_i^{(n)}-x_i|}{1+|x_i^{(n)}-x_i|}\ \to 0\quad (n\to\infty),$$

那末，$\forall i\in\mathrm{N}$，由于

$$\frac{|x_i^{(n)}-x_i|}{1+|x_i^{(n)}-x_i|}\leqslant 2^i\rho(x_n, x),$$

我们得到

$$\frac{|x_i^{(n)}-x_i|}{1+|x_i^{(n)}-x_i|}\to 0(n\to\infty).$$

于是 $\forall\varepsilon\in(0,1)$，$\exists$ 自然数 N，使得当 $n\geqslant N$ 时，成立

$$\frac{|x_i^{(n)}-x_i|}{1+|x_i^{(n)}-x_i|}<\frac{\varepsilon}{2}.$$

从而有

$$|x_i^{(n)}-x_i|<\frac{\frac{\varepsilon}{2}}{1-\frac{\varepsilon}{2}}<\frac{\frac{\varepsilon}{2}}{1-\frac{1}{2}}=\varepsilon,\ i=1,2,\cdots.$$

这说明$\lim\limits_{n\to\infty}x_i^{(n)}=x_i, \forall i\in\mathrm{N}$.

反之，设$\lim\limits_{n\to\infty}x_i^{(n)}=x_i, \forall i\in\mathrm{N}$. 因为 $\forall\varepsilon>0$，$\exists m\in\mathrm{N}$，使得

$$\sum_{i=m}^{\infty}\frac{1}{2^i}<\frac{\varepsilon}{2}.$$

又对每个 $i=1,2,\cdots,m-1$，$\exists$ 自然数 N_i，使得当 $n\geqslant N_i$ 时，

$$|x_i^{(n)}-x_i|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

---

[1] 点列$\{x_n\}\subset s$ 表示 $x_n\in s\,(n=1,2,\cdots)$，下同。

取 $N=\max\{N_1, N_2, \cdots, N_{m-1}\}$，当 $n\geqslant N$ 时，就有

$$\sum_{i=1}^{m-1}\frac{1}{2^i}\frac{|x_i^{(n)}-x_i|}{1+|x_i^{(n)}-x_i|}<\sum_{i=1}^{m-1}\frac{1}{2^i}\frac{\frac{\varepsilon}{2}}{1+\frac{\varepsilon}{2}}<\frac{\varepsilon}{2}.$$

所以当 $n\geqslant N$ 时，有

$$\rho(x_n, x)=\left(\sum_{i=1}^{m-1}+\sum_{i=m}^{\infty}\right)\frac{1}{2^i}\frac{|x_i^{(n)}-x_i|}{1+|x_i^{(n)}-x_i|}<\varepsilon.$$

这说明 $\rho(x_n, x)\to 0 \quad (n\to\infty)$，即 $x_n\to x$. 证毕.

为便于今后的叙述，作如下约定：(1) 本书中所涉及的测度、可测集、可测函数及其积分，如无特别声明，均指 Lebesgue 测度、Lebesgue 可测集、Lebesgue 可测函数及 Lebesgue 积分；

(2) 本书中用 $\mathscr{L}_\nu$ 表示 ν (ν 为自然数)维欧几里得空间 $\mathbf{R}^\nu$ 中 Lebesgue 可测集全体所成之集类.

注 6.1.3 $\mathbf{R}^\nu$(ν 为自然数) 中点集 E 上的复值函数 $f(x)$ 必可唯一地表示成 $f(x)=f_1(x)+if_2(x)$，其中 $f_1(x)$、$f_2(x)$ 是 E 上的实值函数. 当 f_1、f_2 均为可测函数时，称 f 是可测函数. 当 f_1、f_2 在 E 上几乎处处有限时，称 f 在 E 上"几乎处处有限". 当 f_1、f_2 均为可积函数时，称 f 是可积函数，并且规定

$$\int_E f(x)dx=\int_E f_1(x)dx+i\int_E f_2(x)dx.$$

又当 $|f_1(x)+if_2(x)|^p$ ($p\geqslant 1$)为可积函数时，称 f 是 p 幂可积函数等等.

例 4 空间 $S(E)$ 设 $E\in\mathscr{L}_\nu$，且 $0<mE<+\infty$. E 上几乎处处有限的复(或实)值可测函数全体记为 $S(E)$，并且把 $S(E)$ 中几乎处处相等的函数看成同一个元素. 令

$$\rho(f, g)=\int_E\frac{|f(t)-g(t)|}{1+|f(t)-g(t)|}dt \quad (\forall f, g\in S(E)). \quad (6.1.7)$$

仿例 3 可以证明(6.1.7)确实满足距离的全部条件. 因此 $S(E)$ 按照距离(6.1.7)成为一个度量空间. $S(E)$ 可简记作 S.

空间 $S(E)$ 中点列 $\{f_n\}$ 按距离(6.1.7)收敛于 $f\in S(E)$ 等价于函数列 $\{f_n(t)\}$ 依测度收敛于 $f(t)$. 也就是说

$$\lim_{n\to\infty}\int_E \frac{|f_n(t)-f(t)|}{1+|f_n(t)-f(t)|}dt=0 \Leftrightarrow f_n(t)-f(t)\Rightarrow 0 \text{ 于 } E.$$

由于 $mE<+\infty$, $\{f_n(t)-f(t)\}$ 是 E 上的可测函数列, 据 § 5.3 例 5, 上述等价关系确实成立.

习 题 6.1

1. 设 (X,ρ) 是一度量空间, 证明不等式

$$|\rho(x,z)-\rho(y,z)|\leqslant\rho(x,y)\ (\forall x,y,z\in X).$$

2. 写出由两个点组成的集 X 上的所有距离.

3. 对任何 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$, $y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in\boldsymbol{R}^n$, 令

$$\rho(x,y)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i|x_i-y_i|,$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 n 个正数, 则 ρ 是 $\boldsymbol{R}^n$ 上的距离, 并且 $\boldsymbol{R}^n$ 中的点列按此距离收敛等价于按坐标收敛.

4. $\rho(x,y)=(x-y)^2$ 是定义在实数集上的距离吗? 为什么?

5. 设 (X,ρ) 是度量空间, 则 X 按 $\rho_1(x,y)=[\rho(x,y)]^{\frac{1}{n}}$ (n 为自然数) 也是度量空间.

6. 设 $\rho(x,y)$ 是空间 X 上的距离, 则

$$\bar{\rho}(x,y)=\frac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)}\quad(\forall x,y\in X)$$

也是 X 上的距离.

7. 设 $C^\infty[a,b]$ 是区间 $[a,b]$ 上无限次可微函数的全体, 定义

$$\rho(f,g)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{2^r}\max_{a\leqslant t\leqslant b}\frac{|f^{(r)}(t)-g^{(r)}(t)|}{1+|f^{(r)}(t)-g^{(r)}(t)|}\qquad(\forall f,g\in C^\infty[a,b]),$$

则 $C^\infty[a,b]$ 按 $\rho(f,g)$ 成为度量空间, 并且 $C^\infty[a,b]$ 中点列 $\{f_n\}$ 按距离收敛

于 $f\in C^{\infty}[a,b]$ 的充要条件是对每个非负整数 r，$\{f_n^{(r)}(t)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $f^{(r)}(t)$（其中 $f_n^{(0)}(t)=f_n(t)$，$f^{(0)}(t)=f(t)$）.

8. 设 (X,ρ_1)、(Y,ρ_2) 是两个度量空间，$\forall(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in X\times Y$，令

$$\rho((x_1,y_1),(x_2,y_2))=[(\rho_1(x_1,x_2))^2+(\rho_2(y_1,y_2))^2]^{\frac{1}{2}},$$

$$\rho'((x_1,y_1),(x_2,y_2))=\rho_1(x_1,x_2)+\rho_2(y_1,y_2),$$

$$\rho''((x_1,y_1),(x_2,y_2))=\max\{\rho_1(x_1,x_2),\rho_2(y_1,y_2)\},$$

则 ρ、ρ'、ρ'' 都是 $X\times Y$ 上的距离.（注 $X\times Y$ 按 ρ、ρ'、ρ'' 所成的度量空间都称为 (X,ρ_1) 和 (Y,ρ_2) 的乘积度量空间.）

§6.2 赋范线性空间的定义及例

6.2.1 线性空间

我们通常所考察的空间，例如函数空间和序列空间，除了可引进极限概念外，它们同时又是一个代数系统，就是说空间中的元素之间存在着某种代数关系. 当只着眼于空间中的代数结构，即元素之间的加法运算以及数与空间中元素的乘法运算时，就必须引入线性空间的概念.

本书中用 $\mathbb{K}$ 表示复（或实）数域，用 $\mathbb{R}$ 表示实数域.

定义 6.2.1 设 X 是一非空集. 我们称 X 为一复（或实）的线性空间，是指它满足：

(i) X 是一个加法群，即 $\forall x,y\in X$，对应于 X 中一个叫做 x 与 y 的和的元素，记为 $x+y$，适合

(1) $x+y=y+x$;

(2) $(x+y)+z=x+(y+z)$ $(\forall x,y,z\in X)$;

(3) X 中存在唯一的元素 θ，使 $\forall x\in X$，均有 $x+\theta=x$，称 θ 为 X 的零元素；

(4) $\forall x\in X$，$\exists$ 唯一的 $x'\in X$，使得 $x+x'=\theta$，称 x' 是 x 的负元素，记此 x' 为 $-x$.

(ii) 定义了数域$\mathbb{K}$中的数α与$x\in X$的数乘运算，即$\forall(\alpha,x)\in\mathbb{K}\times X$，对应于$X$中一个叫做$\alpha$与$x$的积的元素，记为$\alpha x$，适合

(5) $1x=x$;

(6) $\alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x \quad (\forall\alpha,\beta\in\mathbb{K},\forall x\in X)$;

(7) $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x \quad (\forall\alpha,\beta\in\mathbb{K},\forall x\in X)$;

(8) $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y \quad (\forall\alpha\in\mathbb{K},\forall x,y\in X)$.

线性空间的元素又称为向量，因而线性空间又称为向量空间.线性空间中元素的相加以及$\mathbb{K}$中的数与线性空间中元素的相乘统称为线性运算.

注 1 从定义 6.2.1 可以推知，$\forall x\in X,\forall\alpha\in\mathbb{K}$，有$0x=\theta,\alpha\theta=\theta,(-1)x=-x$.

注 2 我们通常把$x+(-y)$写作$x-y$.

注 3 今后凡说“线性空间”而前面不标出“复”、“实”字样时，意指此线性空间既可以是复的也可以是实的.

下列概念是线性空间的基本概念. 在下列几个概念中，我们总是设X是$\mathbb{K}$上的线性空间.

1° 线性相关与线性无关 X中的一组向量$x_1, x_2,\cdots,x_n$称为是线性相关的，如果存在不全为 0 的数组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\in\mathbb{K}$，使得

$$\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\cdots+\alpha_nx_n=\theta;$$

否则称为是线性无关的.

设$A\subset X$，如果A中任何有限个向量均是线性无关的，就称A是线性无关的，否则称A是线性相关的.

2° 线性组合 设$x\in X$，如果存在$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\in\mathbb{K}$，使得

$$x=\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\cdots+\alpha_nx_n \quad (x_i\in X,\ i=1,2,\cdots,n),$$

则称x是$x_1, x_2,\cdots, x_n$的线性组合或称x可用$x_1,x_2,\cdots,x_n$线性表示.

3° 线性子空间与线性流形 设$E\subset X$. 如果E对X中的线

性运算是封闭的，就是说 $\forall x, y \in E$，有 $x+y \in E$，$\forall(\alpha, x) \in \mathbb{K} \times E$，有 $\alpha x \in E$，则称 E 是 X 的一个线性子空间，简称子空间．显然 X 的任何线性子空间本身也是一个线性空间．

X 以及 $\{\theta\}$ 都是 X 的线性子空间，称它们为平凡的子空间，而称 X 的其它子空间为真子空间．

如果 E 是 X 的一个线性子空间，$x_0 \in X$，集合 $A=\{x+x_0 \mid x \in E\}$ 就叫做一个线性流形，集合 A 也记作 $E+x_0$．

4° 子集张成的子空间或线性包　设 $A \subset X$，A 中有限个向量的线性组合全体

$$\{y=\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2+\cdots+\alpha_n x_n \mid n \in \mathbf{N}, \alpha_i \in \mathbb{K}, x_i \in A, i=1,2,\cdots,n\}$$

是 X 的一个线性子空间，并且是包含 A 的一切线性子空间的交，称为 A 张成的子空间或称为 A 的线性包，记为 $\operatorname{span} A$．

5° 线性基和维数　设 A 是 X 的一个线性无关子集，如果 $\operatorname{span} A=X$，就称 A 是 X 的一组线性基或 Hamel 基，称 A 的势为空间 X 的维数，记为 $\dim X$．如果 A 的势为有限数，则称 X 为有限维线性空间，否则称 X 是无限维线性空间．如果 X 只含零元素，称 X 为零维线性空间．

6° 线性和与直接和　设 $A, B \subset X$，称点集 $\{x+y \mid x \in A, y \in B\}$ 为 A 与 B 的线性和，记作 $A+B$．设 E_1、E_2 是 X 的两个线性子空间，如果 $E=E_1+E_2$，且 $\forall x \in E$，$\exists$ 唯一的 $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$，使得 $x=x_1+x_2$，则称 E 是 E_1 与 E_2 的直接和（简称直和），记作 $E=E_1 \dot{+} E_2$．对于任意有限个子空间的情形，定义依次类推．

7° 凸集与凸包　设 $A \subset X$，如果 $\forall x, y \in A$，$\forall \alpha \in [0,1]$，都有 $\alpha x+(1-\alpha) y \in A$，则称 A 是凸集．

设 $B \subset X$，如果 $\{A_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ 是 X 中包含 B 的一切凸集，则称 $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ 为 B 的凸包，记作 $\operatorname{co}(B)$．

8° 线性同构　设 X、X_1 都是数域 $\mathbb{K}$ 上的线性空间，如果存在一个从 X 到 X_1 上的一一映射 φ，适合

$$\varphi(x+y)=\varphi(x)+\varphi(y) \quad (\forall x,y\in X),$$

$$\varphi(\alpha x)=\alpha\varphi(x) \quad (\forall \alpha\in\mathbb{K},\forall x\in X).$$

则称 X 和 X_1 是线性同构的，并称 φ 是 X 到 X_1 上的（线性）同构映射.

显然，(线性)同构映射的逆映射仍为(线性)同构映射，因此线性无关向量组经(线性)同构映射后仍是线性无关向量组.

例 1　函数空间　设 Q 是一集合，F 是 Q 上某些复(或实)值函数所组成的函数族. 在 F 中我们按通常方法规定函数的加法及 $\mathbb{K}$ 中的数与函数的乘法如下：$\forall f,g\in F,\forall\alpha\in\mathbb{K}$，

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x),\ x\in Q,$$

$$(\alpha f)(x)=\alpha f(x),\ x\in Q.$$

如果当 $f,g\in F,\alpha,\beta\in\mathbb{K}$ 时，恒有 $\alpha f+\beta g\in F$，则 F 成为 $\mathbb{K}$ 上的一个线性空间. 此线性空间称为复(或实)的函数空间. 此后如果不另外说明，对函数空间总是采取上述的加法及数乘运算.

例 2　数列空间 s　设 s 是复(或实)数列全体. 定义 s 中两元素 $x=(x_1,x_2,\cdots)$ 与 $y=(y_1,y_2,\cdots)$ 的加法以及数 $\alpha\in\mathbb{K}$ 与元素 x 的乘法如下：

$$x+y=(x_1+y_1,\ x_2+y_2,\ \cdots),$$

$$\alpha x=(\alpha x_1,\ \alpha x_2,\ \cdots),$$

则 s 成为 $\mathbb{K}$ 上的一个线性空间. 此线性空间称为复(或实)的数列空间. 此后如不另外说明，对空间 s 及其线性子空间都是采取这种加法和数乘运算.

注　今后若说到某具体函数空间、数列空间而未说明是“实的”或“复的”时，意指实、复均可. 但为叙述上的方便，我们往往只就“实的”情况来证明有关结论.

6.2.2 赋范线性空间

定义 6.2.2 设 X 是 $\mathbb{K}$ 上的一个线性空间，如果 X 上的实值函数 $p(\cdot)$ 满足下列条件：

(1) $p(x)\geqslant 0 \quad (\forall x\in X)$,

(2) $p(\alpha x)=|\alpha|p(x) \quad (\forall \alpha\in\mathbb{K}, \forall x\in X)$,

(3) $p(x+y)\leqslant p(x)+p(y) \quad (\forall x,y\in X)$,

则称 $p(x)$ 是 x 的半范数或拟范数，并称 $p(\cdot)$ 为 X 上的半范数或拟范数.

如果半范数 $p(x)$ 又满足如下条件：

(4) $p(x)=0\Leftrightarrow x=\theta$,

则称 $p(x)$ 是 x 的范数，通常记 x 的范数为 $\|x\|$，且称 $\|\cdot\|$ 是 X 上的一个范数，并称 X 按照 $\|\cdot\|$ 成为一个复(或实)的赋范线性空间(简称复(或实)的赋范空间)，记为 $(X,\|\cdot\|)$ 或简记为 X.

注 与线性空间的情形类似，这里的"复(或实)"等词也往往略去.

对于赋范线性空间 X，定义

$$\rho(x,y)=\|x-y\| \quad (\forall x,y\in X). \tag{6.2.1}$$

容易验证 $\rho(x,y)$ 是 X 上的距离，此 $\rho(\cdot,\cdot)$ 称为由范数 $\|\cdot\|$ 所导出的距离.

今后凡说赋范线性空间上的距离均指其范数所导出的距离，并在此意义下说赋范线性空间是度量空间. 这样一来，就可以在赋范线性空间中引入收敛概念.

设 X 是赋范线性空间，X 中的点列 $\{x_n\}$ $(n=1,2,\cdots)$ 称为依范数收敛于 $x\in X$，或强收敛于 x，是指

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n-x\|=0,$$

1° 设$\{x_n\}\subset X$，如果$x_n\to x\in X$，则$\|x_n\|\to\|x\|$（即$\|x\|$是$x\in X$的"连续函数"）.

2° 若$\{x_n\}$是X中依范数收敛的点列，则$\{\|x_n\|\}$是有界数列.

3° 设$\{x_n\}$，$\{y_n\}\subset X$，$x, y\in X$，且$x_n\to x$，$y_n\to y$，则$x_n+y_n\to x+y$.

4° 设$\alpha_n(n=1,2,\cdots)$，$\alpha\in\mathbb{K}$，$x_n(n=1,2,\cdots)$，$x\in X$，且$\alpha_n\to\alpha$，$x_n\to x$，则$\alpha_n x_n\to\alpha x$.

我们这里只证1°，其余留给读者. 1°的证明：由范数的条件可以得到不等式

$$|\|x\|-\|y\||\leqslant\|x-y\| \quad (\forall x, y\in X),$$

由此可以看出，$x_n\to x\Rightarrow\|x_n\|\to\|x\|$. 证毕.

性质3°、4°表明线性运算关于X中的收敛概念是"连续的".

下面举几个赋范线性空间的例子. 在这几个例子中均假定所讨论的空间可以是实的，也可以是复的. 以后的例子中，如无特别声明，均作此假定.

例3 n维欧几里得空间$\boldsymbol{R}^n$ 在$\boldsymbol{R}^n$中定义元素$x=(x_1, x_2,\cdots,x_n)$与$y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$的加法以及数$\alpha\in\mathbb{K}$与x的乘法如下：

$$x+y=(x_1+y_1, x_2+y_2,\cdots,x_n+y_n),$$

$$\alpha x=(\alpha x_1,\alpha x_2,\cdots,\alpha x_n).$$

则$\boldsymbol{R}^n$成为一个线性空间. 再在$\boldsymbol{R}^n$中定义范数如下：

$$\|x\|=\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \quad (\forall x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\boldsymbol{R}^n), \tag{6.2.2}$$

则$\boldsymbol{R}^n$成为一个赋范线性空间. 由范数(6.2.2)导出的距离就是

§6.1 例1 中的距离，因此 R^n 中点列的依范数收敛等价于按坐标收敛. 我们称范数(6.2.2)为欧几里得范数.

例4 连续函数空间 $C[a,b]$ $C[a,b]$按通常的线性运算是一个线性空间. 令

$$\|f\|=\max_{t\in[a,b]}|f(t)| \quad (\forall f\in C[a,b]), \tag{6.2.3}$$

则 $C[a,b]$按范数(6.2.3)成为一个赋范线性空间.

例5 空间 $C^{(k)}[a,b]$ 设 $C^{(k)}[a,b]$表示$[a,b]$上具有直到 k 阶连续导数的函数全体，依照通常的线性运算，它是一个线性空间. $\forall f\in C^{(k)}[a,b]$，规定

$$\|f\|=\sum_{j=0}^{k}\max_{a\leqslant t\leqslant b}|f^{(j)}(t)| \quad (f^{(0)}(t)=f(t)), \tag{6.2.4}$$

则 $C^{(k)}[a,b]$按照范数(6.2.4)成为一个赋范线性空间. 可以证明，$C^{(k)}[a,b]$中点列$\{f_n\}$依范数收敛于 f，等价于 $f_n(t)$的直到 k 阶导数分别一致收敛于 $f(t)$的相应阶导数.

这个空间以及将要讨论的 $L^p(E)$空间在现代微分方程理论中有着广泛的应用.

例6 空间 l^∞ 设 l^∞ 是有界数列 $x=(x_1,x_2,\cdots)$全体按通常的线性运算所成的线性空间(它是 s 空间的线性子空间). 令

$$\|x\|=\sup_i|x_i| \quad (\forall x=(x_1,x_2,\cdots)\in l^\infty), \tag{6.2.5}$$

则 l^∞ 依范数(6.2.5)成为赋范线性空间.

例7 空间 $\mathrm{V}[a,b]$ 设 $\mathrm{V}[a,b]$是区间$[a,b]$上的有界变差函数全体，依照通常的线性运算，它是一个线性空间. 令

$$\|f\|=|f(a)|+\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f) \quad (\forall f\in \mathrm{V}[a,b]), \tag{6.2.6}$$

则 $\mathrm{V}[a,b]$按范数(6.2.6)成为赋范线性空间. 我们令

$$V_0[a,b]=\left\{f\left|\begin{array}{l}f\in V[a,b],f\text{ 在}(a,b)\text{中}\\ \text{每点是右连续的,且 }f(a)=0\end{array}\right.\right\},$$

$V_0[a,b]$是$V[a,b]$的线性子空间. 在$V_0[a,b]$上,范数$\|f\|$等于全变差$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)$.

例 8　空间 $L^p(E)(1\leqslant p<+\infty)$　设 $E\in\mathscr{L}_n$, $0<mE\leqslant+\infty$. 我们把 E 上一切 p 幂可积函数$f(x)$ $(|f|^p\in L(E))$ 所成之集记为 $L^p(E)$,称为E 上关于 Lebesgue 测度的 p 幂可积函数空间.

$L^p(E)$按照通常的线性运算成为一个线性空间. 事实上,$\forall f$, $g\in L^p(E)$, $\forall a,b\in\mathbf{K}$,由于

$$(|a|+|b|)^p\leqslant[2\max(|a|,|b|)]^p\leqslant 2^p(|a|^p+|b|^p),\tag{6.2.7}$$

从而

$$|af(x)+bg(x)|^p\leqslant(|af(x)|+|bg(x)|)^p\leqslant 2^p(|a|^p|f(x)|^p+|b|^p|g(x)|^p),$$

因为$|f|^p$, $|g|^p\in L(E)$,所以$|af(x)+bg(x)|^p\in L(E)$, 即 $af+bg\in L^p(E)$.

在 $L^p(E)$里,把几乎处处相等的函数看成同一个元素,经这样"同一化"之后,$L^p(E)$仍是线性空间. 令

$$\|f\|=\left(\int_E|f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\ (\forall f\in L^p(E)).\tag{6.2.8}$$

现在证明(6.2.8)是 $L^p(E)$上的范数. 显然,(6.2.8)满足范数的条件(1)、(2)和(4),只须再证(6.2.8)满足范数的条件(3). 为此先证明几个常用的重要不等式.

1°　**Hölder 不等式**　设 $p>1$, $q>1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, 如果 $f\in L^p(E)$, $g\in L^q(E)$,则 $fg\in L^1(E)$,并且

$$\int_E |f(x)g(x)|dx \leqslant \left(\int_E |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_E |g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{6.2.9}$$

首先证明：$\forall A, B \in [0, +\infty)$，成立

$$AB \leqslant \frac{A^p}{p} + \frac{B^q}{q} \quad \left(p>1,\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right). \tag{6.2.10}$$

当 A, B 中有一个为 0 时，不等式显然成立，所以不妨设 $A, B > 0$. 令

$$\varphi(t) = \frac{1}{p}t^p + \frac{1}{q} - t,\ t \in [0, +\infty),$$

则 $\varphi'(t) = t^{p-1} - 1$，所以当 $t \in [0, 1)$时，$\varphi'(t) < 0$，当 $t \in (1, +\infty)$时，$\varphi'(t) > 0$，当 $t = 1$ 时，$\varphi'(t) = 0$. 因而 $\varphi(1) = 0$ 是

$$\varphi(t) = \frac{1}{p}t^p + \frac{1}{q} - t$$

在$[0, +\infty)$上的最小值，即

$$\frac{1}{p}t^p + \frac{1}{q} - t \geqslant 0,\ t \in [0, +\infty).$$

从而

$$t \leqslant \frac{t^p}{p} + \frac{1}{q},\ t \in [0, +\infty).$$

令 $t = AB^{1-q}$，代入上式得

$$AB^{1-q} \leqslant \frac{1}{p}A^p B^{-q} + \frac{1}{q}.$$

对上式两边再乘以 B^q 就得到不等式(6.2.10).

现在证明(6.2.9)式. 当

$$\int_E |f(x)|^p dx,\quad \int_E |g(x)|^q dx$$

中有一个等于 0 时，不等式(6.2.9)显然成立，因此不妨设

$$\int_E |f(x)^p| dx > 0, \int_E |g(x)|^q dx > 0,$$

令 $\varphi(x)=\dfrac{f(x)}{\left(\int_E |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}}$, $\psi(x)=\dfrac{g(x)}{\left(\int_E |g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}}$,

由不等式(6.2.10)就得到

$$|\varphi(x)\psi(x)|\leqslant\frac{|\varphi(x)|^p}{p}+\frac{|\psi(x)|^q}{q}.$$

因此 $\varphi(x)\psi(x)\in L^1(E)$,从而 $f(x)g(x)\in L^1(E)$,并且从

$$\int_E |\varphi(x)\psi(x)|\,dx\leqslant\int_E\frac{|\varphi(x)|^p}{p}dx+\int_E\frac{|\psi(x)|^q}{q}dx=1,$$

就得到不等式(6.2.9).

2° **Minkowski 不等式** 设 $f,g\in L^p(E)$,则

$$\left(\int_E |f(x)+g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\left(\int_E |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int_E |g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{6.2.11}$$

不失一般性,设 $p>1$, $\int_E |f(x)+g(x)|^p dx>0$. 取 $q>1$, 使得 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. 由于 $|f(x)+g(x)|^p\in L^1(E)$, 从而 $|f(x)+g(x)|^{\frac{p}{q}}\in L^q(E)$, 由不等式(6.2.9)得到

$$\int_E |f(x)|\cdot|f(x)+g(x)|^{\frac{p}{q}}dx\leqslant\left(\int_E |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\cdot\left(\int_E |f(x)+g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{q}},$$

$$\int_E |g(x)|\cdot|f(x)+g(x)|^{p/q}dx\leqslant\left(\int_E |g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\cdot\left(\int_E |f(x)+g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{q}}.$$

从而

$$\int_E |f(x)+g(x)|^p dx=\int_E |f(x)+g(x)|^{1+\frac{p}{q}}dx$$

$$\leqslant \int_E (|f(x)|+|g(x)|)\cdot|f(x)+g(x)|^{p/q}dx$$

$$\leqslant \left[\left(\int_E |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_E |g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\right]\cdot\left(\int_E |f(x) + g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{q}}.$$

上式两边除以$\left(\int_E |f(x)+g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{q}}$便得到不等式(6.2.11).亦即

$$\|f+g\|\leqslant\|f\|+\|g\|.$$

因此(6.2.8)是 $L^p(E)$上的范数，$L^p(E)$按范数(6.2.8)成为一个赋范线性空间.

$L^p(E)$中点列$\{f_n\}$依范数收敛于 f,也称为函数列$\{f_n(x)\}$在E上 p 幂平均收敛于 $f(x)$.

p 幂平均收敛与依测度收敛有下列关系.

定理 6.2.1　设 $f_n(n=1,2,\cdots),f\in L^p(E)$，如果$\{f_n\}$依范数收敛于 f,则 $f_n\Rightarrow f$ 于 E.

证明　$\forall\varepsilon>0$,有

$$\int_E |f_n(x)-f(x)|^p dx\geqslant \int_{E[|f_n-f|\geqslant\varepsilon]} |f_n(x)-f(x)|^p dx$$
$$\geqslant\varepsilon^p m(E[|f_n-f|\geqslant\varepsilon]).$$

令 $n\to\infty$,就有 $m(E[|f_n-f|\geqslant\varepsilon])\to 0$. 证毕.

推论 6.2.2　设 $f_n(n=1,2,\cdots),f\in L^p(E)$，如果$\{f_n\}$依范数收敛于 f,则必有$\{f_n\}$的子列$\{f_{n_i}\}$,使得$\{f_{n_i}\}$在E上几乎处处收敛于f.

注　定理 6.2.1 的逆命题不成立. 例如,设 $E=(0,1]$,

$$f_n(x)=\begin{cases} e^n, & \text{当 } x\in\left(0,\frac{1}{n}\right)\text{时}, \\ 0, & \text{当 } x\in\left[\frac{1}{n},1\right]\text{时}, \end{cases} \quad (n=1,2,\cdots).$$

显然，$\{f_n(x)\}$在E上处处收敛于0，从而$f_n\Rightarrow 0$于E. 但$\forall p\in[1,+\infty)$，

$$\int_E |f_n(x)|^p dx=\int_0^{\frac{1}{n}} e^{pn}dx=\frac{1}{n}e^{pn}\to\infty(n\to\infty).$$

所以$\{f_n(x)\}$在E上并不p幂平均收敛于0.

例9 空间$L^\infty(E)$ 设$E\in\mathscr{L}_\nu$，$f(x)$是E上的可测函数. 如果$f(x)$与E上的一个有界函数几乎处处相等，则称$f(x)$是E上的一个本性有界可测函数. E上的本性有界可测函数全体记为$L^\infty(E)$，并把$L^\infty(E)$中几乎处处相等的函数看成同一个元素. 由于有限个零测度集的并集是零测度集，所以任意有限个本性有界可测函数的线性组合是本性有界的，因此，$L^\infty(E)$按通常的线性运算是一个线性空间. 令

$$\|f\|=\inf_{\substack{E_0\subset E\\ mE_0=0}}\left(\sup_{x\in E-E_0}|f(x)|\right)\quad(\forall f\in L^\infty(E)). \qquad (6.2.12)$$

这里的下确界是对于E中所有使得$f(x)$在$E-E_0$上成为有界函数的零测度集E_0而取的，称为f的本性最大模，有时也记作$\operatorname{ess}\sup\limits_{x\in E}|f(x)|$. 另外，当$mE=0$时，我们规定$\|f\|=0$.

现在证明(6.2.12)是$L^\infty(E)$上的范数. 首先证明：$\forall f\in L^\infty(E)$，$\exists E_0\subset E$，$mE_0=0$，使$\|f\|=\sup\limits_{x\in E-E_0}|f(x)|$. 事实上，$\forall n\in\mathbb{N}$，有$E_n\subset E$，使得$mE_n=0$，并且$\sup\limits_{x\in E-E_n}|f(x)|<\|f\|+\frac{1}{n}$. 令$E_0=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n$，则$E_0\subset E$，$mE_0=0$，并且

$$\|f\| \leqslant \sup_{x \in E - E_0} |f(x)| \leqslant \sup_{x \in E - E_n} |f(x)| < \|f\| + \frac{1}{n}.$$

令 $n \to \infty$，就得到 $\|f\| = \sup\limits_{x \in E - E_0} |f(x)|$.

根据上面证明的结论，(6.2.12)显然满足范数的条件(1)、(2)和(4)，只须再证(6.2.12)满足范数的条件(3). $\forall f, g \in L^\infty(E)$，据上面证明的结论，$\exists E_1, E_2 \subset E$，使得 $mE_1 = mE_2 = 0$，且

$$\|f\| = \sup_{x \in E - E_1} |f(x)|, \|g\| = \sup_{x \in E - E_2} |g(x)|.$$

因此

$$\begin{aligned}
\|f + g\| &\leqslant \sup_{x \in E - (E_1 \cup E_2)} |f(x) + g(x)| \\
&\leqslant \sup_{x \in E - (E_1 \cup E_2)} |f(x)| + \sup_{x \in E - (E_1 \cup E_2)} |g(x)| \\
&\leqslant \sup_{x \in E - E_1} |f(x)| + \sup_{x \in E - E_2} |g(x)| \\
&= \|f\| + \|g\|.
\end{aligned}$$

所以 $L^\infty(E)$ 按范数(6.2.12)成为一个赋范线性空间.

注 1 如果函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 E 上除去一个零测度集而外是一致收敛于函数 $f(x)$ 的，则称 $\{f_n(x)\}$ 在 E 上几乎处处一致收敛于 $f(x)$.

$L^\infty(E)$ 中点列的依范数收敛等价于相应函数列的几乎处处一致收敛. 证明留为习题.

注 2 当 $mE < +\infty$ 时，$\forall p \in [1, +\infty)$，有 $L^\infty(E) \subset L^p(E)$，且

$$\|f\|_\infty = \lim_{p \to +\infty} \|f\|_p \quad (\forall f \in L^\infty(E)), \qquad (6.2.13)$$

其中，$\|\cdot\|_\infty$ 和 $\|\cdot\|_p$ 分别表示 $L^\infty(E)$ 和 $L^p(E)$ 上的范数. 证明留为习题.

例 10 空间 $l^p (1 \leqslant p < +\infty)$ 设 l^p 是满足 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < +\infty$ 的数列 $x = \{x_i\}$ 全体按通常的线性运算所成的线性空间(它是 s 空

间的线性子空间). 令

$$\|x\|=\left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \quad (\forall x=\{x_i\}\in l^p), \qquad (6.2.14)$$

则(6.2.14)是 l^p 上的范数.

事实上,(6.2.14)显然满足范数的条件(1)、(2)和(4),并且当 $p=1$ 时也满足范数条件(3). 当 $p>1$ 时, 令 $q=\frac{p}{p-1}$. $\forall x=\{x_i\}$, $y=\{y_i\}\in l^p$, $\forall z=\{z_i\}\in l^q$, 类似于例 8 可证

$$\sum_{i=1}^{\infty}|x_i z_i|\leqslant\left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{\infty}|z_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}, \qquad (6.2.15)$$

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i+y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{i=1}^{\infty}|y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}. \qquad (6.2.16)$$

不等式(6.2.15)与(6.2.16) 也分别叫做 Hölder 不等式与 Minkowski 不等式. 由不等式(6.2.16)即知当 $p>1$ 时, (6.2.14)也满足范数条件(3). 因此 l^p 按范数(6.2.14)成为一个赋范线性空间.

***注 1** $\forall x=\{x_i\}\in l^p(1\leqslant p<+\infty)$, 必有

$$\lim_{p\to+\infty}\left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}=\sup_i|x_i|. \qquad (6.2.17)$$

证明留为习题.

注 2 当 $0<p<1$ 时, Minkowski 不等式一般不成立, 这时(6.2.8)(或(6.2.14))不是 $L^p(E)$(或 l^p)上的范数. 例如, $p=\frac{1}{2}$, 在 l^p 中取 $x=(1,0,0,0,\cdots)$, $y=(0,1,0,0,\cdots)$, 显然

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i+y_i|^{\frac{1}{2}}\right)^2=2^2>1+1=\left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^{\frac{1}{2}}\right)^2+\left(\sum_{i=1}^{\infty}|y_i|^{\frac{1}{2}}\right)^2.$$

因此当 $p=\frac{1}{2}$ 时，(6.2.14)不是 l^p 上的范数.

6.2.3 线性空间上的等价范数

在许多分析问题中，引进范数或距离是为了研究某种收敛性，关心的是在一定意义下的收敛问题而不是距离本身的大小. 为此，我们引入等价范数的概念.

定义 6.2.3 设在线性空间 X 上定义了两个范数 $\|\cdot\|_1$ 与 $\|\cdot\|_2$，我们称 $\|\cdot\|_2$ 强于 $\|\cdot\|_1$，是指 $\forall\{x_n\}\subset X$，若 $\|x_n\|_2\to 0\,(n\to\infty)$，则 $\|x_n\|_1\to 0\,(n\to\infty)$.

如果 $\|\cdot\|_2$ 强于 $\|\cdot\|_1$ 而且 $\|\cdot\|_1$ 也强于 $\|\cdot\|_2$，则称 $\|\cdot\|_1$ 与 $\|\cdot\|_2$ 等价.

定理 6.2.3 设 X 是线性空间，$\|\cdot\|_1$ 与 $\|\cdot\|_2$ 是 X 上的两个范数，则 $\|\cdot\|_2$ 强于 $\|\cdot\|_1 \Leftrightarrow \exists$ 常数 $c>0$，使得

$$\|x\|_1\leqslant c\|x\|_2\ (\forall x\in X). \tag{6.2.18}$$

证明 充分性显然. 下证必要性. 用反证法. 若(6.2.18)不成立，则 $\forall n\in\mathbb{N}$，$\exists x_n\in X$，使得 $\|x_n\|_1>n\|x_n\|_2$.

令 $y_n=\dfrac{x_n}{\|x_n\|_1}$. 一方面 $\|y_n\|_1=1\,(\forall n\in\mathbb{N})$，另一方面

$$0\leqslant\|y_n\|_2<\frac{1}{n}\ (\forall n\in\mathbb{N}),$$

所以 $\|y_n\|_2\to 0\,(n\to\infty)$. 又因为 $\|\cdot\|_2$ 强于 $\|\cdot\|_1$，所以 $\|y_n\|_1\to 0\,(n\to\infty)$. 这显然是一个矛盾. 证毕.

推论 6.2.4 设 X 是线性空间，$\|\cdot\|_1$ 与 $\|\cdot\|_2$ 是 X 上的两个范数，则 $\|\cdot\|_1$ 与 $\|\cdot\|_2$ 等价 $\Leftrightarrow \exists$ 常数 $c_1, c_2>0$，使得

$$c_1\|x\|_1\leqslant\|x\|_2\leqslant c_2\|x\|_1\ (\forall x\in X).$$

例 11 在线性空间 $C[a,b]$ 中，$\forall f\in C[a,b]$，令

$$\|f\|_1=\max_{a\leqslant t\leqslant b}|f(t)|,$$

$$\|f\|_2=\left(\int_a^b|f(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}(1\leqslant p<+\infty).$$

由本节例 4 和例 8 知，$\|\cdot\|_1$ 及 $\|\cdot\|_2$ 都是 $C[a,b]$ 上的范数，并且 $\forall f\in C[a,b]$，有

$$\|f\|_2\leqslant(b-a)^{\frac{1}{p}}\|f\|_1. \tag{6.2.19}$$

因此 $\|\cdot\|_1$ 强于 $\|\cdot\|_2$.

例 12 在 n 维线性空间 $\boldsymbol{R}^n$ 中，$\forall x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\boldsymbol{R}^n$，令

$$\|x\|_1=\left(\sum_{i=1}^n|x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\|x\|_2=\sum_{i=1}^n|x_i|,$$

$$\|x\|_3=\max\{|x_1|,|x_2|,\cdots,|x_n|\}.$$

显然 $\|\cdot\|_1$、$\|\cdot\|_2$、$\|\cdot\|_3$ 都是 $\boldsymbol{R}^n$ 上的范数（其中 $\|\cdot\|_1$ 就是欧几里得范数），并且 $\forall x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\boldsymbol{R}^n$，有

$$\frac{1}{n}\|x\|_2\leqslant\|x\|_3\leqslant\|x\|_1\leqslant\|x\|_2. \tag{6.2.20}$$

因此，$\|\cdot\|_1$、$\|\cdot\|_2$、$\|\cdot\|_3$ 彼此等价.

在 §6.8 我们还要证明 n 维线性空间上的任何两个范数都是等价的.

习 题 6.2

1. 设 X 是线性空间，$A\subset X$，证明 $\operatorname{span}A$ 是包含 A 的一切线性子空间的交.

2. 设 X 是线性空间，证明：

(1) X 中任何一族凸集的交仍是凸集；

(2) $\forall x_0 \in X$，若 $A \subset X$ 是凸集，则 $A+x_0=\{y+x_0 \mid y\in A\}$ 仍是凸集；

(3) 设 $B \subset X$，则

$$\mathrm{co}(B)=\left\{x=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i \;\middle|\; n\in\mathbf{N}, x_i\in B, \alpha_i\in[0,1],\right.$$

$$\left. i=1,2,\cdots,n,\ \sum_{i=1}^{n}\alpha_i=1\right\}.$$

3. 在二维空间 R^2 中，$\forall x=(x_1,x_2)\in R^2$，令

$$\|x\|_1=|x_1|+|x_2|;\qquad \|x\|_2=(|x_1|^2+|x_2|^2)^{\frac{1}{2}};$$

$$\|x\|_3=\max(|x_1|,|x_2|);\ \|x\|_4=(|x_1|^4+|x_2|^4)^{\frac{1}{4}}.$$

(1) 证明 $\|\cdot\|_i(i=1,2,3,4)$ 都是 R^2 的范数.

(2) 在 R^2 中取定三点，$O=(0,0)$，$A=(1,0)$，$B=(0,1)$，试在上述四种不同范数下求出 $\triangle OAB$ 三边的长度.

4. 设 $C(0,1]$ 表示 $(0,1]$ 上连续且有界的函数 $x(t)$ 的全体. $\forall x\in C(0,1]$，令 $\|x\|=\sup\limits_{0<t\leqslant 1}|x(t)|$. 证明:

(1) $\|\cdot\|$ 是 $C(0,1]$ 上的范数;

(2) $C(0,1]$ 中点列 $\{x_n\}$ 依范数 $\|\cdot\|$ 收敛于 x_0 的充要条件是 $\{x_n(t)\}$ 在 $(0,1]$ 上一致收敛于 $x_0(t)$.

5. 证明 $C^{(k)}[a,b]$(§ 6.2 例 5)按(6.2.4)定义的 $\|\cdot\|$ 成为一个赋范线性空间，并且 $C^{(k)}[a,b]$ 中点列 $\{f_n\}$ 依范数收敛于 f，等价于 $f_n(t)$ 的直到 k 阶导数分别一致收敛于 $f(t)$ 的相应阶导数.

6. 证明 $\mathrm{V}[a,b]$(见 § 6.2 例7)按(6.2.6)定义的 $\|\cdot\|$ 成为一个赋范线性空间.

7. 证明: (1) $L^\infty(E)$ (见 § 6.2 例 9)中点列的依范数收敛等价于相应函数列的几乎处处一致收敛.

(2) 设 $mE<+\infty$，则 $\forall p\in[1,+\infty)$，有 $L^\infty(E)\subset L^p(E)$，且

$$\|f\|_\infty=\lim_{p\to+\infty}\|f\|_p\quad (\forall f\in L^\infty(E)).$$

*8. 证明 $\lim\limits_{p\to+\infty}\left(\sum\limits_{i=1}^{\infty}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}=\sup\limits_i |x_i|\quad (\forall x=\{x_i\}\in l^p(1\leqslant p<+\infty))$.

($l^p(1\leqslant p<+\infty)$的定义见§6.2例10).

9. 证明 线性的度量空间(X,ρ) 成为赋范线性空间$(X,\|\cdot\|)$(指范数$\|\cdot\|$与距离$\rho(\cdot,\cdot)$满足$\rho(x,y)=\|x-y\|$, $\forall x,y\in X$)的充要条件是

(1) $\rho(x,y)=\rho(x-y,\theta)$ $(\forall x,y\in X)$,

(2) $\rho(\alpha x,\theta)=|\alpha|\rho(x,\theta)$ $(\forall \alpha\in\mathbf{K}, \forall x\in X)$.

10. 线性空间s(见§6.1例3)按(6.1.5)定义的距离$\rho(\cdot,\cdot)$能否由s上某个范数导出?为什么?

11. 在$C[0,1]$中, $\forall f\in C[0,1]$, 令

$$\|f\|_1=\left(\int_0^1 |f(t)|^2dt\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\|f\|_2=\left(\int_0^1 (1+t)|f(t)|^2dt\right)^{\frac{1}{2}},$$

证明: $\|\cdot\|_1$和$\|\cdot\|_2$是$C[0,1]$上的两个等价范数.

§6.3 度量空间中的点集及连续映射

6.3.1 度量空间中的点集

在第二章中, 我们已就n维欧几里得空间$\mathbf{R}^n$中的点集进行了详细的讨论,介绍了邻域、开集、闭集、导集、闭包以及点集间的距离等一系列概念,现在把这些概念拓广到一般度量空间中来,其中大多数定义的叙述和定理的证明, 几乎可以把以前的行文逐字逐句地移植过来,而无须进行多大的改变.

在本小节中,我们总是设(X,ρ)是度量空间,并简记作X.

定义 6.3.1 设$x_0\in X$,r是一个正数. 点集$\{x\,|\,x\in X,\rho(x,x_0)<r\}$称为以$x_0$为中心、以$r$为半径的开球或$x_0$的$r$-邻域, 记作$O(x_0,r)$; 点集$\{x\,|\,x\in X,\rho(x,x_0)\leqslant r\}$称为以$x_0$为中心、以$r$为半径的闭球,记作$B(x_0,r)$; 点集$\{x\,|\,x\in X,\rho(x,x_0)=r\}$称为以$x_0$为中心,以$r$为半径的球面,记作$S(x_0,r)$.

定义 6.3.2 设$x_0\in X$,$A\subset X$. 点x_0称为点集A的内点, 是

指 $\exists r>0$ 使 $O(x_0,r)\subset A$. A 的内点全体称为 A 的内域，记作 A^0. 如果 $A=A^0$，则称 A 为 X 中的开集.

称 X 中包含 x_0 的任何开集为 x_0 的一个邻域，记作 $O(x_0)$.

显然，X 中的开球 $O(x_0,r)$ 是 X 中的开集.

定义 6.3.3 设 $x_0\in X, A\subset X$，点 x_0 称为点集 A 的极限点，是指 $\forall r>0$ 都有 $(O(x_0,r)-\{x_0\})\cap A\neq\varnothing$. A 的极限点全体称为 A 的导集，记作 A'. 如果 $A\supset A'$，则称 A 是闭集；如果 $A\subset A'$，则称 A 是自密集；如果 $A=A'$，则称 A 是完全集.

定义 6.3.4 设 $x_0\in X, A\subset X$，点 x_0 称为点集 A 的边界点，是指 $\forall r>0$，都有 $O(x_0,r)\cap A\neq\varnothing$，且 $O(x_0,r)\cap(X-A)\neq\varnothing$. A 的边界点全体称为 A 的边界，记作 A^b.

点 x_0 称为点集 A 的孤立点，是指 $\exists r>0$，使 $O(x_0,r)\cap A=\{x_0\}$（显然 A 的孤立点必属于 A）. 如果 A 的每一点都是孤立点，则称 A 为孤立点集. 如果 X 中每一点都是孤立点，则称 X 是离散的度量空间，简称为离散空间.

点 x_0 称为点集 A 的接触点，是指 $\forall r>0$，都有 $O(x_0,r)\cap A\neq\varnothing$. A 的接触点全体称为 A 的闭包，记作 $\bar{A}$.

显然，$\bar{A}=A\cup A'=A^0\cup A^b=A\cup A^b=X-(X-A)^0$.

注 6.3.1 第二章的定理 2.1.1、定理 2.1.3、定理 2.1.4、定理 2.1.5、定理 2.1.8、推论 2.1.9、定理 2.1.10、定理 2.1.11、习题 2.1 的第 3、4 题以及这些定理和习题的证明都可以移植到度量空间 (X,ρ) 中来，只须把其中的“$\mathbb{R}^n$”换成度量空间 X，把“欧儿里得距离”换成度量空间 X 中的距离 ρ. 为了今后应用方便起见，现将这些定理在度量空间 (X,ρ) 中的拓广形式逐一列举如下：

1° **开集的基本性质：**(1) **空集和全空间 X 是开集；**
(2) **任意个开集之并为开集；**(3) **有限个开集之交是开集.**

2° **设** $x_0\in X, A\subset X$，**则** $x_0\in A'\Leftrightarrow A$ **中有各项互异的点列** $\{x_n\}$

$(x_n \neq x_0, n=1, 2, \cdots)$收敛于 x_0

3° 设 $A, B \subset X$, 如果 $A \subset B$, 则 $A' \subset B'$, $A^\circ \subset B^\circ$, $\bar{A} \subset \bar{B}$.

4° 设 $A, B \subset X$, 则 $(A \cup B)' = A' \cup B'$, $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

5° 设 $A \subset X$, 则 A'、$\bar{A}$ 是闭集.

6° 设 $A \subset X$, 则 A 是闭集 $\Leftrightarrow \bar{A} = A$.

7° 设 $F \subset X$, 则 F 是闭集 $\Leftrightarrow X - F$ 是开集.

8° 闭集的基本性质:(1) 空集和全空间 X 是闭集;(2) 任意个闭集之交为闭集;(3) 有限个闭集之并是闭集.

9° 设 $A \subset X$, 则 $\bar{A}$ 恰是 X 中包含 A 的所有闭集之交.

10° 设 $x \in X$, $A \subset X$, 则下列三件事彼此等价: (1) $x \in \bar{A}$, (2) x 的每个邻域中有 A 的点, (3) 在 A 中存在点列 $\{x_n\}$ 收敛于 x.

由于集合 X 的任意性(只要非空), 以及在 X 上定义距离的多样性, 在一般度量空间 X 中的开集、闭集将出现不同于欧几里得空间的新情况. 例如, 当 (X, ρ) 是离散的度量空间时, X 的任一子集都是开集, 也是孤立点集, 也是闭集. 这种情况在欧几里得空间中不可能出现.

定理 6.3.2 设 $A \subset X$, 则 A 是闭集 $\Leftrightarrow \forall \{x_n\} \subset A$, 若 $x_n \to x_0$, 则 $x_0 \in A$.

证明 "$\Rightarrow$": 设 A 是闭集, $\forall \{x_n\} \subset A$, 若 $x_n \to x_0$, 据注 6.3.1 的 10°, $x_0 \in \bar{A} = A$.

"$\Leftarrow$": $\forall x_0 \in A'$, 据注 6.3.1 的 2°, A 中有各项互异的点列 $\{x_n\}$ 收敛于 x_0. 据假设知, $x_0 \in A$, 故 $A' \subset A$, 这说明 A 是闭集. 证毕.

定理 6.3.3 设 X_0 是 X 的子空间, 则

(1) G_0 是 X_0 中的开集 $\Leftrightarrow \exists X$ 中的开集 G, 使得 $G_0 = G \cap X_0$.

(2) F_0 是 X_0 中的闭集 $\Leftrightarrow \exists X$ 中的闭集 F, 使得 $F_0 = F \cap X_0$.

证明 (1)"$\Rightarrow$": 设 G_0 是 X_0 中的开集, 则 $\forall x \in G_0$, $\exists X_0$ 中的

开球 $O_{X_0}(x,r_x)$①$\subset G_0$，从而$G_0=\bigcup\limits_{x\in G_0}O_{X_0}(x,r_x)$. 相应于$O_{X_0}(x,r_x)$作 X 中的开球 $O_X(x,r_x)$，令 $G=\bigcup\limits_{x\in G_0}O_X(x,r_x)$，则 G 是 X 中的开集，并且

$$G\cap X_0=\bigcup_{x\in G_0}(O_X(x,r_x)\cap X_0)=\bigcup_{x\in G_0}O_{X_0}(x,r_x)=G_0.$$

(1) "$\Leftarrow$"：$\forall x\in G_0$，则 $x\in X_0$ 且 $x\in G$，因 G 是 X 中开集，所以$\exists$ X 中的开球 $O_X(x,r)\subset G$，从而

$$O_{X_0}(x,r)=O_X(x,r)\cap X_0\subset G\cap X_0=G_0,$$

所以 $x\in(G_0)^0$，即 $G_0\subset(G_0)^0$，因此，G_0 是 X_0 中的开集.

(2) F_0 是 X_0 中的闭集$\Leftrightarrow X_0-F_0$ 是 X_0 中的开集$\Leftrightarrow\exists X$ 中的开集 G，使得 $X_0-F_0=G\cap X_0$，也就是 $F_0=X_0-(G\cap X_0)=(X-G)\cap X_0$，令 $F=X-G$，则 F 是 X 中的闭集. 证毕.

定理 6.3.3 说明，全空间中的开集、闭集和子空间作交得到的集是子空间中的开集和闭集，而且子空间中的开集和闭集都是可以这样得到的. 特别，全空间中的开集或闭集，如果含在某一子空间中，那末必是这一子空间中的开集和闭集. 但是反过来则不尽然. 然而，如果子空间是全空间中的开(闭)集，那末子空间中的一切开(闭)集都是全空间中的开(闭)集.

定义 6.3.5 设 $A\subset X$，称 $d(A)=\sup\limits_{x,y\in A}\rho(x,y)$为点集 A 的直径，当 $d(A)<+\infty$时，称 A 为 X 中的有界集.

显然，X 中的点集 A 有界$\Leftrightarrow\exists X$ 中的开球 $O(x_0,r)\supset A$.

定义 6.3.6 设 $x_0\in X$，A，$B\subset X$. 称 $\rho(x_0,A)=\inf\limits_{x\in A}\rho(x_0,x)$为点 x_0 到点集 A 的距离. 称 $\rho(A,B)=\inf\limits_{\substack{x\in A\\ y\in B}}\rho(x,y)$为 A，B 之间

① 这里给开球加上下标空间是为了防止混淆，例如，$O_{X_0}(x,r_x)$表示 X_0 中以 x 为中心、以 r_x 为半径的开球. 下同.

的距离.

显然，$x_0\in\bar{A}\Leftrightarrow\rho(x_0,A)=0$.

例 1 设 A 是赋范线性空间 X 的线性子空间，则 $\bar{A}$ 是 X 中包含 A 的最小的闭的线性子空间.

证明 由注 6.3.1 的 5°知，$\bar{A}$ 是闭集. 今证 $\bar{A}$ 是线性子空间. $\forall x,y\in\bar{A}$，据注 6.3.1 的 10°，必有 $\{x_n\}$、$\{y_n\}\subset A$，使 $x_n\to x$，$y_n\to y$，因此 $x_n+y_n\to x+y$，但 $\{x_n+y_n\}\subset A$，所以 $x+y\in\bar{A}$. 同样可以证明当 $\alpha\in\mathbb{K}$ 时，$\alpha x\in\bar{A}$. 因此 $\bar{A}$ 是线性子空间. 由注 6.3.1 的 9°知，$\bar{A}$ 是包含 A 的最小的闭集，因而 $\bar{A}$ 是 X 中包含 A 的最小的闭的线性子空间.

闭的线性子空间也称为闭线性子空间或线性闭子空间.

定义 6.3.7 设 A 是赋范线性空间 X 的子集，称 $\overline{\text{span}A}$ 是由 A 张成的线性闭子空间.

例 2 设 $B[a,b]$ 是区间 $[a,b]$ 上有界函数 $x=x(t)$ 全体按通常的线性运算和范数 $\|x\|=\sup\limits_{t\in[a,b]}|x(t)|$ 所成的赋范线性空间. 令 A 是区间 $[a,\xi]$ $(a\leqslant\xi\leqslant b)$ 的特征函数 $\chi_{[a,\xi]}(\cdot)$ 全体，显然 $A\subset B[a,b]$，则 A 所张成的线性闭子空间 $\overline{\text{span}A}\supset C[a,b]$.

证明 $\forall x\in C[a,b]$，令 $\xi_k^{(n)}=a+\dfrac{k}{n}(b-a)$，$k=0,1,2,\cdots,n$；$n=1,2,\cdots$. $\forall n\in\mathbb{N}$，作 $[a,b]$ 上的阶梯函数

$$x_n(t)=x(\xi_1^{(n)})(\chi_{[a,\xi_1^{(n)}]}(t))$$
$$+\sum_{k=2}^{n}x(\xi_k^{(n)})(\chi_{[a,\xi_k^{(n)}]}(t)-\chi_{[a,\xi_{k-1}^{(n)}]}(t)).$$

则 $x_n\in\text{span}\,A$. 今证 $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n-x\|=0$.

事实上，由于当 $t\in[a,\xi_1^{(n)}]$ 时，$x_n(t)=x(\xi_1^{(n)})$；当 $t\in(\xi_{k-1}^{(n)},\xi_k^{(n)}]$ 时，$x_n(t)=x(\xi_k^{(n)})$ $(k=2,\cdots,n)$. 所以

$$\|x_n-x\|=\sup_{t\in[a,b]}|x_n(t)-x(t)|$$

$$=\max\{\sup_{a\leqslant t\leqslant \xi_1^{(n)}}|x(\xi_1^{(n)})-x(t)|,\sup_{\xi_{k-1}^{(n)}<t\leqslant\xi_k^{(n)}}|x(\xi_k^{(n)})$$

$$-x(t)|,k=2,\cdots,n\}$$

$$\leqslant\sup_{\substack{t,t'\in[a,b]\\|t-t'|\leqslant\frac{b-a}{n}}}|x(t)-x(t')|.$$

因为 $x(t)$ 在 $[a,b]$ 上一致连续，所以

$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall t,t'\in[a,b]$，只要 $|t-t'|<\delta$，就有

$$|x(t)-x(t')|<\frac{\varepsilon}{2},$$

取自然数 N，使 $\frac{b-a}{N}<\delta$，当 $n\geqslant N$ 时，有

$$\sup_{\substack{t,t'\in[a,b]\\|t-t'|\leqslant\frac{b-a}{n}}}|x(t)-x(t')|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon.$$

从而当 $n\geqslant N$ 时，有 $\|x_n-x\|<\varepsilon$。故

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n-x\|=0,\text{即 } x_n\to x(n\to\infty).$$

据注 6.3.1 的 10°，$x\in\overline{\text{span}A}$。证毕.

6.3.2 连续映射

在本小节中，我们总是设 (X,ρ)、(Y,d) 是度量空间，并分别简记作 X、Y.

定义 6.3.8 设 $A\subset X$，$T:A\to Y$ 是一映射，称 T 在点 $x_0\in A$ 是连续的，如果对于 Tx_0 在 Y 中的任何邻域 $O(Tx_0)$，必有 x_0 在 X 中的一个邻域 $O(x_0)$，使得 $T(O(x_0)\cap A)\subset O(Tx_0)$（即当 $x\in O(x_0)\cap A$ 时，$Tx\in O(Tx_0)$）.

如果映射 T 在 A 的每一点都连续，就称 T 是 A 上的连续映射

或简称T是连续映射．特别地，当象空间Y是实数域或复数域时，称T为(实值或复值)连续函数．

定理 6.3.4 **设$A\subset X$，$T:A\to Y$是一映射，则下列三件事等价：**

(1) **T在点$x_0\in A$是连续的．**

(2) **对于Tx_0在Y中的任一ε-邻域$O(Tx_0,\varepsilon)$，必有x_0在X中的δ-邻域$O(x_0,\delta)$，使得$T(O(x_0,\delta)\cap A)\subset O(Tx_0,\varepsilon)$．**

(3) **$\forall\{x_n\}\subset A$，若$\rho(x_n,x_0)\to 0(n\to\infty)$，则$d(Tx_n,Tx_0)\to 0$ $(n\to\infty)$．**

证明 (1) $\Rightarrow$(2)：设T在点$x_0\in A$连续，则由连续的定义，对于Tx_0在Y中的任一ε-邻域$O(Tx_0,\varepsilon)$，必有x_0在X中的一个邻域$O(x_0)$，使得$T(O(x_0)\cap A)\subset O(Tx_0,\varepsilon)$．因$x_0$是$O(x_0)$的内点，必有$x_0$在$X$中的$\delta$-邻域$O(x_0,\delta)\subset O(x_0)$，因此

$$T(O(x_0,\delta)\cap A)\subset T(O(x_0)\cap A)\subset O(Tx_0,\varepsilon).$$

即(2)成立．

(2) $\Rightarrow$(3)：设T在点$x_0\in A$处适合条件(2)．$\forall\{x_n\}\subset A$，若$\rho(x_n,x_0)\to 0(n\to\infty)$，必有自然数$N$，使当$n\geqslant N$时，$\rho(x_n,x_0)<\delta$，即$x_n\in O(x_0,\delta)\cap A$，从而$Tx_n\in O(Tx_0,\varepsilon)$，即当$n\geqslant N$时，有$d(Tx_n,Tx_0)<\varepsilon$，因此$d(Tx_n,Tx_0)\to 0(n\to\infty)$．(3)成立．

(3)$\Rightarrow$(1)：假设T在点$x_0\in A$处不连续，则必有Tx_0在Y中的邻域$O(Tx_0)$，使得对于x_0在X中的任何邻域$O(x_0)$，$T(O(x_0)\cap A)$不包含于$O(Tx_0)$之中，特别地，对于x_0在X中的$\frac{1}{n}$-邻域$O\left(x_0,\frac{1}{n}\right)(\forall n\in\mathbb{N})$，有

$$x_n\in O\left(x_0,\ \frac{1}{n}\right)\cap A,\ Tx_n\overline{\in} O(Tx_0).$$

因此$x_n\in A(n=1,2,\cdots)$，$\rho(x_n,x_0)\to 0(n\to\infty)$，但$d(Tx_n,Tx_0)\not\to$

$0(n\to\infty)$，这与(3)矛盾．因此(1)成立．证毕．

定理 6.3.5 **设 $T:X\to Y$ 是一映射，则 T 在 X 上连续 $\Leftrightarrow Y$ 中任一开集 G 的原象 $T^{-1}(G)=\{x\in X\mid Tx\in G\}$ 是 X 中的开集．**

证明 “$\Rightarrow$”：设 T 在 X 上连续，G 是 Y 中任一开集．如果 $T^{-1}(G)$ 是空集，它自然是 X 中的开集．如果 $T^{-1}(G)\neq\varnothing$，$\forall x_0\in T^{-1}(G)$，则 $Tx_0\in G$，于是 G 就是 Tx_0 在 Y 中的一个邻域，由于 T 在点 x_0 处是连续的，必有 x_0 在 X 中的一个邻域 $O(x_0)$，使得 $T(O(x_0))\subset G$．据定理 1.2.2 的6)和 1)，$O(x_0)\subset T^{-1}[T(O(x_0))]\subset T^{-1}(G)$．所以 x_0 是 $T^{-1}(G)$ 的内点，因此 $T^{-1}(G)$ 是 X 中的开集．

“$\Leftarrow$”：设 Y 中任一开集的原象是 X 中的开集．$\forall x_0\in X$，则 Tx_0 在 Y 中的任一邻域 $O(Tx_0)$ 的原象 $T^{-1}(O(Tx_0))$ 是 X 中的开集．显然 $x_0\in T^{-1}(O(Tx_0))$，因此 $T^{-1}(O(Tx_0))$ 就是 x_0 在 X 中的一个邻域．据定理 1.2.2 的 7)，

$$T[T^{-1}(O(Tx_0))]\subset O(Tx_0),$$

从而 T 在 x_0 处是连续的，由 $x_0\in X$ 的任意性知，T 在 X 上连续．证毕．

定理 6.3.5 中的开集可以换成闭集．

推论 6.3.6 **设 $T:X\to Y$ 是一映射，则 T 在 X 上连续 $\Leftrightarrow Y$ 中任一闭集 F 的原象 $T^{-1}(F)$ 是 X 中的闭集．**

定义 6.3.9 设 $A\subset X, B\subset Y, T:A\to B$ 是 A 到 B 上的一一映射，并且 T 以及它的逆映射 T^{-1} 都是连续的，则称 T 是 A 到 B 上的拓扑映射．这时称 A 和 B 是拓扑同构或同胚的．

假如两个度量空间 X 和 Y 是拓扑同构的，由定理 6.3.5 知，此时不仅 X,Y 之间的点可以一一对应，而且 X，Y 中所有邻域之间也是一一对应的．由于连续性的概念只依赖于邻域的概念，因此在只讨论仅与连续性有关的问题时，可以把两个拓扑同构的空间看成是一个．拓扑同构是拓扑空间理论中很重要的概念．

我们把子集 A 和 B 都分别看成度量空间，由定理 6.3.5 和推论6.3.6 可知，A 到 B 上的一一映射 T 成为拓扑映射的充要条件是：A 中任何开(闭)集的象是 B 中开(闭)集，并且 B 中的开(闭)集必是 A 中某一开(闭)集的象.

习 题 6.3

1. 度量空间中开球的闭包是闭球吗？赋范线性空间中开球的闭包是闭球吗？为什么？

2. 设 (X,ρ) 是度量空间，$A\subset X$，$r>0$. 证明

$$O(A,r)=\{x\mid x\in X,\rho(x,A)<r\}$$

是 X 中的开集.

3. 证明：

(1) 度量空间中的任一闭集必为可数个开集之交；

(2) 度量空间中的任一开集必为可数个闭集之并.

4. 设 (X,ρ) 是度量空间，$x_0\in X$. 证明函数 f：$x\longrightarrow\rho(x_0,x)$ $(x\in X)$ 是 X 上的连续函数.

5. 证明度量空间中的闭球、球面都是闭集.

6. 设 X 是度量空间，F_1、F_2 是 X 中不相交的两个闭集，则存在 X 中的开集 G_1、G_2，使得

$$G_1\cap G_2=\varnothing,\ 且\ G_1\supset F_1,G_2\supset F_2.$$

7. 设 (X,ρ) 是度量空间，$A\subset X$，令

$$f(x)=\inf_{y\in A}\rho(x,y)\quad(x\in X),$$

则 $f(x)$ 是 X 上的连续函数.

8. 设 X 为度量空间，F_1、F_2 为 X 中不相交的闭集，则存在 X 上的连续函数 $f(x)$，使得当 $x\in F_1$ 时，$f(x)=0$；当 $x\in F_2$ 时，$f(x)=1$.

9. 设 A 是赋范线性空间 X 的有限子集，则

$$\overline{\operatorname{span} A}=\operatorname{span} A.$$

10. 设 (X,ρ)、(Y,ρ_1)、(Z,ρ_2) 都是度量空间，f 是 $(X,\rho)\longrightarrow(Y,\rho_1)$ 的连续映射，g 是 $(Y,\rho_1)\longrightarrow(Z,\rho_2)$ 的连续映射，则 gf 是 $(X,\rho)\longrightarrow(Z,\rho_2)$ 的连续映射.

11. 设X是度量空间，A是X的子空间，f是A上的实函数，则f成为连续函数的充要条件是对每个实数c，集$A[f\leqslant c]$与集$A[f\geqslant c]$是子空间A中的闭集。

12. 设$B\subset[a,b]$，则$C[a,b]$中的集$\{f\mid$当$t\in B$时，$f(t)=0\}$是闭集，而且集

$$\{f\mid \text{当 } t\in B \text{ 时}, |f(t)|<a\} \quad (a>0)$$

是开集的充要条件是B为闭集.

13. 证明：按$C[a,b]$中范数，$C^{(k)}[a,b]$是$C[a,b]$的非闭的子空间.

§6.4 稠密性与可分性

6.4.1 稠密集与疏朗集

在第二章我们已经介绍了n维欧几里得空间$\mathbf{R}^n$中的稠密集和疏朗集的概念，现在把它们拓广到一般度量空间中来.

定义 6.4.1 设X是度量空间，$A, E\subset X$. 如果E中任何一点x的任何邻域中都含有A中的点，就称A在E中稠密. 当A在X中稠密时，就称A是X中的稠密集.

由注 6.3.1 的 10° 可立即得到如下定理：

定理 6.4.1 设X是度量空间，$A, E\subset X$.

(1) A在E中稠密$\Longleftrightarrow \bar{A}\supset E$.

(2) A在E中稠密$\Longleftrightarrow \forall x\in E$，有$A$中的点列$\{x_n\}$，$x_n\to x$.

定理 6.4.2 设X是度量空间，$A, B, C\subset X$. 如果B在A中稠密，C在B中稠密，则C在A中稠密.

证明 由定理 6.4.1 的(1)知，$\bar{B}\supset A$，$\bar{C}\supset B$. 但$\bar{B}$是包含B的最小闭集. 所以$\bar{C}\supset\bar{B}$，即$\bar{C}\supset A$，因此C在A中稠密. 证毕.

本节以下用P表示一元多项式全体所成的线性空间，我们把它看成度量空间$C[a,b]$的子集，那末 Weierstrass 的逼近定理(即：对区间$[a,b]$上的任何一个连续函数$f(x)$，必存在一列多项

式 $P_n(x)$ 在$[a,b]$上一致收敛于 $f(x)$)，可用度量空间的稠密性改述如下：

定理 6.4.3 P 在 $C[a,b]$中是稠密的.

定理 6.4.4 设 $E\in\mathscr{L}_\nu(\nu\in\mathbf{N})$, $L^p(E)$ $(1\leqslant p<+\infty)$中的有界可测函数全体 $B(E)$是 $L^p(E)$的稠密子集.

证明 $\forall f\in L^p(E)$, 作函数列

$$f_n(x)=\begin{cases}f(x), & |f(x)|\leqslant n,\\ 0, & |f(x)|>n,\end{cases}\quad n=1,2,\cdots.$$

则 $f_n(x)$ $(n=1,2,\cdots)$ 是 $L^p(E)$ 中的一列有界可测函数，即 $f_n\in B(E)$ $(n=1,2,\cdots)$, 且

$$\int_E|f_n(x)-f(x)|^p\,dx=\int_{E[|f|>n]}|f(x)|^p\,dx,\ \forall n\in\mathbf{N}.$$

由于 $|f|^p\in L^1(E)$, 据积分的绝对连续性,

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0,$$

使得当 $e\subset E$, $me<\delta$ 时, 成立

$$\int_e|f(x)|^p dx<\varepsilon^p.$$

因为

$$n^p m(E[|f|>n])\leqslant\int_{E[|f|>n]}|f(x)|^p dx$$
$$\leqslant\int_E|f(x)|^p dx,\ \forall n\in\mathbf{N},$$

所以∃自然数 N, 使当 $n\geqslant N$ 时, $m(E[|f|>n])<\delta$, 从而当 $n\geqslant N$ 时,

$$\|f_n-f\|=\left(\int_{E[|f|>n]}|f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}<\varepsilon.$$

即 $f_n\to f$. 所以 $B(E)$在 $L^p(E)$中稠密. 证毕.

定理 6.4.5 设 $E\in\mathscr{L}_1$, $L^p(E)$ $(1\leqslant p<+\infty)$中的有界连续函数全体 $M(E)$在 $L^p(E)$中是稠密的.

证明 由定理 6.4.2 和定理 6.4.4 可知，只须证明按 $L^p(E)$ 的距离，$M(E)$在 $B(E)$ ($B(E)$是 $L^p(E)$ 中有界可测函数全体)中稠密就可以了。

$\forall f\in B(E)$，设 $|f(x)|\leqslant K(\forall x\in E)$. $\forall\varepsilon>0$，据定理 4.3.1 (Лузин 定理)，对于正数 $\delta=\left(\dfrac{\varepsilon}{2K}\right)^p$，$\exists E$ 上的连续函数 $g(x)$，使得 $m(E[f\neq g])<\delta$. 不妨设 $|g(x)|\leqslant K \quad (\forall x\in E)$，如果不对的话，把 $g(x)$换成连续函数

$$\max(\min(g(x),K),-K)$$

就行了. 于是

$$\begin{aligned}\int_E|f-g|^p dx&=\int_{E[f\neq g]}|f-g|^p dx+\int_{E-E[f\neq g]}|f-g|^p dx\\&=\int_{E[f\neq g]}|f-g|^p dx\\&<(2K)^p\cdot\delta=\varepsilon^p.\end{aligned}$$

因此 $f-g\in L^p(E)$，由于 $L^p(E)$是线性空间，从而 $g=f-(f-g)\in L^p(E)$，且$\|f-g\|<\varepsilon$. 这说明 $O(f,\varepsilon)$中有 $M(E)$中的点 g，所以 $M(E)$按 $L^p(E)$中的距离在 $B(E)$中稠密. 证毕.

注 据定理 4.3.2 的注，把定理 6.4.5 中的 $\mathscr{L}_1$ 改成 $\mathscr{L}_\nu$ ($\nu\in\mathbb{N}$)时，所得定理仍然成立.

推论 6.4.6 P 和 $C[a,b]$在 $L^p[a,b]$($1\leqslant p<+\infty$)中稠密.

证明 由定理 6.4.5 知，$C[a,b]$是 $L^p[a,b]$ 中的稠密集. 只须再证按 $L^p[a,b]$中的距离，P 在 $C[a,b]$中稠密.

$\forall f\in C[a,b]$，$\forall\varepsilon>0$，据定理 6.4.3，$\exists g\in P$，使得

$$\max_{a\leqslant t\leqslant b}|f(t)-g(t)|<\frac{\varepsilon}{(b-a)^{\frac{1}{p}}},$$

从而 $\|f-g\|=\left(\int_a^b|f(t)-g(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}<\varepsilon$. 证毕.

由§6.3例2和推论6.4.6可立即得到

推论6.4.7 设A是区间$[a,\xi](a\leqslant\xi\leqslant b)$的特征函数$\chi_{[a,\xi]}(\cdot)$全体，则Span$A$($[a,b]$上的左方连续的阶梯函数全体)在$L^p[a,b]$ $(1\leqslant p<+\infty)$中稠密.

定义6.4.2 设X是度量空间，$A\subset X$. 如果A不在X的任何一个非空的开集中稠密，就称A是X中的疏朗集.

显然，这个定义中的非空开集可以换成半径大于零的开球.

定理6.4.8 设X是度量空间，$A\subset X$，则下列三件事等价：

(1) A是X中的疏朗集.

(2) $(\bar{A})^\circ=\varnothing$.

(3) 对于X中的任何闭球$B(x,r)$，都存在闭球$B(x_1,r_1)\subset B(x,r)$，使得$B(x_1,r_1)\cap A=\varnothing$.

证明 (3)⇒(1)及(1)⇒(2)都是显然的. 下证(2)⇒(3)：

假若X中存在闭球$B(x_0,r_0)$，使得$B(x_0,r_0)$中的任何闭球总含有A中的点，则$B(x_0,r_0)$中的任何开球也含有A中的点，从而$\bar{A}\supset B(x_0,r_0)\supset O(x_0,r_0)$，即$x_0\in(\bar{A})^\circ$. 这与条件(2)矛盾，因此(3)成立. 证毕.

定义6.4.3 度量空间X中的点集称为第一纲集，是指它可以表示成为至多可数个疏朗集的并；而X中不是第一纲集的点集称为第二纲集.

由于欧几里得空间中的单元素集是疏朗集，所以欧几里得空间中的任一可数集都是第一纲集. 至于第二纲集我们将在§6.5中给出.

6.4.2 可分集

定义6.4.4 设X是度量空间，$A\subset X$. 如果存在X中的有限集或可数集B，使B在A中稠密，就称A是X中的可分集. 当空间

X 本身是可分集时，称 X 是可分空间.

例 1 n 维欧几里得空间 $\boldsymbol{R}^n$ 是可分空间. 因为坐标为有理数的点(即有理点)的全体是 $\boldsymbol{R}^n$ 中的可数的稠密集.

例 2 空间 $l^p(1\leqslant p<+\infty)$ 是可分空间.

证明 我们仅就 l^p 是实空间的情形进行证明. 令

$A=\{y=(y_1,y_2,\cdots,y_m,0,0,\cdots)\mid y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_m$ 是有理数, $m\in\mathrm{N}\}$,

则 A 是 l^p 中的可数集. 只须再证 A 在 l^p 中稠密. $\forall x=(x_1,\ x_2,\ \cdots)\in l^p$, $\forall\varepsilon>0$, 由于 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}|x_i|^p<+\infty$, 必有 $m\in\mathrm{N}$, 使得

$$\sum_{i=m+1}^{\infty}|x_i|^p<\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p.$$

对于 $x_1,x_2,\cdots,x_m$, 取有理数 $y_1,y_2,\cdots,y_m$, 使得

$$\sum_{i=1}^{m}|x_i-y_i|^p<\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p,$$

于是 A 中的点 $y=(y_1,y_2,\cdots,y_m,0,0,\cdots)$ 与 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_m,\cdots)$ 的距离

$$\rho(x,y)=\|x-y\|=\left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i-y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$=\left(\sum_{i=1}^{m}|x_i-y_i|^p+\sum_{i=m+1}^{\infty}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$<\left[\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p+\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p\right]^{\frac{1}{p}}=\left[2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p\right]^{\frac{1}{p}}\leqslant\varepsilon.$$ 证毕.

在下面的两个例子中，用 P_0 表示系数是有理数的(一元)多项式全体. 由第一章习题 1.3 的 2 知，P_0 是可数集.

例 3 $C[a,b]$ 是可分空间.

证明 据定理 6.4.3，P 在 $C[a,b]$ 中稠密. 只须再证按 $C[a,$

$b]$中的距离，P_0 在 P 中稠密.

$$\forall p(x)=\sum_{i=0}^{n}c_i x^i\in P,\ \forall \varepsilon>0,\ 取$$

$$p_0(x)=\sum_{i=0}^{n}r_i x^i\in P_0,\ 使$$

$$|c_i-r_i|<\frac{\varepsilon}{(n+1)A^n},\quad i=0,1,2,\cdots,n,$$

其中 $A=\max(|a|,|b|,1)$，则 $\forall x\in[a,b]$，有

$$\begin{aligned}|p(x)-p_0(x)|&\leqslant\sum_{i=0}^{n}|c_i-r_i||x^i|\\&<\frac{\varepsilon}{(n+1)A^n}(n+1)A^n\\&=\varepsilon.\end{aligned}$$

从而

$$\|p-p_0\|=\max_{x\in[a,b]}|p(x)-p_0(x)|<\varepsilon.\ 证毕.$$

例 4 $L^p[a,b]$ $(1\leqslant p<+\infty)$是可分空间.

证明 由推论 6.4.6 知，P 在 $L^p[a,b]$ 中稠密. 只须再证 P_0 (按 $L^p[a,b]$中的距离)在 P 中稠密. $\forall g\in P,\forall\varepsilon>0$，由于 P_0 (按 $C[a,b]$中的距离)在 P 中稠密，所以 $\exists g_0\in P_0$，使得

$$\max_{x\in[a,b]}|g(x)-g_0(x)|<\frac{\varepsilon}{(b-a)^{\frac{1}{p}}},$$

从而

$$\begin{aligned}\|g-g_0\|&=\left(\int_a^b|g(x)-g_0(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\\&\leqslant\max_{x\in[a,b]}|g(x)-g_0(x)|\cdot(b-a)^{\frac{1}{p}}<\varepsilon.\ 证毕.\end{aligned}$$

下面举两个不可分度量空间的例子.

例 5 有界数列空间 l^∞ 是不可分的.

证明 作 l^∞ 中的点集

$$D=\{x=(x_1,x_2,\cdots)\,|\,x_i\in\{0,1\},i=1,2,\cdots\},$$

由第二章推论 2.0.2 知, D 是不可数集. 假若 l^∞ 是可分的, 则存在可数子集 $\{y_k\}$ 在 l^∞ 中稠密, 从而 $\forall x\in D$, $O\left(x,\frac{1}{3}\right)\cap\{y_k\}\neq\varnothing$. 由于 D 不可数, $\{y_k\}$ 可数, 因此必有 $x',x''\in D(x'\neq x'')$ 及某个 $y_{k_0}\in\{y_k\}$, 使得 $y_{k_0}\in O\left(x',\frac{1}{3}\right)\cap O\left(x'',\frac{1}{3}\right)$. 但 D 中任意两个不同的点之间的距离为 1, 因此

$1=\rho(x',x'')\leqslant\rho(x',y_{k_0})+\rho(y_{k_0},x'')<\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$. 出现的矛盾说明 l^∞ 是不可分的. 证毕.

例 6 空间 $L^\infty(E)$ $(E\in\mathscr{L}_\nu,\nu\in\mathbb{N},mE>0)$ 是不可分的. 这可用类似于例 5 来证明(留作习题).

习 题 6.4

1. 证明多项式全体在 $C^{(k)}[a,b]$ 中稠密.

2. 设 X, Y 是度量空间, $f:X\to Y$ 是连续映射, A 在 X 中稠密, 证明 $f(A)$ 在 $f(X)$ 中稠密.

3. 设 A 是度量空间 X 中的可分集, 则必存在 A 的有限子集或可数子集 B, 使得 B 在 A 中稠密.

4. 证明空间 $L^\infty(E)$ $(E\in\mathscr{L}_\nu,\nu\in\mathbb{N},mE>0)$ 是不可分的.

5. 设 $B[a,b]$ 表示 $[a,b]$ 上实有界函数全体. $\forall f,g\in B[a,b]$, 规定距离为

$$\rho(f,g)=\sup_{a\leqslant t\leqslant b}|f(t)-g(t)|.$$

证明 $B[a,b]$ 不是可分空间.

6. 设 A 是度量空间 X 中的可分集, 则 A 的势不超过 $\aleph$.

§6.5 完 备 性

6.5.1 完备度量空间的概念及例

定义 6.5.1 度量空间(X,ρ)中的点列$\{x_n\}$叫做基本列或Cauchy 列，是指：$\forall\varepsilon>0$，$\exists$ 自然数 $N=N(\varepsilon)$，使当 n, $m\geqslant N$ 时，$\rho(x_n,x_m)<\varepsilon$.

度量空间X叫做完备的，是指X中的任一基本列都是收敛点列. 完备的赋范线性空间又称为Banach 空间. 如果X是度量空间，A是X的子空间，当A作为度量空间是完备的，就称A是X的完备子空间.

注 一个不完备的度量空间可以有完备的子空间. 例如，设 Q 是有理数全体按距离

$$\rho(r_1,r_2)=|r_1-r_2|\quad(\forall r_1,r_2\in\mathbf{Q})$$

所成的度量空间，由于有理数列$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}(n=1,2,\cdots)$是 Q 中的基本列，但它在 Q 中并不收敛，所以 Q 是不完备的. 用$\mathbf{Z}$表示整数全体，则$\mathbf{Z}$作为 Q 的子空间是完备的.

定理 6.5.1 设(X,ρ)是度量空间.

(1) X中的收敛点列是基本列.

(2) 如果X中的基本列$\{x_n\}$有子列$\{x_{n_k}\}$收敛于$x\in X$，则$\{x_n\}$也收敛于x.

(3) X中的任一完备子空间必是X的闭子集.

(4) 如果X是完备的，则X中的任一闭子集必是X的完备子空间.

证明 我们只证明(1)、(2)，其余留为习题.

(1) 设$\{x_n\}\subset X$，$x_n\to x\in X$. 由不等式

$$\rho(x_n, x_m) \leqslant \rho(x_n, x) + \rho(x_m, x) \quad (\forall n, m \in \mathbf{N})$$

立即可知$\{x_n\}$是X中的基本列.

(2) 设$\{x_n\}$是X中的基本列，则$\forall \varepsilon>0$，$\exists$自然数$N=N(\varepsilon)$，使当$n, m \geqslant N$时，$\rho(x_n, x_m)<\frac{\varepsilon}{2}$. 又因为$\{x_n\}$有子列$\{x_{n_k}\}$收敛于$x \in X$，所以$\exists$自然数$N'>N$，当$n_k \geqslant N'$时，$\rho(x_{n_k}, x)<\frac{\varepsilon}{2}$. 由此可知，当$n \geqslant N$时，任取$n_k \geqslant N'$，都有

$$\rho(x_n, x) \leqslant \rho(x_n, x_{n_k}) + \rho(x_{n_k}, x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

所以$x_n \to x$. 证毕.

例 1 一致离散的度量空间是完备的. 事实上，如果$\{x_n\}$是空间的基本列，由一致离散性可知必存在自然数N，当$n \geqslant N$时，$x_N = x_{N+1} = \cdots = x_{N+k} = \cdots$，因而$\{x_n\}$收敛于$x_N$，从而空间是完备的. 证毕

例 2 n维欧几里得空间R^n是Banach空间.

证明 设$\{x_m\} = \{(x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, \cdots, x_n^{(m)})\}$是$R^n$中的基本列，由于

$$|x_i^{(m)} - x_i^{(k)}| \leqslant \|x_m - x_k\| = \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j^{(m)} - x_j^{(k)}|^2\right)^{\frac{1}{2}}, i = 1, 2, \cdots,$$

$n, \forall m, k \in \mathbf{N}$,

所以，对每个i，$\{x_i^{(m)}\}$是基本数列，据数列的Cauchy收敛原理，$\{x_i^{(m)}\}$有极限$x_i^{(0)}$，记

$$x_0 = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \cdots, x_n^{(0)}), x_0 \in R^n.$$

因为

$$\lim_{m \to \infty} x_j^{(m)} = x_j^{(0)} (j = 1, 2, \cdots, n),$$

所以$\forall \varepsilon>0$，$\exists$自然数N_j，当$m \geqslant N_j$时，

$$|x_j^{(m)} - x_j^{(0)}| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}},$$

取 $N=\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n} N_j$，则当 $m\geqslant N$ 时，

$$|x_j^{(m)}-x_j^{(0)}|<\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} \quad (j=1,2,\cdots,n),$$

从而当 $m\geqslant N$ 时，

$$\|x_m-x_0\|=\left(\sum_{j=1}^{n}|x_j^{(m)}-x_j^{(0)}|^2\right)^{\frac{1}{2}}<\varepsilon.$$

因此 $x_m\to x_0$. 证毕.

例 3 $C[a,b]$是 Banach 空间.

证明 设$\{f_n\}$是 $C[a,b]$中的基本列，则$\forall\varepsilon>0$，$\exists$自然数 N，当 $n,m\geqslant N$ 时

$$\|f_n-f_m\|=\max_{t\in[a,b]}|f_n(t)-f_m(t)|<\varepsilon.$$

由一致收敛函数列的 Cauchy 准则知，$\{f_n(t)\}$ 在$[a,b]$上一致收敛于一连续函数 $f(t)$，即

$$f\in C[a,b], \text{且}\|f_n-f\|\to 0(n\to\infty).$$ 证毕.

例 4 空间 $C^{(k)}[a,b]$是 Banach 空间（可仿例 3 进行证明）.

例 5 空间 $L^p(E)(1\leqslant p<+\infty)$是 Banach 空间.

证明 设$\{f_n\}$是 $L^p(E)$中的基本列，于是$\forall\sigma>0$ 及$\forall\delta>0$，$\exists$自然数 $N=N(\sigma,\delta)$，使当 $n,m\geqslant N$ 时，有

$$\begin{aligned}\sigma^p\delta&>(\|f_n-f_m\|)^p=\int_E|f_n-f_m|^p dx\\&\geqslant\int_{E[|f_n-f_m|\geqslant\sigma]}|f_n-f_m|^p dx\geqslant\sigma^p m(E[|f_n-f_m|\geqslant\sigma]),\end{aligned}$$

即当 $n,m\geqslant N$ 时，$m(E[|f_n-f_m|\geqslant\sigma])<\delta$. 据第四章习题 4.2的第 5 题，$\{f_n(x)\}$在 E 上依测度收敛于一可测函数 $f(x)$，再据定理 4.2.3 的 4)(Riesz 定理)，必有$\{f_n\}$的子列$\{f_{n_i}\}$，使得 $f_{n_i}\xrightarrow{\text{a.e.}}f$于 E. 从而$\forall n\in\mathbb{N}$，有

$$|f_n-f_{n_i}|\xrightarrow{\text{a.e.}}|f_n-f| \text{ 于 } E \quad (i\to\infty).$$

另一方面，因$\{f_n\}$是$L^p(E)$中的基本列，所以$\forall \varepsilon>0$，∃自然数$N=N(\varepsilon)$，使当$n,m\geqslant N$时，

$$\|f_n-f_m\|<\varepsilon.$$

固定$n\geqslant N$，取$m=n_i$，据 Fatou 引理，就有

$$\begin{aligned}\varepsilon&\geqslant\underline{\lim}_{i\to\infty}\|f_n-f_{n_i}\|=\underline{\lim}_{i\to\infty}\left(\int_E|f_n-f_{n_i}|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\\&=\left(\underline{\lim}_{i\to\infty}\int_E|f_n-f_{n_i}|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\geqslant\left(\int_E\underline{\lim}_{i\to\infty}|f_n-f_{n_i}|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\\&=\left(\int_E|f_n-f|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

从而$f_N-f\in L^p(E)$，又因为$L^p(E)$是线性空间，所以

$$f=f_N-(f_N-f)\in L^p(E),$$

且$\|f_n-f\|\to 0(n\to\infty)$．证毕．

例 6 空间$l^\infty(E)$是 Banach 空间(证明留为习题)．

例 7 空间$l^p(1\leqslant p<+\infty)$是 Banach 空间．

证明 设$\{x_n\}=\{(\xi_1^{(n)},\xi_2^{(n)},\cdots)\}$是$l^p$中的基本列，则$\forall\varepsilon>0$，∃自然数$N$，当$n,m\geqslant N$时，有

$$\varepsilon>\|x_n-x_m\|=\left(\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i^{(n)}-\xi_i^{(m)}|^p\right)^{\frac{1}{p}}\geqslant|\xi_i^{(n)}-\xi_i^{(m)}|,$$

$$i=1,2,\cdots.$$

所以对每个i，$\{\xi_i^{(n)}\}$收敛，设

$$\lim_{n\to\infty}\xi_i^{(n)}=\xi_i,\ i=1,2,\cdots,$$

记$x=(\xi_1,\xi_2,\cdots)$．由上面的不等式知，$\forall$自然数k，有

$$\sum_{i=1}^{k}|\xi_i^{(n)}-\xi_i^{(m)}|^p<\varepsilon^p\quad(n,m\geqslant N).$$

固定 $n\geqslant N$，令 $m\to\infty$，就得到

$$\sum_{i=1}^{k}|\xi_i^{(n)}-\xi_i|^p\leqslant\varepsilon^p.$$

再令 $k\to\infty$，就得到

$$\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i^{(n)}-\xi_i|^p\leqslant\varepsilon^p\quad(\forall n\geqslant N).$$

从而 $x_N-x\in l^p$，又因为 l^p 是线性空间，所以

$x=x_N-(x_N-x)\in l^p$，且 $\|x_n-x\|\to 0(n\to\infty)$．证毕．

例 8 空间 l^∞ 是 Banach 空间(证明留为习题)．

下面的例子说明，空间之完备与否与其上的距离(或范数)紧密相关．

例 9 如果在线性空间 $C[a,b]$ 中赋以另一范数

$$\|f\|_1=\int_a^b|f(t)|dt\quad(\forall f\in C[a,b]),$$

即把 $C[a,b]$ 看成 $L^1[a,b]$ 的子空间，则 $(C[a,b],\|\cdot\|_1)$ 是不完备的赋范线性空间．事实上，$\forall c\in(a,b)$，例如取 $c=\frac{a+b}{2}$，令

$$f_n(t)=\operatorname{arc\,tg} n(t-c),\ t\in[a,b],\ n=1,2,\cdots.$$

则 $\{f_n\}\subset C[a,b]$，在 $[a,b]$ 上 $f_n(t)$ 处处收敛于函数

$$f(t)=\begin{cases}-\frac{\pi}{2}, & \text{当 } a\leqslant t<c \text{ 时},\\ 0, & \text{当 } t=c \text{ 时},\\ \frac{\pi}{2}, & \text{当 } c<t\leqslant b \text{ 时}.\end{cases}$$

显然 $f\in L^1[a,b]$，由 Lebesgue 有界收敛定理知，

$$\lim_{n\to\infty}\|f_n-f\|_1=\lim_{n\to\infty}\int_a^b|f_n(t)-f(t)|dt=0.$$

因此$\{f_n\}$是$(C[a,b],\|\cdot\|_1)$中的基本列，但因$f(t)$不可能对等[1]于$[a,b]$上的一个连续函数，故$\{f_n\}$在$(C[a,b],\|\cdot\|_1)$中并不收敛，所以$(C[a,b],\|\cdot\|_1)$是不完备的赋范线性空间.

6.5.2 完备度量空间的两个性质

定理6.5.2 设(X,ρ)是度量空间，$B_n=B(x_n,r_n)$是X中一列以x_n为中心以r_n为半径的闭球，则X是完备的$\Leftrightarrow$若$B_n\supset B_{n+1}$ $(n=1,2,\cdots)$，且$r_n\to 0(n\to\infty)$，则必有唯一的点$x_0\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}B_n$.

证明 "$\Rightarrow$"：$\forall\, n,m\in\mathbb{N}$，由$x_{n+m}\in B_n$知

$$\rho(x_{n+m},x_n)\leqslant r_n. \tag{6.5.1}$$

由于$r_n\to 0(n\to\infty)$，从而$\rho(x_{n+m},x_n)\to 0(n\to\infty)$，因此$\{x_n\}$是$X$中的基本列.由于空间$X$是完备的，所以必有$x_0\in X$，使得$x_n\to x_0$.再在(6.5.1)中令$m\to\infty$，根据距离函数的连续性得到

$$\rho(x_0,x_n)\leqslant r_n,\ n=1,2,\cdots.$$

因此 $x_0\in B_n,n=1,2,\ \cdots$，从而$x_0\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}B_n$.

如果又有X中的点$y_0\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}B_n$，则$\rho(y_0,x_n)\leqslant r_n,n=1,2,\cdots$，令$n\to\infty$，即得

$$\rho(y_0,x_0)=\lim_{n\to\infty}\rho(y_0,x_n)=0,$$

所以$y_0=x_0$，即$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}B_n$中只有一点.

"$\Leftarrow$"：设$\{x_n\}$是X中的基本列，由基本列的定义知，存在$n_1<n_2<\cdots<n_k<\cdots$（$n_k$为自然数），当$n,m\geqslant n_k$时，

---

① 关于函数对等的概念请见第四章第1节定义4.1.6.

$$\rho(x_n, x_m) < \frac{1}{2^{k+1}}.$$

在 X 中作一列闭球 $B\left(x_{n_k}, \frac{1}{2^k}\right)$, $k=1,2,\cdots$, 当 $y \in B\left(x_{n_{k+1}}, \frac{1}{2^{k+1}}\right)$时，由于

$$\rho(x_{n_k}, y) \leqslant \rho(x_{n_k}, x_{n_{k+1}}) + \rho(x_{n_{k+1}}, y)$$

$$< \frac{1}{2^{k+1}} + \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{2^k},$$

立即知道

$$B\left(x_{n_k}, \frac{1}{2^k}\right) \supset B\left(x_{n_{k+1}}, \frac{1}{2^{k+1}}\right), k=1,2,\cdots.$$

另一方面，$B\left(x_{n_k}, \frac{1}{2^k}\right)$的半径$\frac{1}{2^k} \to 0 (k \to \infty)$. 据假设必有唯一的点

$$x_0 \in \bigcap_{k=1}^{\infty} B\left(x_{n_k}, \frac{1}{2^k}\right),$$

从而 $\rho(x_{n_k}, x_0) \to 0 \quad (k \to \infty)$.

由定理 6.5.1 的(2)知，$\rho(x_n, x_0) \to 0 (n \to \infty)$. 所以 X 是完备的. 证毕.

定理 6.5.3(Baire) **完备度量空间必是第二纲集.**

证明 用反证法. 设 X 是完备的度量空间，而且是第一纲集，即 $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$, $M_n(n=1,2,\cdots)$是 X 中的疏朗集. 在 X 中任取一个闭球 $B(x_0, 1)$, 由于M_1 是疏朗的，据定理 6.4.8, 必有 X 中的闭球

$$B(x_1, r_1) \subset B(x_0, 1) \quad (0 < r_1 < 1),$$

使得 $B(x_1, r_1) \cap M_1 = \varnothing$; 同理由于 M_2 是疏朗的，必有 X 中的闭球

$$B(x_2,r_2)\subset B(x_1,r_1),$$

不妨取 $0<r_2<\frac{1}{2}$，使得

$$B(x_2,r_2)\cap M_2=\varnothing.$$

如此继续进行下去，就可以选得一列满足下述条件的非空闭球：

$$B(x_1,r_1)\supset B(x_2,r_2)\supset\cdots\supset B(x_n,r_n)\supset\cdots;$$

$$0<r_n<\frac{1}{n},n=1,2,\cdots.$$

$$B(x_n,r_n)\cap M_n=\varnothing,n=1,2,\cdots.$$

由定理 6.5.2 知，$\exists\ x_0\in\bigcap_{n=1}^{\infty}B(x_n,r_n)\subset X$. 因 $B(x_n,r_n)\cap M_n=\varnothing$，所以 $x_0\overline{\in}M_n$，$n=1,2,\cdots$，从而 $x_0\overline{\in}\bigcup_{n=1}^{\infty}M_n$，但 $\bigcup_{n=1}^{\infty}M_n=X$，这是矛盾，所以 X 不是第一纲集. 证毕.

6.5.3 度量空间的完备化

由有理数的 Cauchy 列构造实数是从不完备的度量空间扩张为完备空间的典型方法. 一般的度量空间，如果不是完备的，应用起来往往有困难. 例如方程解的存在性问题，在不完备的度量空间中解方程，即使近似解的序列是基本列，也不能保证这个序列有极限，从而也就不能保证方程在该空间有解. 但是我们可以把 Cauchy 序列作为一个新的点添入原来的空间而使之完备化.

定义 6.5.2 设 (X,ρ)、(X_1,ρ_1) 为两个度量空间. 如果存在 X 到 X_1 上的一一映射 φ，使得 $\forall x,y\in X$，成立

$$\rho(x,y)=\rho_1(\varphi x,\varphi y),$$

则称 φ 是 X 到 X_1 上的等距同构映射，并称 X 与 X_1 是等距同构的.

注 等距同构映射一定是拓扑映射.

显然,凡是等距同构的度量空间,它们的一切与距离相联系的性质都是一样的. 因此当我们只限于讨论与空间的距离有关的性质时,对彼此等距同构的度量空间可以不加区分,即可以把它们看作是一样的. 如果度量空间(X_1,ρ_1) 与另一个度量空间(X_2,ρ_2)的子空间(X_0,ρ_2)是等距同构的,我们就说(X_1,ρ_1)可以嵌入(X_2,ρ_2). 在上述意义下,我们认为(X_1,ρ_1)就是(X_2,ρ_2) 的一个子空间,并简单地记作$(X_1,\rho_1)\subset(X_2,\rho_2)$.

定义 6.5.3 设 X 是度量空间, 如果有完备的度量空间 X_1,使 X 等距同构于 X_1 的一个稠密子空间, 则称 X_1 是 X 的完备化空间.

定理 6.5.4 任一度量空间(X,ρ) 必存在完备化空间(X_1,ρ_1),且在等距同构的意义下,(X,ρ)的完备化空间是唯一确定的.

证明 分以下四步来论证:

(1) 构造度量空间(X_1,ρ_1). X 中的两个基本列$\{x_n\}$、$\{y_n\}$称为等价的,如果$\lim\limits_{n\to\infty}\rho(x_n,y_n)=0$. 将$X$ 中的全体基本列进行分类,凡是彼此等价的基本列归于同一类并且使同一类中的基本列彼此等价,如此得到的类称为等价类, 于是 X 中的全体基本列被分成了一族互不相交的等价类, 记这些等价类全体为 X_1(即每一个等价类是 X_1 中的一个元素). $\forall\ \xi,\eta\in X_1$,任取$\{x_n\}\in\xi$,$\{y_n\}\in\eta$, 令

$$\rho_1(\xi,\eta)=\lim_{n\to\infty}\rho(x_n,y_n). \tag{6.5.2}$$

我们要证明 $\rho_1(\xi,\eta)$ 在 X_1 上有确定的意义, 而且是 X_1 上的距离.

事实上,由于$\{x_n\}$、$\{y_n\}$是 X 中的基本列,据定理 6.1.2的注,

$$|\rho(x_n,y_n)-\rho(x_m,y_m)|\leqslant\rho(x_n,x_m)+\rho(y_n,y_m)\to0$$
$$(n,m\to\infty).$$

所以$\{\rho(x_n,y_n)\}$是基本数列，由 Cauchy 收敛准则知，数列$\{\rho(x_n,y_n)\}$存在有限的极限.

如果另取$\{x'_n\}\in\xi$，$\{y'_n\}\in\eta$，即$\{x'_n\}$与$\{x_n\}$等价，$\{y'_n\}$与$\{y_n\}$等价，由于

$$|\rho(x_n,y_n)-\rho(x'_n,y'_n)|\leqslant\rho(x_n,x'_n)+\rho(y_n,y'_n)\to 0\,(n\to\infty),$$

从而

$$\lim_{n\to\infty}\rho(x_n,y_n)=\lim_{n\to\infty}\rho(x'_n,y'_n).$$

即 $\rho_1(\xi,\eta)$的值仅依赖ξ,η而与$\{x_n\}$、$\{y_n\}$在ξ、η中的选取无关. 所以$\rho_1(\xi,\eta)$在X_1上有确定的意义.

显然，由(6.5.2)式定义的ρ_1满足距离的条件(1)和(2). 下面证明ρ_1满足三角不等式. $\forall\xi,\eta,\ \zeta\in X_1$，任取$\{x_n\}\in\xi$，$\{y_n\}\in\eta$，$\{z_n\}\in\zeta$，则

$$\begin{aligned}\rho_1(\xi,\eta)&=\lim_{n\to\infty}\rho(x_n,y_n)\\&\leqslant\lim_{n\to\infty}[\rho(x_n,z_n)+\rho(z_n,y_n)]\\&=\lim_{n\to\infty}\rho(x_n,z_n)+\lim_{n\to\infty}\rho(z_n,y_n)\\&=\rho_1(\xi,\zeta)+\rho_1(\zeta,\eta).\end{aligned}$$

因此X_1按照(6.5.2)式定义的距离ρ_1成为一个度量空间.

(2) 证明在X_1中存在稠密子空间X_0，使得X与X_0等距同构.

$\forall x\in X$，常驻列$\{x,x,x,\cdots\}$显然是X中的基本列，用$\xi_x\in X_1$表示包含常驻列$\{x,x,x,\cdots\}$的等价类，记$X_0=\{\xi_x\in X_1\,|\,x\in X\}$，则$X_0\subset X_1$. 作$X$到$X_0$上的映射$\varphi$，使$\forall x\in X$，$\varphi x=\xi_x$. 显然$\varphi$是$X$到$X_0$上的一一映射，且$\forall x,y\in X$，成立

$$\rho(x,y)=\rho_1(\varphi x,\varphi y).$$

因此(X,ρ)与(X_0,ρ_1)是等距同构的.

现在证明子空间 X_0 在 X_1 中稠密. $\forall \xi \in X_1$，任取 $\{x_n\} \in \xi$，考虑 X_0 中的点列 $\{\xi_{x_n}\}$. 由于 $\{x_n\}$ 是 X 中的基本列，所以 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists$ 自然数 N，当 $n, m \geqslant N$ 时，有 $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$. 因此当 $n \geqslant N$ 时，有

$$\rho_1(\xi_{x_n}, \xi) = \lim_{m \to \infty} \rho(x_n, x_m) \leqslant \varepsilon.$$

从而

$$\lim_{n \to \infty} \rho_1(\xi_{x_n}, \xi) = 0. \tag{6.5.3}$$

所以 X_0 在 X_1 中稠密.

(3) 证明 (X_1, ρ_1) 是完备的. 设 $\{\xi_n\}$ 是 X_1 中的基本列，则 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists$ 自然数 $N > \frac{3}{\varepsilon}$，使得 $n, m \geqslant N$ 时，$\rho_1(\xi_n, \xi_m) < \frac{\varepsilon}{3}$. 由于 X_0 在 X_1 中稠密，所以

$$\forall n \in \mathbf{N},$$

$$X_0 \cap O\left(\xi_n, \frac{1}{n}\right) \neq \varnothing,$$

取 $\xi_{x_n} \in X_0 \cap O\left(\xi_n, \frac{1}{n}\right)$，则

$$\rho_1(\xi_{x_n}, \xi_n) < \frac{1}{n} \quad (\forall n \in \mathbf{N}). \tag{6.5.4}$$

于是当 $n, m \geqslant N$ 时，

$$\begin{aligned}
\rho(x_n, x_m) &= \rho_1(\xi_{x_n}, \xi_{x_m}) \\
&\leqslant \rho_1(\xi_{x_n}, \xi_n) + \rho_1(\xi_n, \xi_m) + \rho_1(\xi_{x_m}, \xi_m) \\
&< \frac{1}{n} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{1}{m} < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,
\end{aligned}$$

所以 $\{x_n\}$ 是 X 中的基本列. 设 $\xi \in X_1$ 是包含 $\{x_n\}$ 的等价类，由 (6.5.3) 式知

$$\lim_{n \to \infty} \rho_1(\xi_{x_n}, \xi) = 0.$$

又由 (6.5.4) 式得到

$$\rho_1(\xi_n, \xi) \leqslant \rho_1(\xi_{x_n}, \xi_n) + \rho_1(\xi_{x_n}, \xi) \to 0 \quad (n \to \infty),$$

即$\xi_n\to\xi$. 因此(X_1,ρ_1)是完备的度量空间.

以上三步说明,(X_1,ρ_1)是(X,ρ)的完备化空间.

(4) 证明(X,ρ)的完备化空间(X_1,ρ_1)在等距同构的意义下是唯一确定的. 即如果(X,ρ)还有另一个完备化空间(X',ρ'),则(X_1,ρ_1)必与(X',ρ')等距同构.

$\forall\xi\in X_1$,由于X_0在X_1中稠密,则有$\{\xi_n\}\subset X_0$,使

$$\lim_{n\to\infty}\rho_1(\xi_n,\xi)=0,$$

于是$\{\xi_n\}$是X_0中的基本列. 设(X,ρ)与(X',ρ')的稠密子空间(X_0',ρ')等距同构,由于(X_0,ρ_1)与(X,ρ)等距同构,从而(X_0,ρ_1)与(X_0',ρ')等距同构. 设T_0是X_0到X_0'上的等距同构映射,则

$$\rho'(T_0\xi_n,T_0\xi_m)=\rho_1(\xi_n,\xi_m)\to 0\quad(n,m\to\infty),$$

所以$\{T_0\xi_n\}$是X_0'中的基本列,从而也是X'中的基本列,于是$\exists\xi'\in X'$,使

$$\lim_{n\to\infty}\rho'(T_0\xi_n,\xi')=0.$$

易知当X_1中的ξ给定时,X'中的ξ'是唯一确定的且与$\{\xi_n\}$在X_0中的取法无关. 令T: $\xi\mapsto\xi'$,则T是X_1到X'的映射. 下面证明T是满射. $\forall\eta'\in X'$,由于X_0'在X'中稠密,则有$\{\eta_n'\}\subset X_0'$,使

$$\lim_{n\to\infty}\rho'(\eta_n',\eta')=0.$$

于是$\{\eta_n'\}$是X_0'中的基本列. 由于T_0^{-1}是X_0'到X_0上的等距同构映射,所以$\{T_0^{-1}\eta_n'\}$是X_0中的基本列. 从而也是X_1中的基本列,于是$\exists\eta\in X_1$,使

$$\lim_{n\to\infty}\rho_1(T_0^{-1}\eta_n',\eta)=0.$$

再由映射T的定义就知道,η就是η'在T之下的原象. 因此T是满射. 记$\eta_n=T_0^{-1}\eta_n'$,则$T_0\eta_n=\eta_n'(n=1,2,\cdots)$. 由定理 6.1.2

还可以得到

$$\begin{aligned}\rho_1(\xi,\eta)&=\lim_{n\to\infty}\rho_1(\xi_n,\eta_n)\\&=\lim_{n\to\infty}\rho'(T_0\xi_n,T_0\eta_n)\\&=\rho'(\xi',\eta')=\rho'(T\xi,T\eta).\end{aligned}$$

因此 T 是(X_1,ρ_1)到(X',ρ') 上的等距同构映射，即(X_1,ρ_1)与(X',ρ')等距同构．证毕．

如果我们把两个等距同构的度量空间不加以区别，视为同一个空间，那末定理 6.5.4 可改述为：

定理6.5.4′　任一度量空间 X 必存在唯一的完备化空间 X_1，使 X 为 X_1 的稠密子空间．

注 6.5.5　由于任何赋范线性空间 X 按其范数所导出的距离是度量空间，从而必有完备化空间 X_1，在 X_1 上适当地定义线性运算和范数，X_1 便成为一个完备的赋范线性空间，即 Banach 空间．因此，任一赋范线性空间 X，必有一 Banach 空间 X_1，使 X_1 为 X 的完备化空间．

例 10　设$\mathbf{Q}$是有理数全体按距离 $\rho(r_1,r_2)=|r_1-r_2|$所成的度量空间，它是不完备的．它的完备化空间就是实数全体按距离 $\rho(x,y)=|x-y|$所成之度量空间，即一维实欧几里得空间 $\mathbf{R}^1$．

例 11　设 $P[a,b]$是$[a,b]$上多项式全体按距离

$$\rho(x,y)=\max_{a\le t\le b}|x(t)-y(t)|$$

所成之度量空间，它是不完备的．它的完备化空间就是$C[a,b]$．

例 12　$C[a,b]$按照范数

$$\|f\|_1=\int_a^b|f(t)|dt$$

所成之赋范线性空间是不完备的(见本节例 9)，它的完备化空间是 $L^1[a,b]$．

习 题 6.5

1. 证明度量空间 X 中的基本列是有界的.

2. 证明定理 6.5.1 的(3)、(4).

3. 证明 § 6.2 例 5 中的空间 $C^{(k)}[a,b]$ 是 Banach 空间.

4. 证明 § 6.2 例 6 中的空间 l^∞ 是 Banach 空间.

5. 设 c 是 l^∞ 中收敛数列 $x=\{x_i\}$ 全体所成的子空间，证明 c 是 Banach 空间.

6. 证明 § 6.2 例 9 中的空间 $L^\infty(E)$ 是 Banach 空间.

7. 证明 § 6.2 例 7 中的空间 $V[a,b]$ 是 Banach 空间.

8. 证明 § 6.1 例 3 中的空间 s 是完备的度量空间.

9. 证明 § 6.1 例 4 中的空间 $S(E)$ 是完备的度量空间.

10. 设 $\{F_n\}$ $(n=1,2,\cdots)$ 是完备度量空间 X 中一列单调下降闭集，且 F_n 的直径 $d(F_n)\to 0$ $(n\to\infty)$，则 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}F_n\neq\varnothing$.

11. 设 X 是完备的度量空间，$A_n(n=1,2,\cdots)$ 是 X 中一列稠密的开集. 证明 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n$ 也是 X 的稠密集.

12. 证明 $C^{(k)}[0,1]$ 按 $C[0,1]$ 的距离的完备化空间是 $C[0,1]$.

13. 设 F 是只有有限项不为 0 的实数列 $\{x_i\}$ 的全体，在 F 中引进距离

$$\rho(x,y)=\sup_{i\geq 1}|x_i-y_i| \quad (\forall x=\{x_i\},y=\{y_i\}\in F).$$

求证 (F,ρ) 不完备，并指出它的完备化空间.

14. 求证：$[0,1]$ 上的多项式全体 $P[0,1]$ 按距离

$$\rho(p,q)=\int_0^1|p(x)-q(x)|dx \quad (\forall p,q\in P[0,1])$$

所成的度量空间是不完备的，并指出它的完备化空间.

§ 6.6 压缩映射原理

6.6.1 压缩映射原理

本节介绍完备度量空间上的一个简单而基本的不动点定理

——压缩映射原理，它不仅可用以证明各类方程（代数方程、微分方程、积分方程、泛函方程）解的存在性和唯一性，而且可用以得出近似解.

定义 6.6.1 设(X,ρ)是度量空间，T 是 X 到 X 的映射，如果存在数 $\alpha\in[0,1)$，使得

$$\rho(Tx,Ty)\leqslant\alpha\rho(x,y)\quad(\forall x,y\in X),\qquad(6.6.1)$$

则称 T 是 X 上的一个压缩映射.

注 1 当 $\alpha=0$ 时，T 映 X 成 X 中一点.

注 2 压缩映射 T 是连续的.

事实上，$\forall x\in X$，$\forall\{x_n\}\subset X$，则

$$\rho(Tx_n,Tx)\leqslant\alpha\rho(x_n,x)\quad(\forall n\in\mathbb{N}),$$

从而当 $x_n\to x$ 时，有 $Tx_n\to Tx$.

定义 6.6.2 设 X 为一集，T 是 X 到 X 的映射. 如果有 $x^*\in X$，使得 $Tx^*=x^*$，就称 x^* 为映射 T 的一个不动点.

设 T 是集 X 到 X 的映射，T^2 表示 $x\mapsto TTx$，如此可以逐次定义映射 T^n，$n=2,3,\cdots$.

定理 6.6.1 **（Banach 不动点定理） 设(X,ρ)是完备的度量空间，T 是 X 上的压缩映射，则 T 必有唯一的不动点.**

证明 先证 T 存在不动点. 任取 $x_0\in X$，令

$$x_1=Tx_0,x_2=Tx_1=T^2x_0,\cdots,$$

$$x_n=Tx_{n-1}=\cdots=T^nx_0,\cdots.$$

这样就得到 X 中的一个点列$\{x_n\}$，如果能证明$\{x_n\}$是 X 中的基本列，则由 X 的完备性知，$\exists x^*\in X$，使 $x_n\to x^*$. 又因 T 是连续映射，故在 $Tx_n=x_{n+1}$ 中令 $n\to\infty$，便得 $Tx^*=x^*$，因此 x^* 是 T 的不动点.

现在证明$\{x_n\}$是基本列. 由于 T 是压缩映射，所以有

$$\rho(x_{n+1},x_n)=\rho(Tx_n,Tx_{n-1})\leqslant\alpha\rho(x_n,x_{n-1})(\forall n\in\mathbb{N}).(6.6.2)$$

由此递推之，可得

$$\rho(x_{n+1},x_n)\leqslant\alpha^n\rho(x_1,x_0)\quad(\forall n\in\mathrm{N}),\tag{6.6.3}$$

于是，$\forall p\in\mathrm{N}$，由三角不等式及(6.6.3)式得到

$$\begin{aligned}\rho(x_{n+p},x_n)&\leqslant\rho(x_{n+p},x_{n+p-1})+\rho(x_{n+p-1},x_{n+p-2})\\&\quad+\cdots+\rho(x_{n+1},x_n)\\&\leqslant(\alpha^{n+p-1}+\alpha^{n+p-2}+\cdots+\alpha^n)\rho(x_1,x_0)\\&=\frac{\alpha^n-\alpha^{n+p}}{1-\alpha}\rho(x_1,x_0)\\&\leqslant\frac{\alpha^n}{1-\alpha}\rho(x_1,x_0).\end{aligned}\tag{6.6.4}$$

由于 $0\leqslant\alpha<1$，所以 $\{x_n\}$ 是 X 中的基本列.

再证不动点的唯一性. 设 x' 也是 T 的不动点，即 $x'=Tx'$. 于是必有

$$\rho(x^*,x')=\rho(Tx^*,Tx')\leqslant\alpha\rho(x^*,x')$$

由于 $0\leqslant\alpha<1$，欲要上式成立，必须 $\rho(x^*,x')=0$，即 $x'=x^*$. 证毕.

注 定理 6.6.1 的证明同时为我们提供了求不动点的方法——迭代法，即在完备的度量空间 X 中任取一点 x_0，逐次作点列 $x_n=T^nx_0$, $n=1,2,\cdots$，此点列必收敛到方程 $Tx=x$ 的解. 这种方法也称为逐次逼近法. 如果在(6.6.4)中令 $p\to\infty$，就得到

$$\rho(x^*,x_n)\leqslant\frac{\alpha^n}{1-\alpha}\rho(x_1,x_0)\quad(n=0,1,2\cdots).\tag{6.6.5}$$

推论 6.6.2 设 X 是完备的度量空间，$T:X\to X$ 是一射映. 如果存在一个自然数 n，使得 T^n 是 X 上的一个压缩映射，则 T 在 X 中必有唯一不动点.

证明 由于 T^n 是 X 上的压缩映射，由定理 6.6.1 知 T^n 有唯一不动点 $x^*\in X$，即 $T^nx^*=x^*$，从而

$$T^n(Tx^*)=T(T^nx^*)=Tx^*,$$

所以 Tx^* 也是 T^n 的不动点. 由 T^n 的不动点的唯一性知, $Tx^*=x^*$,即 x^* 也是 T 的不动点. 此外, 由于 T 的不动点也是 T^n 的不动点,故由 T^n 不动点的唯一性, 即知 T 的不动点也是唯一的. 证毕.

6.6.2 压缩映射原理的应用

Banach 不动点定理 (即压缩映射原理)有许多重要的推广和应用,限于篇幅,下面我们只列举它在数学分析和常微分方程中的两个比较简单的应用.

例 1 隐函数存在定理 设函数 $f(x,y)$在条形闭区域

$$D=\{(x,y)\,|\,a\leqslant x\leqslant b,\ -\infty<y<+\infty\}$$

上处处连续, 且处处有关于 y 的偏导数 $f'_y(x,y)$, 而且有正常数 $m<M$,使得在区域 D 中

$$0<m\leqslant f'_y(x,y)\leqslant M, \tag{6.6.6}$$

则方程 $f(x,y)=0$ 在闭区间$[a,b]$上必有唯一的连续解 $y=\varphi(x)$.

证明 作完备空间 $C[a,b]$中的映射

$$(T\varphi)(x)=\varphi(x)-\frac{1}{M}f(x,\varphi(x)),\ \forall\varphi\in C[a,b].$$

显然, T 是 $C[a,b]$到 $C[a,b]$的映射. 现证 T 是压缩映射. $\forall\varphi_1$, $\varphi_2\in C[a,b]$,由微分中值定理,有 $0<\theta<1$,使得

$$\begin{aligned}
&|(T\varphi_2)(x)-(T\varphi_1)(x)|\\
=&\left|\varphi_2(x)-\frac{1}{M}f(x,\varphi_2(x))-\varphi_1(x)+\frac{1}{M}f(x,\varphi_1(x))\right|\\
=&\Big|\varphi_2(x)-\varphi_1(x)-\frac{1}{M}f'_y[x,\varphi_1(x)+\theta(\varphi_2(x)-\varphi_1(x))]\\
&(\varphi_2(x)-\varphi_1(x))\Big|\\
\leqslant&|\varphi_2(x)-\varphi_1(x)|\left(1-\frac{m}{M}\right).
\end{aligned}$$

由于 $0<\frac{m}{M}<1$，所以 $0<1-\frac{m}{M}<1$，令 $\alpha=1-\frac{m}{M}$，便有

$$|(T\varphi_2)(x)-(T\varphi_1)(x)|\leqslant\alpha|\varphi_2(x)-\varphi_1(x)|,$$

从而

$$\|T\varphi_2-T\varphi_1\|\leqslant\alpha\|\varphi_2-\varphi_1\| \quad (0<\alpha<1),$$

所以 T 是 $C[a,b]$上的压缩映射．由定理 6.6.1 知，有唯一的 $\varphi\in C[a,b]$，使得 $T\varphi=\varphi$，即

$$f(x,\varphi(x))\equiv 0,\ a\leqslant x\leqslant b.$$ 证毕．

例 2　常微分方程解的存在性和唯一性定理　**设** $f(x,y)$**在闭矩形区域**

$$D=\{(x,y)\mid |x-x_0|\leqslant a,\ |y-y_0|\leqslant b\}$$

上连续且关于 y **满足** Lipschitz **条件，即有常数**$L>0$，**使** $\forall(x,y_1)$，$(x,y_2)\in D$，**有**

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\leqslant L|y_1-y_2|,$$

则方程

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y) \tag{6.6.7}$$

在$[x_0-h,x_0+h]$**上存在唯一的满足初始条件** $y|_{x=x_0}=y_0$ **的解** $y=\varphi(x)$，**其中**

$$0<h<\min\left(a,\frac{b}{M},\ \frac{1}{L}\right),\ M=\max_{(x,y)\in D}|f(x,y)|.$$

证明　显然，方程(6.6.7)加上初始条件 $y|_{x=x_0}=y_0$ 等价于积分方程

$$\varphi(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(t,\varphi(t))dt. \tag{6.6.8}$$

因此，只要证明积分方程(6.6.8)在$[x_0-h,x_0+h]$上有唯一的连续解即可．作完备空间 $C[x_0-h,x_0+h]$中的闭球

$$B=B(y_0,b)=\{\varphi\mid\varphi\in C[x_0-h,x_0+h],\ \|\varphi-y_0\|\leqslant b\},$$

则 B 是 $C[x_0-h, x_0+h]$的完备子空间．令

$$(T\varphi)(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(t,\varphi(t))dt \quad (\forall\varphi\in B), \qquad (6.6.9)$$

则 T 是 B 到 B 的映射．事实上，$\forall\varphi\in B$，显然 $T\varphi\in C[x_0-h, x_0-h]$，而且

$$\begin{aligned}\|T\varphi-y_0\| &= \max_{|x-x_0|\leqslant h} |(T\varphi)(x)-y_0| \\ &= \max_{|x-x_0|\leqslant h} \left|\int_{x_0}^{x} f(t,\varphi(t))dt\right| \leqslant Mh \\ &\leqslant b,\end{aligned}$$

即 $T\varphi\in B$.

再证 T 是 B 上的压缩映射．$\forall\varphi_1,\varphi_2\in B$，则

$$\begin{aligned}\|T\varphi_1-T\varphi_2\| &= \max_{|x-x_0|\leqslant h} \left|\int_{x_0}^{x} [f(t,\varphi_1(t)) \right. \\ &\quad \left. -f(t,\varphi_2(t))]dt\right| \\ &\leqslant \max_{|x-x_0|\leqslant h} \left|\int_{x_0}^{x} L|\varphi_1(t)-\varphi_2(t)|dt\right| \\ &\leqslant Lh\|\varphi_1-\varphi_2\|.\end{aligned}$$

由于 $0<Lh<1$，所以 T 是 B 上的压缩映射．由定理 6.6.1 知，存在唯一的 $\varphi\in B$，使 $T\varphi=\varphi$，即积分方程(6.6.8)在 $[x_0-h, x_0+h]$ 上有唯一的连续解 $y=\varphi(x)$. 证毕.

习 题 6.6

1．设 F 是 n 维欧几里得空间 (R^n,ρ) 中的有界闭集，映射 $T: F\longrightarrow F$ 满足：$\rho(Tx,Ty)<\rho(x,y)$ $(\forall x, y\in F, x\neq y)$．求证 T 在 F 中存在唯一的不动点.

2．设 (X,ρ) 是完备度量空间，T 是 X 到 X 的映射，记

$$\alpha_n=\sup_{\substack{x,x'\in X\\ x\neq x'}} \frac{\rho(T^n x, T^n x')}{\rho(x,x')} \quad (n=1,2,\cdots).$$

若 $\inf\limits_n \alpha_n<1$，则T有唯一的不动点.

3. 设$a_{jk}, j,k=1,2,\cdots,n$为一组实数，适合条件

$$\sum_{j,k=1}^{n}(a_{jk}-\delta_{jk})^2<1,$$

其中δ_{jk}当$j=k$时为1，否则为0，则代数方程组

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

对任何一组有序实数$(b_1,b_2,\cdots,b_n)$，必有唯一的解$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$.

4. 对于积分方程

$$x(t)-\lambda\int_0^1 e^{t-s}x(s)\,ds=y(t),$$

其中$y(t)\in C[0,1]$为一给定函数，λ为常数，$|\lambda|<1$，求证方程存在唯一解$x(t)\in C[0,1]$.

5. 设$f(t)\in C[0,1]$，求出方程

$$x(t)=f(t)+\lambda\int_0^t x(s)\,ds\quad(t\in[0,1])$$

的连续解.

§6.7 列 紧 性

6.7.1 列紧集和完全有界集

在有限维欧几里得空间中，任一有界点列必有收敛子列，但这个性质不能推广到一般的度量空间.

例1 在$C[0,1]$上，考察点列

$$x_n(t)=\begin{cases}0, & t>\dfrac{1}{n},\\ 1-nt, & t\leqslant\dfrac{1}{n},\end{cases}\qquad(n=1,2,\cdots).$$

由于$\|x_n\|=\max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}|x_n(t)|\leqslant 1\ (n=1,2,\cdots)$，所以$\{x_n\}$是$C[0,1]$中

的有界点列，但$\{x_n\}$不可能有子列在$C[0,1]$中收敛．因为如果有$\{x_{n_k}(t)\}$在$C[0,1]$中依范数收敛于$x(t)$，应有

$$x(t)=\lim_{k\to\infty}x_{n_k}(t)=\begin{cases}1, & t=0,\\ 0, & t\neq 0.\end{cases}$$

这和$x(t)$应在$t=0$点连续矛盾．

因此，在一般的度量空间中，每一个有界点列并不都有收敛子列．这就有必要引入下面的概念．

定义 6.7.1 设X是度量空间，$A\subset X$．如果A中任一点列必有在X中收敛的子列，就称A是列紧集或相对紧集．如果A中任一点列必有收敛于A中一点的子列，就称A是自列紧集．如果空间X自身是列紧的，就称X是列紧度量空间或简称列紧空间．

从定义 6.7.1 可以得到

定理 6.7.1 **设(X,ρ)是度量空间．**

(1) $A\subset X$是自列紧集$\Leftrightarrow$ A是列紧的闭集．

(2) X中的有限点集是自列紧集．

(3) X中有限个(自)列紧集的并集是(自)列紧集．

(4) X中(自)列紧集的任何(闭)子集是(自)列紧集．

(5) X中的列紧集中的基本列必然收敛．

(6) $A\subset X$是列紧集$\Leftrightarrow$ $\bar{A}$是自列紧的．

证明 (1)—(5)是显然的．现在证明(6)．"$\Leftarrow$"：由(1)和(4)即知．

"$\Rightarrow$"：$\forall\{x_n\}\subset\bar{A}$，取$y_n\in O\left(x_n,\ \dfrac{1}{n}\right)\cap A$ $(n=1,2,\cdots)$，则$\{y_n\}\subset A$，且$\rho(x_n,y_n)<\dfrac{1}{n}$ $(n=1,2,\cdots)$．因A是列紧集，于是有$\{y_n\}$的子列$\{y_{n_k}\}$及$y\in X$，使

$$\rho(y_{n_k},y)\to 0\quad(k\to\infty).$$

由于

$$\rho(x_{n_k}, y) \leqslant \rho(x_{n_k}, y_{n_k}) + \rho(y_{n_k}, y)$$
$$\leqslant \frac{1}{n_k} + \rho(y_{n_k}, y) \to 0 (k \to \infty),$$

从而 $x_{n_k} \to y(k \to \infty)$. 又 $\bar{A}$ 是闭集,所以$y \in \bar{A}$, 因此 $\bar{A}$是自列紧集. 证毕.

注 由定理 6.7.1 的(5)知,列紧空间是完备的; 度量空间 X 中的自列紧集作为 X 的子空间是完备的.

定理 6.7.2 R^n 中的有界集是列紧集, 有界闭集是自列紧集.

证明 见第二章定理 2.1.6 (Bolzano-Weierstrass 定理) 的证明.

定义 6.7.2 设(X, ρ)是度量空间, $A, B \subset X$, ε 是一个正数. 如果 $\forall x \in A$, $\exists y \in B$, 使得 $\rho(x, y) < \varepsilon$, 则称 B 是 A 的一个 ε-网. 如果 $\forall \varepsilon > 0$, 点集 A 总有有限的 ε-网$\{x_1, x_2, \cdots, x_n\} \subset X$ (这些点和它们的个数可以随 ε 而变), 则称 A 是完全有界集.

定理 6.7.3 设(X, ρ)是度量空间.

(1) X 中的完全有界集是有界的.

(2) 设 A 为 X 中的完全有界集, 则 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists$ 有限集 $A_0 \subset A$, 使得 A_0 是 A 的有限 ε-网.

(3) X 中的完全有界集是可分的.

证明 (1) 设 $A \subset X$ 是完全有界集, 取 $\varepsilon = 1$, 并设$\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$是 A 的一个 1-网, 则 $\forall x \in A$, 有 $x_k (1 \leqslant k \leqslant n)$使$\rho(x, x_k) < 1$, 从而

$$\rho(x, x_1) \leqslant \rho(x, x_k) + \rho(x_k, x_1) < 1 + \max_{1 < k \leqslant n} \rho(x_k, x_1).$$

令 $r = 1 + \max\limits_{1 < k \leqslant n} \rho(x_k, x_1)$, 则 $A \subset O(x_1, r)$, 因此 A 是有界集.

(2) 由于 A 是 X 中的完全有界集, 所以 $\forall \varepsilon > 0$, A 有有限的

$\frac{\varepsilon}{2}$-网 $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\} \subset X$. 任取 $y_k \in A \cap O\left(x_k, \frac{\varepsilon}{2}\right)(k=1,2,\cdots,n)$, 则 $\{y_1, y_2, \cdots, y_n\} \subset A$ 且为 A 的有限 ε-网.

(3) 设 $A \subset X$ 是完全有界集, 并设 B_n 是 A 的有限 $\frac{1}{n}$-网 ($n=1,2,\cdots$). 因为每个 B_n 都是有限集, 所以它们的并集

$$B=\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$$

是有限集或可数集. $\forall x \in A$, $\exists x_n \in B_n$, 使

$$\rho(x, x_n)<\frac{1}{n} \quad (n=1,2,\cdots),$$

从而 B 中的点列 $\{x_n\}$ 收敛于 x, 据定理 6.4.1 的(2), B 在 A 中稠密. 因此 A 是可分的. 证毕.

定理 6.7.4 设 (X, ρ) 是度量空间. $A \subset X$ 是完全有界集 $\Leftrightarrow$ A 中任一点列 $\{x_n\}$ 必有一个子列是基本列.

证明 "$\Leftarrow$": 反证法. 假设 A 不是完全有界集, 则 $\exists \varepsilon_0>0$, 使 A 没有有限的 ε_0-网. 任取 $x_1 \in A$, 则 $A-O(x_1, \varepsilon_0) \neq \varnothing$, 否则 $\{x_1\}$ 就是 A 的有限 ε_0-网. 任取 $x_2 \in A-O(x_1, \varepsilon_0)$, 则 $A-\bigcup_{i=1}^{2} O(x_i, \varepsilon_0) \neq \varnothing$, 否则 $\{x_1, x_2\}$ 就是 A 的有限 ε_0-网. 这样一直进行下去, 就得到 A 中的一个点列 $\{x_n\}$, 适合 $\rho(x_n, x_m) \geqslant \varepsilon_0 (n \neq m)$. 显然 $\{x_n\}$ 的任何子列都不是基本列, 这和已知条件矛盾.

"$\Rightarrow$": 设 $\{x_n\}$ 是 A 中任一点列. 首先证明, $\forall \varepsilon>0$, $\{x_n\}$ 必有子列 $\{x_{n_i}\}$, 其直径

$$d(\{x_{n_i}\})=\sup_{i, j \in N} \rho(x_{n_i}, x_{n_j}) \leqslant \varepsilon.$$

事实上, 因 $A \subset X$ 是完全有界集, 从而 A 有有限的 $\frac{\varepsilon}{2}$-网 $\{y_1, y_2, \cdots, y_k\}$, 即

$$\bigcup_{i=1}^{k} O\left(y_i, \frac{\varepsilon}{2}\right) \supset A \supset \{x_n\}.$$

因此，在覆盖 A 的这有限个球中至少有一个球含有 $\{x_n\}$ 中无限多项，这无限多项所成的子列 $\{x_{n_i}\}$ 的直径显然不大于 ε .

再证 $\{x_n\}$ 有子列是基本列. 由上面所证事实，$\{x_n\}$ 有直径不大于 1 的子列 $\{x_n^{(1)}\}$；同理 $\{x_n^{(1)}\}$ 又有直径不大于 $\frac{1}{2}$ 的子列 $\{x_n^{(2)}\}$，如此一直继续下去，就得到 $\{x_n\}$ 的可数个子列 $\{x_n^{(k)}\}$ $(k=1, 2, \cdots)$，适合 $\{x_n^{(k)}\} \supset \{x_n^{(k+1)}\}$ $(k=1, 2, \cdots)$ 且

$$d(\{x_n^{(k)}\}) = \sup_{n, m} \rho(x_n^{(k)}, x_m^{(k)}) \leqslant \frac{1}{k}$$

$$(k=1, 2, \cdots).$$

考虑"对角线"序列 $\{x_n^{(n)}\}$，显然 $\{x_n^{(n)}\}$ 是 $\{x_n\}$ 的子列，且当 $m>n$ 时，有

$$\rho(x_n^{(n)}, x_m^{(m)}) \leqslant \frac{1}{n} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

因此 $\{x_n^{(n)}\}$ 是基本列. 证毕.

下面讨论完全有界集和列紧集的关系.

定理 6.7.5 (Hausdorff) (1) **度量空间 X 中的列紧集是完全有界集.** (2) **完备度量空间 X 中的完全有界集是列紧集.**

证明 (1) 设 A 是度量空间 X 中的列紧集，则 A 中任何点列 $\{x_n\}$ 必有收敛子列，而收敛点列是基本列，据定理 6.7.4，A 是完全有界集.

(2) 设 A 是完备度量空间 X 中的完全有界集，据定理 6.7.4，A 中任一点列 $\{x_n\}$ 必有子列 $\{x_{n_k}\}$ 是基本列. 因 X 是完备的，所以 $\{x_{n_k}\}$ 是收敛子列，因而 A 是列紧集. 证毕.

注 1 定理 6.7.5 的(2)中空间 X 的完备性条件不能去掉，理

由见本节习题第 3 题.

注 2 定理 6.7.5、定理 6.7.3、定理 6.7.2 及例 1 告诉我们，在完备的度量空间中，集的列紧性和完全有界性是一致的，但完全有界性强于有界性. 在 n 维欧几里得空间 $\boldsymbol{R}^n$ 中，集的列紧性、完全有界性和有界性三者是一致的. 在一般度量空间中，列紧性强于完全有界性，完全有界性强于有界性.

推论 6.7.6 **设 X 是完备的度量空间，则 $A\subset X$ 为列紧集 $\Longleftrightarrow \forall \varepsilon>0$，$A$ 有列紧的 ε-网.**

证明 “$\Rightarrow$”：设 $A\subset X$ 是列紧集. $\forall \varepsilon>0$，A 自身便是它的一个列紧 ε-网.

“$\Leftarrow$”：设 $\forall \varepsilon>0$，A 有列紧的 ε-网 B. 据定理 6.7.5，B 是完全有界集，所以 B 有有限的 ε-网 C，从而 C 是 A 的一个有限 2ε-网，因此 A 是完全有界集，再由 X 的完备性知，A 是列紧集. 证毕.

推论 6.7.7 **度量空间 X 中的列紧集是有界的、可分的.**

6.7.2 $C[a,b]$ 及 $L^p[a,b]$ $(1<p<+\infty)$ 中列紧集的特征

定理 6.7.8 (Arzela-Ascoli) **集 $A\subset C[a,b]$ 列紧的充要条件是**

(1) **集 A 是有界的，即有常数 $M>0$，使 $\forall x(t)\in A$，$\|x\|=\max\limits_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)|\leqslant M$；**

(2) **集 A 是等度连续的，即 $\forall \varepsilon>0$，$\exists \delta=\delta(\varepsilon)>0$，使得 $\forall x(t)\in A$ 及 $\forall t,t'\in[a,b]$，只要 $|t-t'|<\delta$，就有**

$$|x(t)-x(t')|<\varepsilon.$$

证明 “$\Leftarrow$”：因 $C[a,b]$ 是完备的，只须证明 A 是完全有界的. 据条件(2)，$\forall \varepsilon>0$，$\exists \delta=\delta(\varepsilon)>0$，使得 $\forall x(t)\in A$ 及 $\forall t,t'\in[a,b]$，只要 $|t-t'|<\delta$，就有

$$|x(t)-x(t')|<\frac{\varepsilon}{3}. \tag{6.7.1}$$

利用这个 δ,任意取定$[a,b]$中的有限个分点

$$a=t_1<t_2<\cdots<t_n=b,$$

使得$|t_{i+1}-t_i|<\delta(i=1,2,\cdots,n-1)$. 据条件(1),点集

$$\tilde{A}=\{(x(t_1),x(t_2),\cdots,x(t_n))\mid x\in A\}$$

组成 n 维欧几里得空间 $\boldsymbol{R}^n$ 中的有界集

$$\left(\left(\sum_{i=1}^{n}|x(t_i)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant\sqrt{n}M\right).$$

从而 $\tilde{A}$ 是完全有界的,所以有 $x_1,x_2,\cdots,x_k\in A$,使得 k 个点

$$(x_j(t_1),x_j(t_2),\cdots,x_j(t_n)),\ j=1,2,\cdots,k$$

组成 $\tilde{A}$ 的有限$\frac{\varepsilon}{3}$-网. 只要证明$\{x_1,x_2,\cdots,x_k\}$是 A 的有限 ε-网就行了. 事实上,$\forall x\in A$, 由于$(x(t_1),x(t_2),\cdots,x(t_n))\in\tilde{A}$, 所以必有 $x_{j_0}\in\{x_1,x_2,\cdots,x_k\}$,使得

$$\left(\sum_{i=1}^{n}|x_{j_0}(t_i)-x(t_i)|^2\right)^{\frac{1}{2}}<\frac{\varepsilon}{3},$$

从而

$$|x(t_i)-x_{j_0}(t_i)|<\frac{\varepsilon}{3},i=1,2,\cdots,n.$$

$\forall t\in[a,b]$,设 t 落在子区间$[t_i,t_{i+1}](1\leqslant i\leqslant n-1)$上, 由不等式(6.7.1)得到

$$\begin{aligned}|x(t)-x_{j_0}(t)|\leqslant&|x(t)-x(t_i)|+|x(t_i)-x_{j_0}(t_i)|\\&+|x_{j_0}(t_i)-x_{j_0}(t)|<\varepsilon.\end{aligned}$$

因此$\|x-x_{j_0}\|<\varepsilon$,这说明$\{x_1,x_2,\cdots,x_k\}$是 A 的有限 ε-网.

"$\Rightarrow$": 设 $A\subset C[a,b]$是列紧集. 由于列紧集是有界的, 只须再证 A 是等度连续的就可以了. 因 A 是完全有界的, 所以,

$\forall \varepsilon>0$，必有 A 的有限 $\frac{\varepsilon}{3}$-网 $\{x_1,x_2,\cdots,x_k\}$. 又因为每个 $x_i(t)(i=1,2,\cdots,k)$ 在 $[a,b]$ 上连续，从而一致连续，所以有正数 $\delta_i(i=1,2,\cdots,k)$，使得 $\forall t,t'\in[a,b]$，当 $|t-t'|<\delta_i$ 时，

$$|x_i(t)-x_i(t')|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_k\}$. 我们证明：$\forall x\in A$ 及 $\forall t$，$t'\in[a,b]$，只要 $|t-t'|<\delta$，便有

$$|x(t)-x(t')|<\varepsilon.$$

事实上，$\forall x\in A$，$\exists x_{i_0}\in\{x_1,x_2,\cdots,x_k\}$，使得 $\|x-x_{i_0}\|<\frac{\varepsilon}{3}$，因此

$$\begin{aligned}|x(t)-x(t')|&\leqslant|x(t)-x_{i_0}(t)|+|x_{i_0}(t)-x_{i_0}(t')|\\&\quad+|x_{i_0}(t')-x(t')|<\varepsilon.\end{aligned}$$

即 A 是等度连续的. 证毕.

注 Arzela-Ascoli 定理有着广泛的应用，特别可用它来证明微分方程解的存在性.

下面讨论空间 $L^p[a,b](1<p<+\infty)$ 中集合列紧的条件.

定义 6.7.3 设 $x(t)\in L^p[a,b](1<p<+\infty)$，将 $x(t)$ 的定义范围扩充到 $[a,b]$ 之外，当 $t\overline{\in}[a,b]$ 时，令 $x(t)=0$. 作相应的函数

$$x_h(t)=\frac{1}{2h}\int_{t-h}^{t+h}x(s)ds\quad(t\in[a,b],h>0),$$

函数 $x_h(t)$ 称为 $x(t)$ 的斯捷克洛夫(Стеклов)函数.

引理 6.7.9 设 $x(t)\in L^p[a,b](1<p<+\infty)$，则

(1) $x_h(t)\in C[a,b]\quad(\forall h>0)$.

(2) $\|x_h\|\leqslant\|x\|\quad(\forall h>0)$，即

$$\left(\int_a^b|x_h(t)|^pdt\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\left(\int_a^b|x(t)|^pdt\right)^{\frac{1}{p}}\quad(\forall h>0).$$

(3) $\lim\limits_{h\to 0^+}\|x_h-x\|=0$.

*证明 (1) 令

$$F(t)=\int_{-\infty}^{t}x(s)ds=\int_{a}^{t}x(s)ds,$$

则 $F(t)$在$[a,b]$上连续，从而 $\forall h>0$,

$$x_h(t)=\frac{1}{2h}[F(t+h)-F(t-h)]$$

是 t(在$[a,b]$上)的连续函数，即 $x_h(t)\in C[a,b]$.

(2) 设 $q=\frac{p}{p-1}$，即$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，则 $\forall h>0$，有

$$\int_a^b|x_h(t)|^p dt=\int_a^b\left(\frac{1}{2h}\left|\int_{t-h}^{t+h}x(s)ds\right|\right)^p dt$$

$$\leqslant\left(\frac{1}{2h}\right)^p\int_a^b\left[\left(\int_{t-h}^{t+h}ds\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_{t-h}^{t+h}|x(s)|^p ds\right)^{\frac{1}{p}}\right]^p dt$$

$$=\left(\frac{1}{2h}\right)^p\cdot(2h)^{\frac{p}{q}}\int_a^b\left(\int_{t-h}^{t+h}|x(s)|^p ds\right)dt$$

$$=\frac{1}{2h}\int_a^b dt\int_{-h}^{h}|x(t+\tau)|^p d\tau$$

$$=\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}d\tau\int_a^b|x(t+\tau)|^p dt$$

$$\leqslant\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}d\tau\int_a^b|x(t)|^p dt$$

$$=\int_a^b|x(t)|^p dt,$$

即$\|x_h\|\leqslant\|x\|$.

(3) 证明分两步：(i) 设 $x(t)$是$[a,b]$上的连续函数，则$\forall t_0\in(a,b)$，当 $0<h<\min\{t_0-a,b-t_0\}$时，有$[t_0-h,t_0+h]\subset[a,b]$，由积分中值定理知

$$x_h(t_0)=\frac{1}{2h}\int_{t_0-h}^{t_0+h}x(s)ds=x(t_0+\theta h)\quad(|\theta|<1),$$

从而 $\lim\limits_{h\to 0^+} x_h(t_0)=x(t_0)$. 即

$$\lim_{h\to 0^+} x_h(t)=x(t) \text{ a.e. 于} [a,b].$$

又 $x(t)$ 在 $[a,b]$ 上连续，从而有界，即有常数 $B>0$，使得 $|x(t)|\leqslant B$ $(\forall t\in[a,b])$. 因此 $|x_h(t)|\leqslant B$ $(\forall t\in[a,b],\ \forall h>0)$. 由数学分析中函数极限与数列极限的关系以及 Lebesgue 有界收敛定理知

$$\lim_{h\to 0^+}\int_a^b |x_h(t)-x(t)|^p dt=0,$$

即 $\lim\limits_{h\to 0^+}\|x_h-x\|=0$.

(ii) $\forall x(t)\in L^p[a,b]$, $\forall \varepsilon>0$, 由于 $C[a,b]$ 在 $L^p[a,b]$ 中稠密，所以必有 $y(t)\in C[a,b]$，使得 $\|x-y\|<\frac{\varepsilon}{3}$. 注意到 $x(t)-y(t)$ 的 Стеклов 函数是 $x_h(t)-y_h(t)$，由引理 6.7.9 的(2)知

$$\|x_h-y_h\|\leqslant\|x-y\|<\frac{\varepsilon}{3},$$

从而

$$\|x_h-x\|\leqslant\|x_h-y_h\|+\|y_h-y\|+\|y-x\|<\|y_h-y\|+\frac{2}{3}\varepsilon.$$

由(i)中所证知，$\exists\delta>0$，当 $0<h<\delta$ 时，$\|y_h-y\|<\frac{\varepsilon}{3}$，从而当 $0<h<\delta$ 时，$\|x_h-x\|<\varepsilon$，即 $\lim\limits_{h\to 0^+}\|x_h-x\|=0$. 证毕.

定理 6.7.10(Колмогоров 定理) **集合** $A\subset L^p[a,b]$($1<p<+\infty$)**列紧的充要条件是**

(1) A **是有界的，即有常数** $M>0$，**使**

$$\|x\|=\left(\int_a^b |x(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant M \quad (\forall x(t)\in A);$$

(2) $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta=\delta(\varepsilon)>0$, **当** $0<h<\delta$ **时**, $\forall x(t)\in A$, **有**

$$\|x_h - x\| < \varepsilon.$$

*证明 "⇒"：条件(1)是显然的，下证条件(2). 由于A是列紧集，所以A是完全有界的，于是$\forall \varepsilon > 0$，A有有限的$\frac{\varepsilon}{3}$-网$\{x^1(t), x^2(t), \cdots, x^n(t)\}$. 由引理6.7.9的(3)知，对每个$x^i(t)$ $(i=1,2,\cdots,n)$，$\exists \delta_i > 0$，使当$0 < h < \delta_i$时，有

$$\|x_h^i - x^i\| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

$\forall x(t) \in A$，$\exists x^{i_0}(t) \in \{x^1(t), x^2(t), \cdots, x^n(t)\}$，使$\|x - x^{i_0}\| < \frac{\varepsilon}{3}$. 令$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_n\}$，则当$0 < h < \delta$时，

$$\|x_h - x\| \leqslant \|x_h - x_h^{i_0}\| + \|x_h^{i_0} - x^{i_0}\| + \|x^{i_0} - x\|$$
$$< \|x - x^{i_0}\| + \frac{2}{3}\varepsilon < \varepsilon.$$

"⇐"：据条件(2)，$\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$，当$0 < h < \delta$时，集合$A_h = \{x_h(t) \mid x(t) \in A\}$就是$A$的一个$\varepsilon$-网. 根据推论6.7.6，只须证明$A_h$是列紧集就可以了. 再根据定理6.7.8，只须证明A_h一致有界且等度连续(因为在$C[a,b]$中的列紧集必是$L^p[a,b]$中的列紧集)就行了. 事实上，$\forall x_h(t) \in A_h$，则

$$|x_h(t)| = \frac{1}{2h}\left|\int_{t-h}^{t+h} x(s)ds\right| \leqslant \frac{1}{2h}\left(\int_{t-h}^{t+h} ds\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_{t-h}^{t+h} |x(s)|^p ds\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$\leqslant \frac{1}{2h}(2h)^{\frac{1}{q}}\left(\int_a^b |x(s)|^p ds\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant (2h)^{-\frac{1}{p}}M.$$

因此A_h一致有界. 此外，$\forall t_1, t_2 \in [a,b]$(不妨设$t_1 < t_2$)，有

$$|x_h(t_2) - x_h(t_1)| = \frac{1}{2h}\left|\int_{t_2-h}^{t_2+h} x(s)ds - \int_{t_1-h}^{t_1+h} x(s)ds\right|$$
$$= \frac{1}{2h}\left|\int_{t_1+h}^{t_2+h} x(s)ds - \int_{t_1-h}^{t_2-h} x(s)ds\right|$$

$$\leqslant \frac{1}{2h}\left(\left|\int_{t_1+h}^{t_2+h} x(s)ds\right|+\left|\int_{t_1-h}^{t_2-h} x(s)ds\right|\right)$$

$$\leqslant \frac{1}{h}|t_2-t_1|^{\frac{1}{q}}\left(\int_a^b |x(s)|^p ds\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leqslant \frac{M}{h}|t_2-t_1|^{\frac{1}{q}} \quad (\forall x_h \in A_h).$$

因此 A_h 等度连续. 证毕.

注 Колмогоров定理有着广泛的应用,特别在讨论有关偏微分方程的问题时经常要用到它.

6.7.3 紧集及紧集上的连续映射

定义 6.7.4 设X是度量空间,$A\subset X$.如果X中每个覆盖[①]A的开集族中必有有限个开集覆盖A,则称A是紧集. 如果X自身是紧的,则称X为紧度量空间或简称紧空间.

定理 6.7.11(W. Gross) 设(X,ρ)是度量空间,则$A\subset X$是紧集$\Leftrightarrow A$是自列紧集.

证明 "$\Rightarrow$":设A是紧集,若A是有限集,据定理 6.7.1 的(2),A是自列紧的. 若A是无限集,设$\{x_n\}$是A中任一点列,如果$\{x_n\}$不含有收敛于A中一点的子列,则$\{x_n\}$必含有无限多个彼此相异的元素,且$\forall y\in A$,必$\exists \delta_y>0$,使得开球$O(y,\delta_y)$除球心y外不含$\{x_n\}$中的点(否则,y将是$\{x_n\}$的某个子列的极限).另一方面,由于

$$\bigcup_{y\in A} O(y,\delta_y)\supset A,$$

而A是紧的,因此在A的开覆盖$\{O(y,\delta_y)\mid y\in A\}$中,可取出有限个

① 关于覆盖、子覆盖、有限(可数)覆盖的意义可参见第二章第1节定义 2.1.12. 另外将定义 2.1.12 中的 $\mathbf{R}^n$ 换成一般的度量空间X,就得到度量空间X中开(闭)覆盖的概念.

开球覆盖 A，设这些开球为 $O_1, O_2, \cdots, O_k$，于是

$$\bigcup_{i=1}^{k} O_i \supset A.$$

由于每个开球至多含有 $\{x_n\}$ 中的一个点，故 $\bigcup\limits_{i=1}^{k} O_i$ 至多包含 $\{x_n\}$ 中 k 个点，这与

$$\bigcup_{i=1}^{k} O_i \supset A \supset \{x_n\}$$

矛盾，从而证得 A 中任何点列 $\{x_n\}$ 必有收敛于 A 中一点的子列，即 A 是自列紧的.

"$\Leftarrow$"：设 A 是自列紧的，要在 A 的任一开覆盖中取出有限子覆盖. 用反证法. 如果存在 A 的某个开覆盖 $\bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda \supset A$ 不能取出 A 的有限子覆盖，由于 A 是自列紧的，所以 $\forall n \in \mathbf{N}$，A 有有限的 $\frac{1}{n}$-网 $\{x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \cdots, x_{k(n)}^{(n)}\} \subset A$，记 $B_n = \{x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \cdots, x_{k(n)}^{(n)}\}$，显然 $\bigcup\limits_{y \in B_n} O\left(y, \frac{1}{n}\right) \supset A$. 因此，$\forall n \in \mathbf{N}$，$\exists y_n \in B_n$，使得 $O\left(y_n, \frac{1}{n}\right)$ 不能被有限个开集 G_λ 所覆盖. 由于 A 是自列紧集，所以 A 中的点列 $\{y_n\}$ 必有收敛子列 $\{y_{n_k}\}$ 收敛于一点 $y_0 \in A$，设 $y_0 \in G_{\lambda_0}$. 因 G_{λ_0} 是开集，所以 $\exists \delta > 0$，使得 $O(y_0, \delta) \subset G_{\lambda_0}$. 对此 δ，取 k 足够大，使得 $n_k > \frac{2}{\delta}$ 并且 $\rho(y_{n_k}, y_0) < \frac{\delta}{2}$，则 $\forall x \in O\left(y_{n_k}, \frac{1}{n_k}\right)$，有

$$\rho(x, y_0) \leqslant \rho(x, y_{n_k}) + \rho(y_{n_k}, y_0) < \frac{1}{n_k} + \frac{\delta}{2} < \delta,$$

即 $x \in O(y_0, \delta)$，从而 $O\left(y_{n_k}, \frac{1}{n_k}\right) \subset O(y_0, \delta) \subset G_{\lambda_0}$. 这与每个 $O\Big(y_n,$

$\left.\frac{1}{n}\right)$不能被有限个开集 G_λ 所覆盖矛盾. 证毕.

注 由定理 6.7.11 知,列紧空间和紧空间是一致的,从而紧空间是完备的,并且度量空间中的紧集作为子空间也是完备的.

现在把闭区间上连续函数的基本性质拓广到度量空间的紧集上来.

定理 6.7.12 **设 X,Y 是度量空间,$D\subset X$ 是紧集,$f:D\to Y$ 是连续映射,则 $f(D)$ 是 Y 中的紧集.**

证明 设 $\{y_n\}$ 是 $f(D)$ 中的任一点列,相应地有 D 中的点列 $\{x_n\}$ 使得 $f(x_n)=y_n, n=1,2,\cdots$. 因 D 是紧集,从而 D 是自列紧集,所以 $\{x_n\}$ 含有收敛子列 $\{x_{n_k}\}$ 收敛于 $x_0\in D$. 由于 f 在 x_0 处连续,所以

$$f(x_0)=\lim_{k\to\infty}f(x_{n_k})=\lim_{k\to\infty}y_{n_k},$$

且 $f(x_0)\in f(D)$. 因此,$f(D)$ 是 Y 中的紧集. 证毕.

从定理 6.7.12 的证明过程可以得到

推论 6.7.13 **设 X,Y 是度量空间,$f:X\to Y$ 是连续映射. 如果 $A\subset X$ 是列紧集,则 $f(A)$ 是 Y 中的列紧集.**

推论 6.7.14 **度量空间 X 中的紧集 D 上的实值连续函数 f 必然有界,而且上、下确界可达.**

证明 由于 $f(D)$ 是一维欧几里得空间 $\mathbb{R}^1$ 中的紧集,所以 $f(D)$ 是有界闭集,即有常数 $M>0$,使得 $|f(x)|\leqslant M(\forall x\in D)$,并且 $f(D)$ 的上确界 y_1 及下确界 y_0 也在 $f(D)$ 中,从而有 $x_0, x_1\in D$, 使得 $f(x_0)=y_0, f(x_1)=y_1$. 证毕.

推论 6.7.15 **设 X,Y 是度量空间, $D\subset X$, $B\subset Y$ 是紧集,f 是 D 到 B 上的一一的连续映射,则 f 是拓扑映射.**

证明 只要证明 f^{-1} 是连续的就行了. 为此,只要证明 f^{-1} 的逆映射 f 把 D 的任何闭子集 A 映成闭集即可. 因为 D 是紧集, 所

以D的闭子集A也是紧集，因此$f(A)$也是紧集，自然是闭集. 证毕.

我们可以仿照闭区间上的函数那样定义度量空间中映射的一致连续性，可以证明，紧集上的连续映射具有一致连续性. 也可以象在闭区间上一样地定义度量空间中的等度连续函数族，并且把Arzela-Ascoli定理拓广到度量空间中的紧集上去. 这些证明几乎和在闭区间上的一模一样，我们这里予以从略.

习 题 6.7

1. 下列复数集中哪一个是列紧的？

(i) $\{Z \mid |Z| \geqslant 1\}$;

(ii) $\{Z \mid Z\bar{Z}=2\}$;

(iii) $\{Z \mid |Z|$是不大于1的有理数$\}$.

2. 举一个度量空间的例子，在它上面有一个完全有界集不是列紧的.

3. 设X是度量空间，如果X中每个完全有界集都是列紧集，则X必是完备的.

4. 设A是度量空间X中的可分集，$\{O_\lambda \mid \lambda\in\Lambda\}$是$A$的开覆盖，则必可从$\{O_\lambda \mid \lambda\in\Lambda\}$中最多选出可数个开集$\{O_{\lambda_n}\}$，使得$\bigcup_{n=1}^{\infty} O_{\lambda_n}\supset A$.

5. 设A是度量空间X中的紧集，$\{F_\lambda \mid \lambda\in\Lambda\}$是$A$的一族闭子集，如果$\{F_\lambda \mid \lambda\in\Lambda\}$中任意有限个$F_{\lambda_1}$、$F_{\lambda_2}$、…、$F_{\lambda_n}$的交集都不空，则$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda$也不空.

6. 设M是$C[a,b]$中的有界集，求证集合

$$\{F(x)=\int_a^x f(t)dt, x\in[a,b] \mid f\in M\}$$

是$C[a,b]$中的列紧集.

7. 设(X,ρ)是度量空间，M是X中的列紧集，映射$f:X\to M$满足

$$\rho(f(x_1),f(x_2))<\rho(x_1,x_2) \quad (\forall x_1,x_2\in X, x_1\neq x_2).$$

求证：f在X中存在唯一的不动点.

8. 设F_1、F_2是度量空间X中的两个紧子集，则存在$x_0\in F_1$，$y_0\in F_2$，使$\rho(F_1,F_2)=\rho(x_0,y_0)$.

9. 证明：空间 s（定义见§6.1例3）的子集 A 列紧的充要条件是 $\forall n\in\mathbb{N}$，$\exists c_n>0$，使得 $\forall x=\{\xi_n\}\in A$，有 $|\xi_n|\leqslant c_n(n=1,2,\cdots)$.

10. 证明：空间 $l^p(1\leqslant p<+\infty)$ 中的集 A 成为列紧集的充要条件是 A 为有界集而且对任何正数 ε，有自然数 n_ε，使得对一切 $x=\{x_i\}\in A$ 成立着

$$\sum_{i=n_\varepsilon+1}^{\infty}|x_i|^p<\varepsilon.$$

11. 设 (X,ρ) 和 (X_1,ρ_1) 是两个度量空间，$D\subset X$，$f:D\to X_1$ 是一映射. 如果 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $x,x'\in D$，而且 $\rho(x,x')<\delta$ 时，就有 $\rho_1(f(x),f(x'))<\varepsilon$，则称 f 在 D 上是一致连续的映射. 证明：当 D 是紧集时，任何 $D\to X_1$ 的连续映射必是一致连续的.

§6.8 有限维赋范线性空间

6.8.1 有限维线性空间

设 E_n 是数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 维线性空间，$\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$ 是 E_n 的一组基. E_n 中每个元素 x 可以唯一地表示成基 $\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$ 的线性组合

$$x=\xi_1e_1+\xi_2e_2+\cdots+\xi_ne_n(\xi_i\in\mathbb{K},i=1,2,\cdots,n),$$

数 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 称为 x 关于基 $\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$ 的坐标，ξ_i 称为 x 的第 i 个坐标. 如果我们把 E_n 的元素 x 关于基 $\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$ 的坐标记为 $(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$，它是 $\mathbb{K}$ 上的线性空间 $\boldsymbol{R}^n$ 中的元素，令

$$\varphi:x\mapsto(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n),$$

显然 φ 是 E_n 到 $\boldsymbol{R}^n$ 上的（线性）同构映射，因此 E_n 与 $\boldsymbol{R}^n$ 线性同构. 由此可以推知，任意两个 n 维线性空间都是线性同构的.

6.8.2 有限维赋范线性空间

现在讨论有限维赋范线性空间，它有一些性质是一般赋范线性空间所不具有的.

定理 6.8.1 设 E_n 是 n 维的赋范线性空间，$\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ 是 E_n 的一组基，则必有正数 C_1、C_2，使得 $\forall x=\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i e_i\in E_n$，成立着

$$C_2\Big(\sum_{i=1}^{n}|\xi_i|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\leqslant\|x\|\leqslant C_1\Big(\sum_{i=1}^{n}|\xi_i|^2\Big)^{\frac{1}{2}}. \qquad (6.8.1)$$

而且映射

$$T:(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)\mapsto\sum_{i=1}^{n}\xi_i e_i$$

是 n 维欧几里得空间 R^n 到 E_n 的拓扑映射.

证明 $\forall x=\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i e_i\in E_n$，由范数的定义和Cauchy不等式知

$$\|x\|\leqslant\sum_{i=1}^{n}|\xi_i|\,\|e_i\|\leqslant\Big(\sum_{i=1}^{n}|\xi_i|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\sum_{i=1}^{n}\|e_i\|^2\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

令 $C_1=\Big(\sum\limits_{i=1}^{n}\|e_i\|^2\Big)^{\frac{1}{2}}$，则 $C_1>0$，而且

$$\|x\|\leqslant C_1\Big(\sum_{i=1}^{n}|\xi_i|^2\Big)^{\frac{1}{2}}. \qquad (6.8.2)$$

$\forall x=\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i e_i$，$y=\sum\limits_{i=1}^{n}\eta_i e_i\in E_n$，由不等式(6.8.2)知

$$\|x-y\|\leqslant C_1\Big(\sum_{i=1}^{n}|\xi_i-\eta_i|^2\Big)^{\frac{1}{2}}, \qquad (6.8.3)$$

从而更有

$$\big|\|x\|-\|y\|\big|\leqslant C_1\Big(\sum_{i=1}^{n}|\xi_i-\eta_i|^2\Big)^{\frac{1}{2}}. \qquad (6.8.3')$$

将$(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$看成$\boldsymbol{R}^n$中的点，不等式(6.8.3′)表明$\|x\|$作为$(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)\in\boldsymbol{R}^n$的函数是连续的. 令

$$f(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)=\|\sum_{i=1}^n\xi_ie_i\|\quad(\forall(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)\in\boldsymbol{R}^n),$$

则f是$\boldsymbol{R}^n$上的非负连续函数. 考虑f在$\boldsymbol{R}^n$的单位球面

$$S=\left\{(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)\in\boldsymbol{R}^n\,\Big|\left(\sum_{i=1}^n|\xi_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}=1\right\}$$

上的函数值，由于S是紧集，据推论6.7.14，f在S上必有非负的最小值C_2，即有

$$f(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)\geqslant C_2\quad(\forall(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)\in S).\qquad(6.8.4)$$

现在证明$C_2>0$. 用反证法. 假若$C_2=0$，则$\exists(\xi_1^*,\xi_2^*,\cdots,\xi_n^*)\in S$，使得

$$f(\xi_1^*,\xi_2^*,\cdots,\xi_n^*)=\|\sum_{i=1}^n\xi_i^*e_i\|=0,$$

从而$\sum\limits_{i=1}^n\xi_i^*e_i=\theta$. 因为$\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$是$E_n$的一组基，所以必有

$$\xi_1^*=\xi_2^*=\cdots=\xi_n^*=0,$$

即$(\xi_1^*,\xi_2^*,\cdots,\xi_n^*)$是$\boldsymbol{R}^n$中的零元素. 但$S$不含零元素，这就产生了矛盾. 因此$C_2>0$.

$\forall x=\sum\limits_{i=1}^n\xi_ie_i\in E_n\setminus\{\theta\}$，则$(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)\in\boldsymbol{R}^n\setminus\{0\}$，令

$$\xi_i'=\left(\sum_{i=1}^n|\xi_i|^2\right)^{-\frac{1}{2}}\xi_i\quad(i=1,2,\cdots,n),$$

则$(\xi_1',\xi_2',\cdots,\xi_n')\in S$. 据范数的条件(2)和(6.8.4)，有

$$\|x\|=\left\|\sum_{i=1}^{n}\xi_i e_i\right\|=\left(\sum_{i=1}^{n}|\xi_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left\|\sum_{i=1}^{n}\xi_i' e_i\right\|$$

$$=\left(\sum_{i=1}^{n}|\xi_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}f(\xi_1',\xi_2',\cdots,\xi_n')\geqslant C_2\left(\sum_{i=1}^{n}|\xi_i|^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

即有

$$\|x\|\geqslant C_2\left(\sum_{i=1}^{n}|\xi_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}\quad\left(\forall x=\sum_{i=1}^{n}\xi_i e_i\in E_n\right).\qquad(6.8.5)$$

(6.8.1)式得证.

再证 T 是 $\boldsymbol{R}^n$ 到 E_n 上的拓扑映射. 显然 T 是 $\boldsymbol{R}^n$ 到 E_n 上的一一映射，只须证明 T 和 T^{-1} 都是连续的. 由 (6.8.1) 式知，$\forall\xi=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n),\ \eta=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)\in\boldsymbol{R}^n$，有

$$\|T\xi-T\eta\|=\left\|\sum_{i=1}^{n}\xi_i e_i-\sum_{i=1}^{n}\eta_i e_i\right\|=\left\|\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-\eta_i)e_i\right\|$$

$$\leqslant C_1\left(\sum_{i=1}^{n}|\xi_i-\eta_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}=C_1\|\xi-\eta\|,\qquad(6.8.6)$$

所以 T 是连续的. 再由(6.8.1)式知，$\forall x=\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i e_i,\ y=\sum\limits_{i=1}^{n}\eta_i e_i\in E_n$，有

$$\|T^{-1}x-T^{-1}y\|=\left(\sum_{i=1}^{n}|\xi_i-\eta_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant\frac{1}{C_2}\|x-y\|,\qquad(6.8.7)$$

所以 T^{-1} 也是连续的. 证毕.

推论 6.8.2 (1) **有限维线性空间上的任何两个范数都是等价的.**

(2) **任何两个维数相同的有限维赋范线性空间都是拓扑同构的.**

(3) **有限维赋范线性空间是 Banach 空间，因此，任一赋范线性空间的有限维线性子空间是闭子空间.**

证明 (1)、(2)留为习题，这里只证(3). 设$\{x_m\}$是 n 维赋范线性空间 E_n 中的基本列，$T:\boldsymbol{R}^n\to E_n$ 是定理 6.8.1 中给出的映射. 由(6.8.7)式知，$\exists C_2>0$，使得

$$\|T^{-1}x_m-T^{-1}x_k\|\leqslant\frac{1}{C_2}\|x_m-x_k\|\quad(\forall m,k\in\mathrm{N}),$$

所以$\{T^{-1}x_m\}$是 $\boldsymbol{R}^n$ 中的基本列，由 $\boldsymbol{R}^n$ 的完备性知，$\exists\xi\in\boldsymbol{R}^n$，使得 $\|T^{-1}x_m-\xi\|\to0(m\to\infty)$. 再由(6.8.1)式知，$\exists C_1>0$，使得

$$\|x_m-T\xi\|\leqslant C_1\|T^{-1}x_m-\xi\|\quad(\forall m\in\mathrm{N}),$$

从而$\|x_m-T\xi\|\to0(m\to\infty)$. 因此 E_n 是 Banach 空间. 又因为度量空间的完备子空间是闭的子集，所以任一赋范线性空间的有限维线性子空间是闭子空间. 证毕.

下面讨论有限维赋范线性空间的特征. 先介绍一个在赋范线性空间理论中很有用的引理.

引理 6.8.3(F. Riesz) **设 E_0 是赋范线性空间 E 的真闭子空间，则 $\forall\varepsilon\in(0,1)$，$\exists x_0\in E$，$\|x_0\|=1$，使得**

$$\rho(x_0,E_0)=\inf_{x\in E_0}\|x_0-x\|>\varepsilon.$$

证明 任取 $x_1\in E-E_0$，由于 E_0 是闭的，所以$\rho(x_1,E_0)=d>0$，因$\frac{d}{\varepsilon}>d$，所以 $\exists x_1'\in E_0$，使得$\|x_1-x_1'\|<\frac{d}{\varepsilon}$. 令$x_0=\frac{x_1-x_1'}{\|x_1-x_1'\|}$，则 $\|x_0\|=1$. $\forall x\in E_0$，因 $x_1'+\|x_1-x_1'\|x\in E_0$，所以

$$\|x_1-(x_1'+\|x_1-x_1'\|x)\|\geqslant d,$$

从而

$$\|x-x_0\|=\left\|\frac{x_1-x_1'}{\|x_1-x_1'\|}-x\right\|=\frac{1}{\|x_1-x_1'\|}\|x_1-(x_1'+\|x_1-x_1'\|x)\|$$

$$\geqslant\frac{d}{\|x_1-x_1'\|}.$$

因此 $\rho(x_0, E_0) \geq \frac{d}{\|x_1 - x_1'\|} > \varepsilon$. 证毕.

定义 6.8.1 如果赋范线性空间 E 中任一有界子集都是列紧的，则称 E 是局部列紧的.

有限维赋范线性空间具有下面的特征:

定理 6.8.4 赋范线性空间 E 是有限维的充要条件是 E 为局部列紧的.

证明 "⇒": 设 E 是有限维赋范线性空间，并设 E 的维数是 n, $T: \mathbf{R}^n \to E$ 是定理 6.8.1 中给出的映射. 设 A 是 E 中任一有界子集，即 $\exists M > 0$, 使得 $\forall x \in A$, $\|x\| \leq M$. 由定理 6.8.1, $\exists C_2 > 0$, 使得

$$\|T^{-1}x\| \leq \frac{1}{C_2}\|x\| \leq \frac{1}{C_2}M \quad (\forall x \in A).$$

因此 $T^{-1}A$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的有界集，从而 $T^{-1}A$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的列紧集. 又 T 是连续的，据推论 6.7.13, $A = T(T^{-1}A)$ 是 E 中的列紧集.

"⇐": 反证法. 假若 E 是无限维的，令

$$S = \{x \in E \mid \|x\| = 1\},$$

则 S 是 E 的单位球面. 任取 $x_1 \in S$, 记 E_1 为 $\{x_1\}$ 张成的子空间，即 $E_1 = \text{span}\{x_1\}$, 则 E_1 是 E 的有限维真子空间，由推论 6.8.2 的(3)知, E_1 是闭的. 再由引理 6.8.3 知, $\exists x_2 \in S$, 使得

$$\rho(x_2, E_1) = \inf_{x \in E_1} \|x_2 - x\| > \frac{1}{2},$$

由于 $x_1 \in E_1$, 所以 $\|x_2 - x_1\| > \frac{1}{2}$. 记 E_2 为 $\{x_1, x_2\}$ 张成的子空间，即 $E_2 = \text{span}\{x_1, x_2\}$, 则 E_2 也是 E 的有限维真闭子空间. 仍由引理 6.8.3 知, $\exists x_3 \in S$, 使得

$$\rho(x_3, E_2) = \inf_{x \in E_2} \|x_3 - x\| > \frac{1}{2},$$

由于 $x_1, x_2 \in E_2$，所以 $\|x_3 - x_i\| > \frac{1}{2}(i=1,2)$. 这样继续做下去，由于假设 E 是无限维的，因此可以从 S 中取出一列元素 $x_1, x_2, \cdots, x_k, \cdots$，使得 $\forall k, m \in \mathbf{N}$，当 $k \neq m$ 时，成立 $\|x_k - x_m\| > \frac{1}{2}$. 于是有界集 S 中的点列 $\{x_k\}$ 不可能含有收敛子列，即 S 不是列紧集，这与 E 的局部列紧性矛盾. 因此 E 是有限维的. 证毕.

注 6.8.5 从定理 6.8.4 及其充分性的证明可以看出，有限维赋范线性空间中的任一有界闭集是紧集，自然它的单位球面和闭单位球都是紧集，然而在无限维赋范线性空间中却存在着非列紧的有界闭集，如空间的单位球面和闭单位球都是有界闭集，但都不是列紧集，也就更不是紧集. 由此可以得到下述结论:

赋范线性空间 E 是有（无）限维的充要条件是 E 的闭单位球 $B=\{x\in E \mid \|x\| \leqslant 1\}$ 是(不是)紧集.

这个结论指出了有限维赋范空间和无限维赋范空间的根本差别，正因为这个差别，无限维空间中的分析课题远比有限维空间复杂.

习 题 6.8

1. 证明推论 6.8.2 的(1)、(2).
2. 证明无限维的 Banach 空间不能分解成可数个列紧集之并.
3. 设 X 是无限维的 Banach 空间，证明必不存在一列有限维的子空间 $\{X_n\}$，使得 $X=\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$（从而可分无限维 Banach 空间中不存在可数个向量 $\{e_i\}$ 构成 Hamel 基）.
4. 设 X 是赋范线性空间，A 是 X 中的有界集. 证明：A 是完全有界集的充要条件是 $\forall \varepsilon>0$，都存在 X 的有限维子空间 M_ε，使 A 中每点与 M_ε 的距离都小于 ε.

第七章　线性算子与线性泛函

线性算子和线性泛函是泛函分析研究的基本对象. 本章讨论线性算子和线性泛函的一般概念和基本性质.

§7.1　线性算子(泛函)的概念及有界性

7.1.1　线性算子与线性泛函的定义

算子通常是指线性空间到线性空间的映射，特别是赋范线性空间到赋范线性空间的映射. 有时也泛称映射为算子. 值域为数集的算子称为泛函数，简称为泛函. 算子一般可分为线性的和非线性的两类，我们这里主要讨论线性算子和线性泛函.

定义 7.1.1　设 X 和 Y 是数域 $\mathbb{K}$ 上的两个线性空间, D 是 X 的线性子空间, T 是 D 到 Y 中的一个映射. 如果 $\forall x, y\in D, \forall \alpha, \beta\in \mathbb{K}$, 成立

$$T(\alpha x+\beta y)=\alpha Tx+\beta Ty,$$

则称 T 是线性算子，称 D 是 T 的定义域，也记为 $\mathscr{D}(T)$, 称 $TD=\{Tx\,|\,x\in D\}$ 是 T 的值域(或象域), 也记为 $\mathscr{R}(T)$. 取值为复数或实数的线性算子 T(即 $\mathscr{R}(T)\subset\mathbb{K}$) 分别称为复的或实的线性泛函，统称为线性泛函.

注　从定义 7.1.1 可以看出，线性算子 T 及其定义域 $\mathscr{D}(T)\subset X$ 和值域 $\mathscr{R}(T)\subset Y$ 具有下列性质:

1° $T\theta=\theta$.

2° $\mathscr{R}(T)$ 是 Y 的线性子空间.

3° 如果 $\dim\mathscr{D}(T)=n<+\infty$, 则 $\dim\mathscr{R}(T)\leqslant\dim\mathscr{D}(T)$.

1°、2° 是显然的. 现在证明 3°: 在 $\mathscr{R}(T)$ 中任取 $n+1$ 个元

素 $y_1, y_2, \cdots, y_{n+1}$，则在 $\mathscr{D}(T)$ 中存在 $x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}$，使得 $Tx_i = y_i$ $(i=1,2,\cdots,n+1)$. 因为 $\dim\mathscr{D}(T)=n$，所以 $x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}$ 线性相关，即存在不全为 0 的数 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n+1} \in \mathbb{K}$，使得 $\sum_{i=1}^{n+1}\alpha_i x_i = \theta$，从而

$$\sum_{i=1}^{n+1}\alpha_i y_i = \sum_{i=1}^{n+1}\alpha_i T x_i = T\left(\sum_{i=1}^{n+1}\alpha_i x_i\right) = T(\theta) = \theta,$$

因此 $y_1, y_2, \cdots, y_{n+1}$ 是线性相关的，故 $\dim\mathscr{R}(T) \leqslant n = \dim\mathscr{D}(T)$. 证毕.

下面举一些例子.

例 1 设 X 是数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 维向量空间，在 X 中取一组基 $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$，相应于任意一个 $n \times n$ 矩阵 (t_{ij})，作 $X \to X$ 的算子 T 如下：当 $x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j \in X$ 时，

$$y = Tx = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i, \tag{7.1.1}$$

其中 $y_i = \sum_{j=1}^{n} t_{ij} x_j, i = 1, 2, \cdots, n$. 显然，这样定义的 T 是一个线性算子，这个线性算子在线性代数中称为线性变换. 在基 $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ 下，算子 T 显然由矩阵 (t_{ij}) 唯一确定，有时就直接记为 $T = (t_{ij})$.

反过来，设 T 是 $X \to X$ 的任何一个线性算子，由于 Te_j 是 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 的线性组合，所以必有矩阵 (t_{ij})，使得

$$Te_j = t_{1j}e_1 + t_{2j}e_2 + \cdots + t_{nj}e_n = \sum_{i=1}^{n} t_{ij} e_i, \ j = 1, 2, \cdots, n.$$

因此，当 $x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j \in X$ 时，由 T 的线性可得

$$Tx = \sum_{j=1}^{n} x_j(Te_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j\left(\sum_{i=1}^{n} t_{ij}e_i\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} t_{ij}x_j\right)e_i = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i,$$

这里 $y_i = \sum_{j=1}^{n} t_{ij}x_j$, $i=1, 2, \cdots, n$. 即T是对应于矩阵(t_{ij})的算子.

由此可知,在有限维线性空间上,当基底选定以后, 线性算子与矩阵是相对应的.

设$(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$是一组数,当 $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in X$ 时,定义

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i, \tag{7.1.2}$$

易知,f是X上的线性泛函. 反过来,如果f是X上的线性泛函,记 $\alpha_i = f(e_i), i=1,2,\cdots,n$. 当 $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in X$ 时, 由f的线性可得

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i.$$

由此可见, n维线性空间上的线性泛函与数组 $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ 相对应.

注 由例1的讨论,还可以得到如下结论:

设X是 $\mathbb{K}$ 上的n维线性空间, Y是X的m维子空间$(m \leqslant n)$. 当X和Y的基选定以后, $X \to Y$ 的线性算子与 $m \times n$ 矩阵(t_{ij})一一对应.

例 2 设 $P(t) = \sum_{i=1}^{k} a_i t^i$ 是常系数多项式. 作$C^{(k)}[a, b] \to$

$C[a,b]$的算子T如下：$\forall x(t)\in C^{(k)}[a,b]$，令

$$T: x(t) \longmapsto P\left(\frac{d}{dt}\right)x(t),$$

则T是$C^{(k)}[a,b]$到$C[a,b]$的线性算子.

又$\forall t_0\in[a,b]$，映射

$$f: x(t) \mapsto P\left(\frac{d}{dt}\right)x(t)\Big|_{t=t_0}$$

是$C^{(k)}[a,b]$上的线性泛函.

例 3 设X是线性空间，α是一给定的数. 映射

$$T: x \mapsto \alpha x \quad (\forall x\in X)$$

是X上的线性算子，称为相似算子(或称为倍单位算子)，记作αI. 特别当$\alpha=0$时，称T是零算子，记作0；当$\alpha=1$时，称T为单位算子或恒等算子，记作I.

例 4 $\forall x\in C[a,b]$，定义

$$Tx(t)=\int_a^t x(\tau)\,d\tau,$$

由积分的线性知，T是$C[a,b]$到$C[a,b]$中的线性算子. 若令

$$f(x)=\int_a^b x(\tau)\,d\tau \quad (\forall x\in C[a,b]),$$

则f是$C[a,b]$上的线性泛函.

通常在某个函数空间中，由微分运算(如例 2 中的算子)和积分运算(如例 4 中的算子)所定义的算子，分别泛称为微分算子和积分算子.

7.1.2 线性算子的有界性与连续性

在度量空间中已介绍过连续映射的概念. 线性算子由于具有可加性，所以关于连续性有更进一步的结果.

定理 7.1.1 设X、Y都是赋范线性空间，D是X的线性子空

间，T 是 D 到 Y 中的线性算子．如果 T 在某一点 $x_0\in D$ 连续，则 T 在 D 上处处连续．

证明 $\forall x\in D$，设 $x_n\in D(n=1,2,\cdots)$，且 $x_n\to x$，于是 $x_n-x+x_0\to x_0$，由假设 T 在 x_0 处连续，所以当 $n\to\infty$ 时，

$$Tx_n-Tx+Tx_0=T(x_n-x+x_0)\to Tx_0,$$

因此 $Tx_n\to Tx$，即 T 在 x 处是连续的．证毕．

由此可知，要验证线性算子 T 是连续的，只要验证 T 在 θ 点连续就可以了．

例 5 设 T 是 n 维赋范线性空间 X 到赋范线性空间 Y 的线性算子，则 T 在 X 上处处连续．

证明 在 X 中取一组基 $\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$．设 $x_m=\sum\limits_{j=1}^{n}x_j^{(m)}e_j\in X$ $(m=1,2,\cdots)$，且 $x_m\to\theta$，即 $\|x_m\|\to 0$．据定理 6.8.1，

$$\left(\sum_{j=1}^{n}|x_j^{(m)}|^2\right)^{\frac{1}{2}}\to 0\quad(m\to\infty),$$

从而当 $m\to\infty$ 时，$x_j^{(m)}\to 0\quad(j=1,2,\cdots,n)$．于是

$$\|Tx_m\|=\left\|\sum_{j=1}^{n}x_j^{(m)}(Te_j)\right\|\leqslant\max_{1\leqslant j\leqslant n}|x_j^{(m)}|\left(\sum_{j=1}^{n}\|Te_j\|\right)\to 0(m\to\infty).$$

因此 $Tx_m\to\theta=T\theta$，即 T 在 $x=\theta$ 处连续．证毕．

定义7.1.2 设 X、Y 是两个赋范线性空间，D 是 X 的线性子空间，T 是 D 到 Y 的线性算子．如果 T 将其定义域中的每个有界集映射成一个有界集，就称 T 是有界(线性)算子．不是有界的(线性)算子就称为无界(线性)算子．

显然，赋范线性空间中的相似算子是有界的．

定理 7.1.2 设 X、Y 都是赋范线性空间．T 是 X 到 Y 的线性算子，则下列三件事等价：

(1) T 是有界线性算子.

(2) $\exists$ 常数 $M \geqslant 0$, 使 $\forall x \in X$, 有

$$\|Tx\| \leqslant M\|x\|. \tag{7.1.3}$$

(3) T 是连续的线性算子.

证明 (1)⇒(2). 设 T 是有界线性算子, 则 T 把单位球面

$$S = \{y \mid y \in X, \|y\| = 1\}$$

映射成一个有界集, 所以有常数 $M \geqslant 0$, 使 $\forall y \in S$, 有 $\|Ty\| \leqslant M$. 当 $x = \theta$ 时, (7.1.3)式自然成立. 当 $x \in X - \{\theta\}$ 时, 作 $y = \frac{x}{\|x\|}$, 则 $y \in S$, 从而

$$\left\| T\frac{x}{\|x\|} \right\| = \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \leqslant M,$$

因此(7.1.3)对一切 $x \in X$ 成立.

(2)⇒(3). 设 $\{x_n\} \subset X$, 且 $x_n \to \theta$, 由 (7.1.3) 立即可知 $Tx_n \to \theta$, 即 T 在 $x = \theta$ 点连续. 从而 T 在 X 上连续.

(3)⇒(1). 反证法. 假若 T 不是有界的, 则必存在正数 M_0 及 X 中的有界集 $A \subset O(\theta, M_0)$, 使得 $TA = \{Tx \mid x \in A\}$ 不是 Y 中的有界集, 即对每个自然数 n, 存在 $x_n \in A$, 使得 $\|Tx_n\| \geqslant nM_0$. 令

$$y_n = \frac{x_n}{n\|x_n\|} \quad (n = 1, 2, \cdots),$$

则 $\|y_n\| = \frac{1}{n} \to 0 \quad (n \to \infty)$, 从而 $y_n \to \theta$, 然而

$$\|Ty_n\| = \frac{\|Tx_n\|}{n\|x_n\|} \geqslant \frac{nM_0}{nM_0} = 1, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

这与 T 在 θ 点连续的假设相矛盾, 所以 T 是有界的. 证毕.

因此, 对赋范线性空间中的线性算子, 以后可以用(7.1.3) 式作为连续性或有界性的定义.

下面我们建立算子范数的概念.

设 X、Y 是两个赋范线性空间, T 是 X 到 Y 的有界线性算子,

任取 $x_0\in X, x_0\neq\theta$，称

$$\frac{\|Tx_0\|}{\|x_0\|}$$

为 T 在 x_0 方向的伸张系数. 沿 x_0 方向取 x，即 $x=\alpha x_0$（α 为数），当 $\alpha\neq 0$ 时，

$$\frac{\|Tx\|}{\|x\|}=\frac{\|T(\alpha x_0)\|}{\|\alpha x_0\|}=\frac{|\alpha|\,\|Tx_0\|}{|\alpha|\,\|x_0\|}=\frac{\|Tx_0\|}{\|x_0\|}.$$

这说明沿 x_0 方向，算子 T 的伸张系数是一个定数. 由定理7.1.2知，T 的一切方向的伸张系数所构成的数集

$$S=\left\{\frac{\|Tx\|}{\|x\|}\,\middle|\, x\in X,\ x\neq\theta\right\}$$

是有界的，因而必有上确界，这个上确界就是我们所定义的算子 T 的范数.

定义 7.1.3 设 X、Y 是两个赋范线性空间，T 是 X 到 Y 的有界线性算子，称

$$\|T\|=\sup_{x\in X-\{\theta\}}\frac{\|Tx\|}{\|x\|}$$

为算子 T 的范数.

由定理 7.1.2 立即得到有界线性算子的范数是有限的.

引理 7.1.3 **设 X、Y 都是赋范线性空间，T 是 X 到 Y 的有界线性算子，则**

$$\|Tx\|\leqslant\|T\|\,\|x\|\quad(\forall x\in X), \tag{7.1.3'}$$

并且

$$\|T\|=\sup_{\|x\|=1}\|Tx\|=\sup_{\|x\|\leqslant 1}\|Tx\|. \tag{7.1.4}$$

证明 (7.1.3′)是显然的. 今证(7.1.4). 事实上，由(7.1.3′)立即可得

$$\|T\|\geqslant\sup_{\|x\|\leqslant 1}\|Tx\|\geqslant\sup_{\|x\|=1}\|Tx\|.$$

另一方面，$\forall y\in X-\{0\}$，由于$\frac{y}{\|y\|}$是范数为1的向量，因此

$$\left\|T\frac{y}{\|y\|}\right\|\leqslant\sup_{\|x\|=1}\|Tx\|,$$

上式左边取上确界后得到 $\|T\|\leqslant\sup_{\|x\|=1}\|Tx\|$. 由此得到(7.1.4). 证毕.

显然，当 $X=Y,T=I$(单位算子)时，$\|T\|=1$.

现在举一个具体空间中具体算子范数求法的例子.

例 6 在 $L[a,b]$上定义算子T如下:

$$(Tf)(x)=\int_a^x f(t)dt\quad(\forall f\in L[a,b]).\qquad(7.1.5)$$

(1) 把T视为$L[a,b]$到$C[a,b]$的算子，求$\|T\|$;

(2) 把T视为$L[a,b]$到$L[a,b]$的算子，求$\|T\|$.

解 算子T的线性是显然的. 下面分别求$\|T\|$.

(1) 设$T: L[a, b]\to C[a, b]$. 任取$f\in L[a,b]$，由于$Tf\in C[a,b]$，从而

$$\|Tf\|=\max_{a\leqslant x\leqslant b}|(Tf)(x)|=\max_{a\leqslant x\leqslant b}\left|\int_a^x f(t)dt\right|$$

$$\leqslant\max_{a\leqslant x\leqslant b}\int_a^x|f(t)|dt\leqslant\int_a^b|f(t)|dt=\|f\|,$$

由此可知T是有界的，并且$\|T\|\leqslant1$. 另一方面，取 $f_0(t)=\frac{1}{b-a}$，$t\in[a,b]$，则$f_0\in L[a,b]$，并且

$$\|f_0\|=\int_a^b|f_0(t)|dt=\int_a^b\frac{1}{b-a}dt=1,$$

于是

$$\|T\|=\sup_{\|f\|=1}\|Tf\|\geqslant\|Tf_0\|=\max_{a\leqslant x\leqslant b}\int_a^x\frac{1}{b-a}dt$$

$$=\int_a^b\frac{1}{b-a}dt=1.$$

因此$\|T\|=1$.

(2) 设T: $L[a,b]\to L[a,b]$. 任取 $f\in L[a,b]$, 由于 $Tf\in L[a,b]$,从而

$$\|Tf\|=\int_a^b\left|\int_a^x f(t)dt\right|dx\leqslant\int_a^b\int_a^x|f(t)|dt\,dx$$
$$\leqslant\int_a^b\int_a^b|f(t)|dt\,dx=(b-a)\|f\|,$$

因此,T是有界的, 并且$\|T\|\leqslant b-a$. 另一方面, 对任何使得$a+\frac{1}{n}<b$的自然数n,作函数

$$f_n(x)=\begin{cases}n, & \text{当 } x\in\left[a,a+\frac{1}{n}\right]\text{时},\\ 0, & \text{当 } x\in\left(a+\frac{1}{n},b\right]\text{时}.\end{cases}$$

显然,$f_n\in L[a,b]$,$\|f_n\|=1$,而且

$$\begin{aligned}\|Tf_n\|&=\int_a^b\left|\int_a^x f_n(t)dt\right|dx\\&=\int_a^{a+\frac{1}{n}}n(x-a)dx+\int_{a+\frac{1}{n}}^b\left|\int_a^{a+\frac{1}{n}}n\,dt+\int_{a+\frac{1}{n}}^x 0\,dt\right|dx\\&=\frac{1}{2n}+b-a-\frac{1}{n}\\&=b-a-\frac{1}{2n},\end{aligned}$$

所以又有$\|T\|\geqslant\sup\limits_{n>\frac{1}{b-a}}\|Tf_n\|=b-a$. 因此$\|T\|=b-a$.

例6告诉我们,虽然形式上是一样的算子(例如都是由(7.1.5)式定义的积分算子),但由于视为不同空间的映射, 它们的范数未必相同.

一般说来, 求一个具体算子的范数并不容易,因此,在很多场

合只能对算子的范数作出估计.

下面举一个无界线性算子的例子，从而说明并非每个线性算子都是有界的.

例 7 设X是$C[a, b]$中具有连续导函数的函数全体所成的线性子空间，显然X按$C[a,b]$的范数也是一个赋范线性空间. 令

$$(Tx)(t)=\frac{d}{dt}x(t) \quad (\forall x(t)\in X),$$

则T是X到$C[a,b]$中的线性算子. T是无界的. 事实上，在X中取$x_n(t)=e^{-n(t-a)}(n=1,2,\cdots)$，则$\forall n\in\mathbb{N}$，$\|x_n\|=\max\limits_{a\leqslant t\leqslant b}|e^{-n(t-a)}|=1$，然而

$$(Tx_n)(t)=-ne^{-n(t-a)},$$

即

$$\|Tx_n\|=\max_{a\leqslant t\leqslant b}|-ne^{-n(t-a)}|=n\to\infty(n\to\infty).$$

所以T是一个无界的线性算子.

对于赋范线性空间X上的线性泛函f，我们总视f为X到数域$\mathbb{K}$所成的赋范(即对$\alpha\in\mathbb{K}$，规定$\|\alpha\|=|\alpha|$)线性空间的线性算子. 因此，关于泛函的连续性、有界性以及它们之间的关系就不再复述. 对于赋范线性空间X上的连续线性泛函f，由于$f(x)\in\mathbb{K}(\forall x\in X)$，所以

$$\|f(x)\|=|f(x)|,$$

因而f的范数就是

$$\|f\|=\sup_{\|x\|=1}|f(x)|. \qquad (7.1.6)$$

对于线性泛函，还有下面的和连续性等价的定理.

定理7.1.4 **设X是赋范线性空间，f是X上的线性泛函，则**

(1) f是连续的$\Leftrightarrow$ f的零空间$\mathscr{N}(f)=\{x\in X\mid f(x)=0\}$是$X$的闭线性子空间.

(2) 非零线性泛函 f 是不连续的$\Leftrightarrow \mathscr{N}(f)$在 X 中稠密.

证明 (1) "$\Rightarrow$":设 f 是连续线性泛函,又设 $x_n\in\mathscr{N}(f)$ $(n=1,2,\cdots)$, $x_n\to x$. 由 f 的连续性可得 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=0$,因此 $x\in\mathscr{N}(f)$,所以 $\mathscr{N}(f)$是闭集. 又$\mathscr{N}(f)$显然是 X 的线性子空间,所以 $\mathscr{N}(f)$是 X 的闭线性子空间.

"$\Leftarrow$": 设$\mathscr{N}(f)$是闭集. 如果 f 不是有界线性泛函,则对每个自然数 n,必有 $x_n\in X$, $\|x_n\|=1$,使得 $|f(x_n)|\geqslant n$.

令

$$y_n=\frac{x_1}{f(x_1)}-\frac{x_n}{f(x_n)},$$

则 $f(y_n)=0$,即 $y_n\in\mathscr{N}(f)$,并且

$$\left\|y_n-\frac{x_1}{f(x_1)}\right\|=\left\|-\frac{x_n}{f(x_n)}\right\|=\frac{1}{|f(x_n)|}\to 0(n\to\infty),$$

即 $y_n\to\dfrac{x_1}{f(x_1)}$. 但是$f\left(\dfrac{x_1}{f(x_1)}\right)=1$,从而$\dfrac{x_1}{f(x_1)}\overline{\in}\mathscr{N}(f)$. 这和$\mathscr{N}(f)$是闭集矛盾. 因此 f 是有界的.

(2) "$\Rightarrow$":设 f 是不连续的. 由定理 7.1.1, f必在 $x=\theta$ 点不连续,从而存在$\{x_n\}\subset X$, $x_n\to\theta$, 但$|f(x_n)|\geqslant\varepsilon_0>0$(这里 ε_0 为某个常数). $\forall x\in X$,显然

$$x-\frac{f(x)}{f(x_n)}x_n\in\mathscr{N}(f),$$

并且

$$x-\frac{f(x)}{f(x_n)}x_n\to x(n\to\infty),$$

所以$\mathscr{N}(f)$在 X 中稠密.

"$\Leftarrow$":反证法. 假如 f 是连续的,由$\mathscr{N}(f)$在 X 中稠密知, $\forall x\in X$, $\exists\{x_n\}\subset\mathscr{N}(f)$, 使 $x_n\to x$,从而 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=0$,这与假设$f$非零矛盾. 证毕.

7.1.3 线性算子空间

设 X、Y 是数域 $\mathbb{K}$ 上的两个线性空间，我们以 $\mathscr{L}(X,Y)$ 表示由 X 到 Y 的线性算子的全体．类似于函数空间的线性运算，我们在 $\mathscr{L}(X,Y)$ 上规定线性运算如下：$\forall A,B\in\mathscr{L}(X,Y)$，$\forall\alpha\in\mathbb{K}$，令

$$(A+B)(x)=Ax+Bx\quad(\forall x\in X),$$
$$(\alpha A)(x)=\alpha(Ax)\quad(\forall x\in X).$$

显然，$A+B,\alpha A\in\mathscr{L}(X,Y)$．称 $A+B$ 为算子 A 与 B 的和，αA 为数 α 与算子 A 的积．易知 $\mathscr{L}(X,Y)$ 按上述线性运算成为一个线性空间．今后如不另外说明，对算子空间总是采取上述加法与数乘运算．

设 X、X_1、X_2 都是数域 $\mathbb{K}$ 上的线性空间，$T_1\in\mathscr{L}(X,X_1)$，$T_2\in\mathscr{L}(X_1,X_2)$．作 X 到 X_2 的算子 $T_2\cdot T_1$ 如下：

$$(T_2\cdot T_1)x=T_2(T_1x)\quad(x\in X).$$

显然，$T_2\cdot T_1\in\mathscr{L}(X,X_2)$，称 $T_2\cdot T_1$ 为算子 T_1 与 T_2 的积，简记为 T_2T_1．类似地，我们可以规定有限个线性算子的积 $T_1T_2\cdots T_n$ 及算子的幂 $T^n=\overbrace{T\cdot T\cdot\cdots\cdot T}^{n\text{个}}$．记 $T^0=I$（恒等算子）．

如果 $X=X_1=X_2$，则 T_2T_1 与 T_1T_2 在 X 上都有意义，一般地未必有 $T_2T_1=T_1T_2$，如果此等式成立，则称算子 T_2 与 T_1 是可交换的．

例 8 在 $C[0,1]$ 上定义算子 T_1、T_2 如下：

$$(T_1x)(t)=\int_0^t x(s)ds,\quad x\in C[0,1],$$
$$(T_2x)(t)=tx(t),\ x\in C[0,1],$$

则 T_1 与 T_2 是不可交换的．

证明 显然 T_1、T_2 都是 $C[0,1]$ 到 $C[0,1]$ 的线性算子．

易见

$$(T_2T_1x)(t)=t\int_0^t x(s)ds,$$

$$(T_1T_2x)(t)=\int_0^t sx(s)ds.$$

若取 $x_0(t)\equiv 1(t\in[0,1])$，则

$$(T_2T_1x_0)(t)=t^2$$

$$(T_1T_2x_0)(t)=\frac{t^2}{2}.$$

因此 $T_1T_2x_0\neq T_2T_1x_0$，故 $T_2T_1\neq T_1T_2$.

线性算子的积具有下列性质：

设 X、X_1、X_2、X_3 都是数域 $\mathbb{K}$ 上的线性空间，T_1、$T'_1\in\mathscr{L}(X,X_1)$，$T_2$、$T'_2\in\mathscr{L}(X_1,X_2)$，$T_3\in\mathscr{L}(X_2,X_3)$. 则

1° $(T_3T_2)T_1=T_3(T_2T_1)$;

2° $(\alpha T_2)T_1=\alpha(T_2T_1)\quad(\alpha\in\mathbb{K})$,

$T_2(\alpha T_1)=\alpha(T_2T_1)\quad(\alpha\in\mathbb{K})$;

3° $T_2(T_1+T'_1)=T_2T_1+T_2T'_1$,

$(T_2+T'_2)T_1=T_2T_1+T'_2T_1$.

性质 1°、2°、3° 都比较明显，这里只证 1°. $\forall x\in X$，据算子积的定义，有

$$\begin{aligned}[(T_3T_2)T_1]x&=(T_3T_2)(T_1x)=T_3[T_2(T_1x)]\\&=T_3[(T_2T_1)x]=[T_3(T_2T_1)]x,\end{aligned}$$

因此 $(T_3T_2)T_1=T_3(T_2T_1)$. 证毕.

7.1.4 有界线性算子空间

设 X、Y 都是数域 $\mathbb{K}$ 上的赋范线性空间，我们以 $\mathscr{B}(X,Y)$ 表示由 X 到 Y 的有界线性算子的全体.

定理 7.1.5 $\mathscr{B}(X,Y)$ **按通常的线性运算及算子范数成为一**

个赋范线性空间.

证明 $\forall A,B\in\mathscr{B}(X,Y)$, $\forall x\in X$, 由于

$$\begin{aligned}\|(A+B)x\|&=\|Ax+Bx\|\leqslant\|Ax\|+\|Bx\|\\&\leqslant\|A\|\|x\|+\|B\|\|x\|=(\|A\|+\|B\|)\|x\|,\end{aligned}$$

所以 $A+B\in\mathscr{B}(X,Y)$, 并且

$$\begin{aligned}\|A+B\|&=\sup_{\|x\|=1}\|(A+B)x\|\leqslant\sup_{\|x\|=1}\|Ax\|+\sup_{\|x\|=1}\|Bx\|\\&=\|A\|+\|B\|.\end{aligned}$$

又 $\forall\alpha\in\mathbb{K}$, $\forall x\in X$, 由于

$$\|(\alpha A)x\|=\|\alpha(Ax)\|=|\alpha|\|Ax\|\leqslant|\alpha|\|A\|\|x\|,$$

所以 $\alpha A\in\mathscr{B}(X,Y)$, 并且

$$\begin{aligned}\|\alpha A\|&=\sup_{\|x\|=1}\|(\alpha A)x\|=|\alpha|\sup_{\|x\|=1}\|Ax\|\\&=|\alpha|\|A\|.\end{aligned}$$

最后, $\|A\|=\sup\limits_{\|x\|=1}\|Ax\|\geqslant 0$, 而且

$$\|A\|=0\Leftrightarrow Ax=\theta\quad(\forall x\in X)\Leftrightarrow A=\theta.$$ 证毕.

今后称 $\mathscr{B}(X,Y)$ 为有界线性算子空间. 当 $X=Y$ 时, 我们将 $\mathscr{B}(X,X)$ 记为 $\mathscr{B}(X)$. 特别用 X^* 表示 $\mathscr{B}(X,\mathbb{K})$, 即 X^* 表示赋范线性空间 X 上的连续线性泛函全体. 由定理 7.1.5 知, X^* 按通常的线性运算及泛函的范数构成一个赋范线性空间, 称为 X 的共轭空间.

定理 7.1.6 若 Y 是 Banach 空间, 则 $\mathscr{B}(X,Y)$ 是 Banach 空间.

证明 设 $\{T_n\}$ 是 $\mathscr{B}(X,Y)$ 中的基本列, 即 $\forall\varepsilon>0$, $\exists$ 自然数 $N=N(\varepsilon)$, 使得当 $n,m\geqslant N$ 时, $\|T_n-T_m\|<\varepsilon$. 因此 $\forall x\in X$, 当 n, $m\geqslant N$ 时,

$$\begin{aligned}\|T_nx-T_mx\|&=\|(T_n-T_m)x\|\leqslant\|T_n-T_m\|\|x\|\\&\leqslant\varepsilon\|x\|,\end{aligned}\tag{7.1.7}$$

从而$\{T_n x\}$是Y中的基本列．由于Y是完备的，所以$\exists y\in Y$，使得$y=\lim\limits_{n\to\infty}T_n x$．作$X\to Y$的算子$T$如下：$\forall x\in X$，令

$$Tx=y=\lim_{n\to\infty}T_n x.$$

易知T是X到Y的线性算子．在(7.1.7)式中令$m\to\infty$，就得到

$$\|T_n x-Tx\|\leqslant\varepsilon\|x\|\quad(n\geqslant N).$$

由于ε不依赖于x，所以上式说明，$T_N-T\in\mathscr{B}(X,Y)$，从而$T=T_N-(T_N-T)\in\mathscr{B}(X,Y)$，并且当$n\geqslant N$时，

$$\|T_n-T\|=\sup_{\|x\|=1}\|(T_n-T)x\|\leqslant\varepsilon.$$

所以$\lim\limits_{n\to\infty}\|T_n-T\|=0$．证毕．

由于$\mathbf{K}$按绝对值作范数构成Banach空间，所以立即得到下面的结论．

推论7.1.7　赋范线性空间X的共轭空间X^*是Banach空间．

定理7.1.8　设X、Y、Z都是赋范线性空间，$B\in\mathscr{B}(X,Y)$，$A\in\mathscr{B}(Y,Z)$，则$AB\in\mathscr{B}(X,Z)$，且

$$\|AB\|\leqslant\|A\|\|B\|. \tag{7.1.8}$$

证明　$\forall x\in X$，由于

$$\|ABx\|\leqslant\|A\|\|Bx\|\leqslant\|A\|\|B\|\|x\|,$$

所以$AB\in\mathscr{B}(X,Z)$，而且$\|AB\|\leqslant\|A\|\|B\|$．证毕．

习　题　7.1

1．设T_1、T_2：$R^2\to R^2$分别由下式定义：

$$T_1:(x_1,x_2)\longmapsto(x_1,0),$$

$$T_2:(x_1,x_2)\longmapsto(x_2,x_1).$$

试证T_1、T_2是有界线性算子，求出它们的范数，并说明它们的几何意义．

2．证明　$C^{(1)}[a,b]$到$C[a,b]$的算子

$$T: x(t) \longmapsto \frac{d}{dt} x(t)$$

是连续线性算子，并求出它的范数.

3. 设X、Y是赋范线性空间，$T: X \to Y$是线性算子. 试证：若T有界，则T的零子空间

$$\mathscr{N}(T) = \{x \mid x \in X, Tx = \theta\}$$

是X的闭子空间. 又问：当$\mathscr{N}(T)$是X的闭子空间时，T是否有界？为什么？

4. 设$\alpha_1, \alpha_2, \cdots$是一列数，$\sup\limits_n |\alpha_n| < +\infty$. 令

$$T: x \longmapsto (y_1, y_2, \cdots) \quad (\forall x = (x_1, x_2, \cdots) \in l^1),$$

其中$y_n = \alpha_n x_n (n = 1, 2, \cdots)$. 证明$T$是$l^1$到$l^1$的有界线性算子，并且$\|T\| = \sup\limits_n |\alpha_n|$.

5. 设无穷矩阵(a_{ij}) $(i, j = 1, 2, \cdots)$满足

$$\sup_i \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}| < +\infty,$$

令 $$T: x \longmapsto (y_1, y_2, \cdots) \quad (\forall x = (x_1, x_2, \cdots) \in l^\infty),$$

其中 $y_i = \sum\limits_{j=1}^{\infty} a_{ij} x_j (i = 1, 2, \cdots)$. 证明$T$是$l^\infty$到$l^\infty$的有界线性算子，并且$\|T\| = \sup\limits_i \sum\limits_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|$.

6. 设$p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. 定义

$$T: x \longmapsto (y_1, y_2, \cdots) \quad (\forall x = (x_1, x_2, \cdots) \in l^p),$$

其中 $y_k = \sum\limits_{j=1}^{\infty} t_{kj} x_j (k = 1, 2, \cdots)$，而且

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |t_{kj}|^q \right)^{\frac{p}{q}} < +\infty.$$

证明T是l^p到l^p的有界线性算子.

7. 设X是赋范线性空间，Y是Banach空间，G是X的稠密的线性子空间，A是G到Y的有界线性算子，则A必可唯一地延拓成X到Y的有界线性算子B，并且保持范数不变，即$\|B\| = \|A\|$.

8. 设X是实赋范线性空间，f是X上的非零实值线性泛函. 求证：不存在开球$O(x_0,\delta)$，使得$f(x_0)$是$f(x)$在$O(x_0,\delta)$中的极大值或极小值.

§7.2 Hahn-Banach 泛函延拓定理

§7.1 例 1 告诉我们，n维线性空间上的线性泛函和有序n元数组一一对应，并给出了线性泛函的一般表示形式. §7.1 例 5 又告诉我们，有限维赋范线性空间上的任何线性泛函都是连续的. 因此，对于有限维赋范线性空间上连续线性泛函的情况，我们已经有了一个基本的了解. 那末，我们自然要问：任何一个无限维赋范线性空间X上是否一定有非零连续线性泛函，也就是说X的共轭空间X^*中是否一定有非零元素？本节从线性泛函的延拓入手解决这个问题. 有趣的是，从几何上看，这个线性泛函的延拓性质表现为凸集的分离性质. 而这个分离性质又是研究与凸集有关的 Banach 空间几何学的基本出发点.

本节介绍的 Hahn-Banach 泛函延拓定理是泛函分析的最基本定理之一，无论在纯粹数学中，还是在应用数学中，都有广泛的应用.

7.2.1 线性泛函的延拓定理

定义 7.2.1 设X为线性空间，p是定义在X上的实值函数.

(i) 如果

$$p(x+y)\leqslant p(x)+p(y)\quad(\forall x,y\in X),$$

则称p为次可加泛函.

(ii) 如果

$$p(\alpha x)=\alpha p(x)\quad(\forall\alpha\geqslant 0,\forall x\in X),$$

则称p为正齐性泛函.

(iii) 如果

$$p(\alpha x)=|\alpha|p(x)\quad(\forall\alpha\in\mathbf{K},\forall x\in X),$$

则称 p 为对称泛函.

如果 p 具有(i)、(ii)两个性质，则称 p 为次可加正齐性泛函. 如果 p 具有(i)、(iii)两个性质，则称 p 为次可加对称泛函.

注 线性空间 X 上的次可加对称泛函 $p(x)$ 是非负的.

事实上，$\forall x\in X$，

$$\begin{aligned}p(x)&=p(2x-x)\leqslant p(2x)+p(-x)=2p(x)+p(x)\\&=3p(x),\end{aligned}$$

从而导出 $2p(x)\geqslant 0$，即 $p(x)\geqslant 0\quad(\forall x\in X)$.

例 1 线性空间 X 上的半范数 $p(\cdot)$ 及范数 $\|\cdot\|$ 都是次可加对称泛函.

定理 7.2.1(实 Hahn-Banach 定理) 设 X 是实线性空间，p 是定义在 X 上的次可加正齐性泛函，X_0 是 X 的线性子空间，f_0 是 X_0 上的实线性泛函并满足 $f_0(x)\leqslant p(x)\quad(\forall x\in X_0)$，则必存在一个定义在 X 上的实线性泛函 f，满足：

(1) $f(x)\leqslant p(x)\quad(\forall x\in X)$ **(受 p 控制条件)**；

(2) $f(x)=f_0(x)\quad(\forall x\in X_0)$ **(延拓条件)**.

证明 $\forall x_0\in X-X_0$，令

$$X_1=\{x+\alpha x_0\mid x\in X_0,\alpha\in\mathbb{R}\}=\mathrm{span}(X_0\cup\{x_0\}),$$

则 X_1 是 X 的线性子空间，且 $X_1\supset X_0$. 先将 f_0 延拓到 X_1 上，设延拓后的线性泛函为 f_1，那末

$$f_1(x+\alpha x_0)=f_0(x)+\alpha f_1(x_0)\quad(\forall x\in X_0,\forall\alpha\in\mathbb{R}).\tag{7.2.1}$$

可见问题只在于决定 $f_1(x_0)$ 的值. 既然要求 f_1 满足受 p 控制条件，所以

$$f_1(x+\alpha x_0)\leqslant p(x+\alpha x_0)\quad(\forall x\in X_0,\forall\alpha\in\mathbb{R}).\tag{7.2.2}$$

当 $\alpha=0$ 时，(7.2.2)式显然成立. 因此只须讨论 $\alpha\neq 0$ 的情形. 上式两边同除以 $|\alpha|\ (\alpha\neq 0)$，推出它等价于

$$\begin{cases} f_1(x_0+z)\leqslant p(x_0+z) & (\forall z\in X_0), \\ f_1(-x_0-y)\leqslant p(-x_0-y) & (\forall y\in X_0) \end{cases}$$

或

$$-f_0(y)-p(-x_0-y)\leqslant f_1(x_0)\leqslant -f_0(z)+p(x_0+z)$$
$$(\forall y, z\in X_0).$$

于是，为了能够取到适合(7.2.2)的 $f_1(x_0)$，必须且仅须

$$\sup_{y\in X_0}\{-f_0(y)-p(-x_0-y)\}\leqslant \inf_{z\in X_0}\{-f_0(z)+p(x_0+z)\} \tag{7.2.3}$$

然而(7.2.3)是可以保证成立的. 这是因为 $\forall y, z\in X_0$,

$$f_0(z)-f_0(y)=f_0(z-y)\leqslant p(z-y)$$
$$\leqslant p(x_0+z)+p(-x_0-y),$$

所以

$$-f_0(y)-p(-x_0-y)\leqslant -f_0(z)+p(x_0+z) \quad (\forall y, z\in X_0). \tag{7.2.4}$$

显然(7.2.4)蕴含(7.2.3). 今任意取定 $f_1(x_0)$为(7.2.3) 两端的中间值，就能根据(7.2.1)得出 f_0 在 X_1 上的延拓f_1. 由于(7.2.3)两端未必相等，其中间值 $f_1(x_0)$的取法一般不唯一，因此这种延拓一般也不唯一.

剩下的问题是怎样把 f_0 逐步延拓到整个X上去，这需要用 Zorn 引理.

设G是满足下面三个条件的线性泛函 g 的全体:

(i) $\mathscr{D}(g)$是X的线性子空间;

(ii) g 是 f_0 的延拓，即$\mathscr{D}(g)\supset X_0$ 且 $g(x)=f_0(x)$ $(\forall x\in X_0)$;

(iii) $g(x)\leqslant p(x)$ $\quad(\forall x\in \mathscr{D}(g))$.

在G中规定序关系如下: g_1、$g_2\in G$, $g_1\leqslant g_2$ 是指$\mathscr{D}(g_1)\subset\mathscr{D}(g_2)$ 且 $g_2(x)=g_1(x)(\forall x\in\mathscr{D}(g_1))$. 于是 G 成为一个半序集. 设M是 G

的任意一个全序子集，令

$$D=\bigcup_{g\in M}\mathscr{D}(g).$$

在D上定义泛函φ如下：$\forall x\in D$，必有 $g\in M$，使得 $x\in\mathscr{D}(g)$，这时规定 $\varphi(x)=g(x)$.

今证φ是M的上确界：

1° 证明φ在D上有确定的意义，即如果 $x\in D$，并且有 $g_1, g_2\in M$，使得 $x\in\mathscr{D}(g_1)\cap\mathscr{D}(g_2)$时，必然有 $g_1(x)=g_2(x)=\varphi(x)$. 事实上，由于M是全序集，不妨设 $g_1\leqslant g_2$，从而 $g_1(x)=g_2(x)$.

2° 证明D是X的线性子空间，并且φ是D上的线性泛函. $\forall x, y\in D, \forall\alpha, \beta\in\mathbb{R}$，必有 $g_1, g_2\in M$，使得 $x\in\mathscr{D}(g_1), y\in\mathscr{D}(g_2)$，由于$M$是全序集，不妨设 $g_1\leqslant g_2$，这时 x，$y\in\mathscr{D}(g_2)$，从而 $\alpha x+\beta y\in\mathscr{D}(g_2)\subset D$，并且

$$\begin{aligned}\varphi(\alpha x+\beta y)&=g_2(\alpha x+\beta y)=\alpha g_2(x)+\beta g_2(y)\\&=\alpha\varphi(x)+\beta\varphi(y).\end{aligned}$$

3° 证明φ是f_0的延拓，并且 $\varphi(x)\leqslant p(x)\quad(\forall x\in D)$. 因为当 $x\in X_0$ 时，$\forall g\in M$，$g(x)=f_0(x)$，自然 $\varphi(x)=f_0(x)$. 又 $\forall x\in D$，$\exists g\in M$，使 $x\in\mathscr{D}(g)$，从而 $\varphi(x)=g(x)\leqslant p(x)$.

以上三步说明 $\varphi\in G$.

4° 证明φ是M的上确界. $\forall g\in M$，显然 $\mathscr{D}(g)\subset D$ 且 $\varphi(x)=g(x)(\forall x\in\mathscr{D}(g))$，即 $g\leqslant\varphi$. 这说明φ是M的上界. 设 φ^* 是M的任一上界，则 $\forall g\in M$，有 $g\leqslant\varphi^*$，即

$$\mathscr{D}(g)\subset\mathscr{D}(\varphi^*)\text{且}\varphi^*(x)=g(x)\quad(\forall x\in\mathscr{D}(g)).$$

于是 $D=\bigcup\limits_{g\in M}\mathscr{D}(g)\subset\mathscr{D}(\varphi^*)$，且当 $x\in D$ 时，必有 $g\in M$，使 $x\in\mathscr{D}(g)$，从而

$$\varphi^*(x)=g(x)=\varphi(x),$$

即 $\varphi \leqslant \varphi^*$. 因此 φ 是 M 的上确界.

由 Zorn 引理知道, G 有极大元. 设 f 是 G 的一个极大元, 只要证明 $\mathscr{D}(f)=X$ 就可以了. 如果 $\mathscr{D}(f)\neq X$, 根据第一段的证明, 必有 $g^*\in G$, 使得 $f\leqslant g^*$ 且 $f\neq g^*$, 这和 f 是 G 的极大元矛盾. 因此 $\mathscr{D}(f)=X$. 证毕

由于复线性空间可以看作实线性空间, 复空间上线性泛函的实部和虚部都可以看作是实线性泛函, 因此定理 7.2.1 作适当的修改后对于复线性空间仍然成立.

定理 7.2.2(复 Hahn-Banach 定理) **设 X 是复线性空间, p 是 X 上的次可加对称泛函, X_0 是 X 的线性子空间, f_0 是 X_0 上的线性泛函并且满足 $|f_0(x)|\leqslant p(x)(\forall x\in X_0)$, 则必存在一个定义在 X 上的线性泛函 f, 满足:**

(1) $|f(x)|\leqslant p(x) \quad (\forall x\in X)$;

(2) $f(x)=f_0(x) \quad (\forall x\in X_0)$.

证明 把 X 看成实线性空间, 相应地把 X_0 也看成 X 的实线性子空间. 作 X_0 上的实函数

$$\varphi_0(x)=\frac{1}{2}\left[f_0(x)+\overline{f_0(x)}^{①}\right] \quad (\forall x\in X_0),$$

$$\psi_0(x)=\frac{1}{2i}\left[f_0(x)-\overline{f_0(x)}\right] \quad (\forall x\in X_0).$$

显然, φ_0、ψ_0 是 X_0 上的实线性泛函, 并且

$$f_0(x)=\varphi_0(x)+i\psi_0(x) \quad (\forall x\in X_0),$$

$\varphi_0(x)$、$\psi_0(x)$ 分别称为 $f_0(x)$ 的实部、虚部. 由于

$$i[\varphi_0(x)+i\psi_0(x)]=if_0(x)=f_0(ix)=\varphi_0(ix)+i\psi_0(ix) \quad (\forall x\in X_0),$$

① $\overline{f_0(x)}$ 表示 $f_0(x)$ 的共轭复数, 下同.

从而

$$\varphi_0(ix) = -\psi_0(x) \quad (\forall x \in X_0). \tag{7.2.5}$$

于是只要考虑 X_0 上的实线性泛函 φ_0 的延拓就够了. 由于

$$\varphi_0(x) \leqslant |f_0(x)| \leqslant p(x) \quad (\forall x \in X_0),$$

从而根据定理 7.2.1,必有 X 上的实线性泛函 φ,使得

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) \quad (\forall x \in X_0), \tag{7.2.6}$$

并且

$$\varphi(x) \leqslant p(x) \quad (\forall x \in X). \tag{7.2.7}$$

令

$$f(x) = \varphi(x) - i\varphi(ix) \quad (\forall x \in X),$$

则 $\forall x, y \in X$,有

$$\begin{aligned} f(x+y) &= \varphi(x+y) - i\varphi(i(x+y)) \\ &= \varphi(x) + \varphi(y) - i[\varphi(ix) + \varphi(iy)] \\ &= f(x) + f(y), \end{aligned}$$

且 $\forall \alpha \in \mathbb{R}$,有

$$f(\alpha x) = \varphi(\alpha x) - i\varphi(i(\alpha x)) = \alpha f(x) \quad (\forall x \in X).$$

又因为

$$f(ix) = \varphi(ix) + i\varphi(x) = if(x) \quad (\forall x \in X),$$

所以对任何复数 $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2 \quad (\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R})$,有

$$\begin{aligned} f(\alpha x) &= f((\alpha_1 + i\alpha_2)x) = f(\alpha_1 x) + f(i\alpha_2 x) \\ &= \alpha_1 f(x) + i\alpha_2 f(x) = \alpha f(x) \quad (\forall x \in X), \end{aligned}$$

因此 f 是定义在 X 上的复线性泛函.

只须再证 f 满足定理中的(1)、(2)两个条件. 据公式(7.2.6)和(7.2.5),有

$$f(x) = \varphi_0(x) - i\varphi_0(ix) = f_0(x) \quad (\forall x \in X_0),$$

即 f 满足(2). 剩下的还要证明 f 满足(1). $\forall x \in X$, 若 $f(x) = 0$,则 f 自然满足(1);若 $f(x) \neq 0$,令

$$\theta = \arg f(x),$$

根据(7.2.7)和 p 的对称性,有

$$|f(x)| = e^{-i\theta}f(x) = f(e^{-i\theta}x) = \varphi(e^{-i\theta}x) \leqslant p(e^{-i\theta}x) = p(x),$$

即

$$|f(x)| \leqslant p(x) \quad (\forall x \in X). \text{ 证毕.}$$

由定理 7.2.1 和定理 7.2.2 可立即得到下面的线性泛函存在定理.

定理 7.2.3 设 X 是线性空间,如果 $X \neq \{\theta\}$, 则在 X 上必存在非零线性泛函.

证明 当 X 是实空间时,任取 $x_0 \in X - \{\theta\}$. 令 $X_0 = \text{span}\{x_0\}$, 又任取非零实数 c, 作 X_0 上的泛函

$$f_0: \alpha x_0 \mapsto \alpha c \quad (\text{即 } f_0(\alpha x_0) = \alpha c), \tag{7.2.8}$$

易知 f_0 是 X_0 上的非零线性泛函. 只要将定理 7.2.1 的证明中所有关于受 p 控制的讨论去掉,保留其余部分, 便可知道 f_0 必可延拓成 X 上的线性泛函 f, 显然 f 不是零泛函.

同样,当 X 是复空间时, 也只要将定理 7.2.2 中所有关于受 p 控制的讨论去掉,保留其余部分,便可知道本定理成立. 证毕.

下面讨论连续线性泛函的延拓问题.

定理 7.2.4(Hahn-Banach) **设 X 是赋范线性空间, X_0 是 X 的线性子空间, f_0 是定义在 X_0 上的有界线性泛函,则必存在 X 上的有界线性泛函 f, 满足:**

(1) $f(x) = f_0(x) \quad (\forall x \in X_0)$ **(延拓条件)**;

(2) $\|f\| = \|f_0\|_{X_0}$ **(保范条件)**,

其中 $\|f_0\|_{X_0}$ 表示 f_0 在 X_0 上的范数. (**注** 我们通常称满足(1)、(2)两个条件的 f 是 f_0 的保范延拓.)

证明 令 $p(x) = \|f_0\|_{X_0}\|x\| \quad (\forall x \in X)$, 则 $p(x)$ 是定义在 X 上的次可加对称泛函, 且 $|f_0(x)| \leqslant p(x)\ (\forall x \in X_0)$. 据定理 7.2.1 和

定理 7.2.2，必存在 X 上的线性泛函 f，满足

$$f(x)=f_0(x)\quad(\forall x\in X_0)\tag{7.2.9}$$

及

$$|f(x)|\leqslant p(x)=\|f_0\|_{X_0}\|x\|\quad(\forall x\in X).\tag{7.2.10}$$

据泛函范数的定义，(7.2.10)蕴含 $\|f\|\leqslant\|f_0\|_{X_0}$. 又由(7.2.9)知

$$\|f\|=\sup_{\substack{x\in X\\ \|x\|=1}}|f(x)|\geqslant\sup_{\substack{x\in X_0\\ \|x\|=1}}|f(x)|=\|f_0\|_{X_0},$$

因此 $\|f\|=\|f_0\|_{X_0}$. 证毕.

注 我们在证明定理 7.2.1 的过程中，已经指出所讨论的延拓并不唯一，由此可知，赋范线性空间的子空间上的连续线性泛函的保范延拓一般也不唯一.

例 2 设 $X=\mathbf{R}^2$，即 X 是点 $x=(x_1,x_2)$ 的全体，但规定 $\|x\|=|x_1|+|x_2|$，X 按此范数 $\|\cdot\|$ 成为赋范线性空间. 又设 $X_0=\{(x_1,0)\}$，f_0 是定义在 X_0 上的泛函：$f_0((x_1,0))=x_1$. 显然 f_0 是 X_0 上的连续线性泛函，而且 $|f_0((x_1,0))|=|x_1|=\|(x_1,0)\|$，即 $\|f_0\|_{X_0}=1$. 然而，对任何数 β，X 上的连续线性泛函

$$f((x_1,x_2))=x_1+\beta x_2\quad(\forall(x_1,x_2)\in X)$$

都是 f_0 的延拓. 由于

$$|f((x_1,x_2))|=|x_1+\beta x_2|\leqslant|x_1|+|\beta||x_2|$$
$$\leqslant\max(1,|\beta|)\|(x_1,x_2)\|,$$

并且 $\|f\|\geqslant\|f_0\|_{X_0}=1$，所以只要 $|\beta|<1$，f 都是 f_0 的保范延拓. 证毕.

推论 7.2.5 设 X 是赋范线性空间，M 是 X 的线性子空间，$x_0\in X$，且 $\rho(x_0,M)=d>0$，则必有 $f\in X^*$，满足

(1) $f(x)=0\qquad(\forall x\in M)$;

(2) $f(x_0)=d$;

(3) $\|f\|=1$.

证明 令 $X_0=\{x'+tx_0\,|\,x'\in M,\ t\in\mathbb{K}\}$，则 X_0 是 X 的线性子

空间，且 $\forall x\in X_0$，$\exists$ 唯一的 $(x', t)\in M\times\mathbb{K}$，使得 $x=x'+tx_0$. 定义

$$f_0(x)=td,$$

则 f_0 是 X_0 上的线性泛函，而且 f_0 满足(1)、(2)两个条件，即 $f_0(x)=0(\forall x\in M)$，$f_0(x_0)=d$. 又当 $x=x'+tx_0\in X-M$ 时，$t\neq 0$，于是

$$|f_0(x)|=|t|d=|t|\rho(x_0,M)\leqslant|t|\left\|x_0-\left(-\frac{x'}{t}\right)\right\|$$

$$=\|x'+tx_0\|=\|x\|,$$

所以 $\|f_0\|_{X_0}\leqslant 1$.

另一方面，取 $x_n'\in M(n=1,2,\cdots)$，使 $\|x_0-x_n'\|\to d\quad(n\to\infty)$，于是

$$d=|f_0(x_0)|=|f_0(x_0-x_n')|\leqslant\|f_0\|_{X_0}\|x_0-x_n'\|(\forall n\in\mathbf{N}),$$

令 $n\to\infty$，得到 $d\leqslant\|f_0\|_{X_0}d$，即 $\|f_0\|_{X_0}\geqslant 1$. 因此 $\|f_0\|_{X_0}=1$.

根据定理 7.2.4，必有 $f\in X^*$，使得 $f(x)=f_0(x)(\forall x\in X_0)$，且 $\|f\|=\|f_0\|_{X_0}=1$，自然 f 也满足(1)、(2)两个条件. 证毕.

推论7.2.6 设 X 是赋范线性空间，$\forall x_0\in X-\{\theta\}$，必 $\exists f\in X^*$，使得

$$f(x_0)=\|x_0\|,\text{ 且 }\|f\|=1.$$

证明 只要将推论 7.2.5 中的 M 取为 $\{\theta\}$ 就可以了. 证毕.

注 1 从推论 7.2.6 可以看出：任何赋范线性空间 $X(X\neq\{\theta\})$ 上必存在非零连续线性泛函.

注 2 推论 7.2.6 给出判别赋范线性空间 X 的零元的一种方法：$x_0=\theta\Leftrightarrow\forall f\in X^*$，有 $f(x_0)=0$.

推论 7.2.7 设 X 是赋范线性空间，$\forall x_0\in X$，必有

$$\|x_0\|=\sup_{\substack{f\in X^*\\\|f\|=1}}|f(x_0)|.$$

证明 当 $f\in X^*$，且 $\|f\|=1$ 时，显然

$$|f(x_0)|\leqslant\|f\|\|x_0\|=\|x_0\|,$$

因此 $\sup\limits_{\substack{f\in X^*\\ \|f\|=1}}|f(x_0)|\leqslant\|x_0\|$. 另一方面，据推论 7.2.6，必有 $f_0\in X^*$，$\|f_0\|=1$，使得 $f_0(x_0)=\|x_0\|$，从而

$$\sup_{\substack{f\in X^*\\ \|f\|=1}}|f(x_0)|\geqslant|f_0(x_0)|=\|x_0\|,$$

因此 $\|x_0\|=\sup\limits_{\substack{f\in X^*\\ \|f\|=1}}|f(x_0)|$. 证毕.

*7.2.2 几何形式——凸集分离定理

平面上两个不相交的凸集 A 与 B，必有一直线 l 分离 A 与 B，即存在直线 l 使 A 与 B 分别在 l 的两侧(参阅图 7.2.1).

在一般的线性空间 X 中，这个凸集的分离性质有没有相应的推广呢？下面就来讨论这个问题. 为简单起见，在本小节我们总假定 X 是实空间，X 上的线性泛函也取实值.

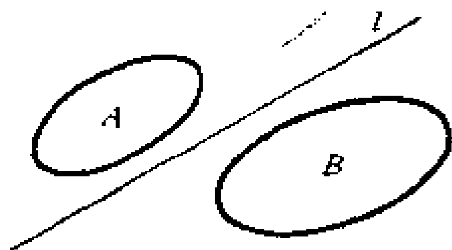


图 7.2.1

定义 7.2.2 在线性空间 X 中，X 的线性子空间 M 称为是极大的，如果对于任何一个以 M 为真子集的线性子空间 M_1，必有 $M_1=X$.

定理 7.2.8 **设 X 是线性空间，M 是 X 的真线性子空间. 则 M 是极大线性子空间的充要条件是，$\forall x_0\in X-M$，有**

$$X=\text{span}(M\cup\{x_0\}).$$

证明 必要性是显然的. 现证充分性. 设 M_1 是以 M 为真子集的线性子空间，则必有 $x_0\in M_1-M\subset X-M$，从而

$$X=\text{span}(M\cup\{x_0\})\subset M_1,$$

即 $M_1=X$. 这说明 M 是极大线性子空间. 证毕.

定义 7.2.3 线性空间X的极大线性子空间M对向量$x_0\in X-M$的平移:

$$L=M+x_0=\{x+x_0\,|\,x\in M\}$$

称为极大线性流形，或简称超平面.

定理 7.2.9 **L是赋范线性空间X的(闭)超平面$\Longleftrightarrow$存在X上的非零(连续)线性泛函f及$r\in\mathbb{R}$,使得**

$$L=H_f^r, \tag{7.2.11}$$

其中 $H_f^r=\{x\in X\,|\,f(x)=r\}$.

证明 "$\Leftarrow$":设f是X上的非零(连续)线性泛函,$r\in\mathbb{R}$，并且

$$L=H_f^r=\{x\in X\,|\,f(x)=r\}.$$

显然,H_f^0是X的线性子空间. 又$\forall x_1\in X-H_f^0,\forall x\in X$, 令$z=x-\dfrac{f(x)}{f(x_1)}x_1$,则$z\in H_f^0$, $x=z+\dfrac{f(x)}{f(x_1)}x_1$,这说明$X=\mathrm{span}(H_f^0\cup\{x_1\})$,因此,$H_f^0$是极大线性子空间. 由于$f$是非零的，所以$\exists x_0\in X$,使$f(x_0)\neq 0$,即$x_0\in X-H_f^0$. 由$f$的线性，不妨设$f(x_0)=r$. $\forall x\in L=H_f^r$,因为

$$f(x-x_0)=f(x)-f(x_0)=r-r=0,$$

所以$x-x_0\in H_f^0$,令$y=x-x_0$,则$x=y-x_0,y\in H_f^0$. 由此可知

$$L=H_f^r=H_f^0+x_0,$$

因此L是一个超平面. 又若f是连续的,则H_f^r显然是闭的，即L是闭的.

"$\Rightarrow$":若L是X的(闭)超平面,可设$L=M+x_0$，其中M是X的极大(闭)线性子空间,$x_0\in X-M$. 这时$\forall x\in X$可表成

$$x=y+\lambda x_0(y\in M,\lambda\in\mathbb{R})$$

的形式. 作$X\to\mathbb{R}$的泛函f如下:

$$f(x)=f(y+\lambda x_0)=\lambda\quad(y\in M,\lambda\in\mathbb{R}).$$

显然f是X上的线性泛函,并且满足:$H_f^0=M$以及$f(x_0)=1$,因此

$L=H_f^r$. 若L闭，从而H_f^0闭，由定理7.1.4知，f是连续的。证毕。

下面再介绍一些有关的概念和术语。

所谓超平面$L=H_f^r$使一个集合E在它的一侧，用线性泛函来描写就是：

$$\forall x\in E\Rightarrow f(x)\leqslant r(\text{或}\geqslant r).$$

定义 7.2.4 所谓超平面$L=H_f^r$分离集合E与F，是指：

$$\forall x\in E\Rightarrow f(x)\leqslant r(\text{或}\geqslant r),$$
$$\forall x\in F\Rightarrow f(x)\geqslant r(\text{或}\leqslant r).$$

如果在上面两个式子中，分别用"$<$"与"$>$"代替"$\leqslant$"与"$\geqslant$"，那末就说H_f^r严格分离E与F。

定义 7.2.5 设X是线性空间，M是X的含有θ点的凸子集，在X上作一个取值于$[0,+\infty]$的函数

$$p(x)=\inf\left\{\lambda>0\,\middle|\,\frac{x}{\lambda}\in M\right\}\quad(\forall x\in X)$$

与M对应，称函数p为M的Minkowski泛函。

注1 Minkowski泛函是次可加正齐性的非负泛函。证明留给读者。

注2 当X是赋范线性空间，M是X的以θ为内点的凸子集时，M的Minkowski泛函p在X上处处取有限值，而且还是一致连续的。

事实上，因θ是M的内点，则$\exists r>0$，使得$O(\theta,r)\subset M$，从而

$$\frac{r}{2\|x\|}x\in M\quad(\forall x\in X-\{\theta\}).$$

因此

$$p(x)\leqslant\frac{2}{r}\|x\|\quad(\forall x\in X),\tag{7.2.12}$$

即 p 在 X 上处处取有限值. 由(7.2.12)还可以得到

$$|p(x)-p(y)|\leqslant\max(p(x-y),p(y-x))$$
$$\leqslant\frac{2}{r}\|x-y\| \quad (\forall x,y\in X), \qquad (7.2.13)$$

故 $p(x)$在 X 上是一致连续的. 证毕.

现在讨论用超平面分离两个不交凸集的问题，先考虑用超平面分离一个凸集及其外一点的问题.

定理 7.2.10 (Hahn-Banach **定理的几何形式**) **设** X **是赋范线性空间,** E **是** X **的具有内点的真凸子集,又设** $x_0\in X-E$, **则必存在一个超平面分离** E **与** x_0.

证明 因为通过适当的平移,总可以把 E 中任一点变为 θ 点. 因此不失一般性，可设 θ 为 E 的一个内点，那末 E 的 Minkowsk 泛函 $p(x)$,便是 X 上的一个非零连续次可加正齐性泛函,满足

$$p(x)\leqslant 1 \quad (\forall x\in E),\ p(x_0)\geqslant 1.$$

在 X 的一维线性子空间 $X_0=\{\lambda x_0|\lambda\in\mathbf{R}\}$ 上定义

$$f_0(x)=f_0(\lambda x_0)=\lambda p(x_0) \quad (\forall\lambda\in\mathbf{R}).$$

显然 f_0 是 X_0 上的线性泛函,并且

$$f_0(x)=f_0(\lambda x_0)=\lambda p(x_0)\leqslant p(\lambda x_0)=p(x) \quad (\forall x\in X_0).$$

据(实)Hahn-Banach定理 7.2.1,必存在 X 上的实线性泛函$f(x)$,满足

$$f(x_0)=f_0(x_0)=p(x_0)\geqslant 1, \qquad (7.2.14)$$
$$f(x)\leqslant p(x) \quad (\forall x\in X). \qquad (7.2.15)$$

从而有

$$f(x)\leqslant p(x)\leqslant 1 \quad (\forall x\in E). \qquad (7.2.16)$$

因此 H_f^1 便是分离 E 与 x_0 的超平面. 证毕.

注 定理 7.2.10 中存在的超平面 H_f^1 还是闭的. 这是因为相应的 f 是连续的. 事实上,由于 θ 是 E 的内点,根据(7.2.15)和

(7.2.13), $\exists r>0$, 使得

$$|f(x)-f(y)|\leqslant\max(p(x-y),p(y-x))$$
$$\leqslant\frac{2}{r}\|x-y\| \quad (\forall x,y\in X).$$

因此, f 在 X 上连续. 证毕.

定理 7.2.11 **设 X 是赋范线性空间, E 和 F 是 X 的两个非空凸集, E 有内点, $E^0\cap F=\varnothing$; 则 $\exists s\in\mathbb{R}$ 及 $f\in X^*-\{\theta\}$, 使得超平面 H_f^s 分离 E 与 F.**

证明 令

$$M=E^0+(-F)=\{x-y\mid x\in E^0,y\in F\},$$

其中 $-F=\{-x\mid x\in F\}$. 易知 M 是凸集, 并且 $E^0+(-y)(\forall y\in F)$ 是开集, 从而 $M=\bigcup_{y\in F}(E^0+(-y))$ 是开集, 即 M 是 X 的含有内点的凸子集. 还可以推知 $\theta\notin M$. 事实上, 假若 $\theta\in M$, 则 $\exists x_0\in E^0$ 及 $y_0\in F$, 使得 $x_0-y_0=\theta$, 从而 $x_0=y_0\in E^0\cap F$, 这与 $E^0\cap F=\varnothing$ 矛盾.

据定理 7.2.10, 存在闭超平面 H_f^r 分离 M 与 θ. 不妨假定

$$f(x)\leqslant r \quad (\forall x\in M); f(\theta)\geqslant r.$$

从而 $f(x)\leqslant 0(\forall x\in M)$, 即有 $f(x-y)\leqslant 0(\forall x\in E^0,\forall y\in F)$, 再由 f 的线性, 便得

$$f(x)\leqslant f(y) \quad (\forall x\in E^0,\forall y\in F).$$

因此 $\exists s\in\mathbb{R}$, 使得

$$\sup_{x\in E^0}f(x)\leqslant s\leqslant\inf_{y\in F}f(y).$$

即得

$$f(x)\leqslant s \quad (\forall x\in E^0); \tag{7.2.17}$$
$$f(x)\geqslant s \quad (\forall x\in F). \tag{7.2.18}$$

再由 f 的连续性及 $(\overline{E^0})=\overline{E}$ 知

$$f(x)\leqslant s \quad (\forall x\in E). \tag{7.2.19}$$

联合(7.2.19)与(7.2.18)就知 H_f^r 分离 E 与 F. 证毕

推论 7.2.12(Ascoli 定理) **设 X 是赋范线性空间, E 是 X 的真闭凸子集,则** $\forall x_0\in X-E, \exists f\in X^*$ 及 $\alpha\in\mathbb{R}$, 适合

$$f(x)<\alpha<f(x_0) \quad (\forall x\in E). \tag{7.2.20}$$

证明 因为 $x_0\in X-E$ 及 E 是闭集, 所以 $\exists\delta>0$, 使得

$$O(x_0,\delta)\subset X-E,$$

而 $O(x_0,\delta)$ 是有内点的凸集, 且 $O(x_0,\delta)\cap E=\varnothing$. 对 E 和 $O(x_0,\delta)$ 应用定理 7.2.11, $\exists f\in X^*-\{\theta\}$, 适合

$$\sup_{x\in E} f(x)\leqslant\inf_{y\in O(x_0,\delta)} f(y). \tag{7.2.21}$$

进一步可以证明

$$\inf_{y\in O(x_0,\delta)} f(y)<f(x_0). \tag{7.2.22}$$

事实上, 假若(7.2.22)不成立, 那末

$$f(y)\geqslant f(x_0) \quad (\forall y\in O(x_0,\delta)). \tag{7.2.23}$$

这表明 $f(x_0)$ 是 $f(y)$ 在 $O(x_0,\delta)$ 中的极小值, 这与 f 的非零线性矛盾(参看习题 7.1 的第 8 题). 于是(7.2.22) 成立. 在 (7.2.22) 两端之间任取一实数 α, 则由(7.2.22)、(7.2.21) 即得(7.2.20). 证毕.

推论 7.2.13(Mazur 定理) **设 X 是赋范线性空间, E 是 X 的一个有内点的凸集, F 是 X 的一个线性流形, 又设 $E^\circ\cap F=\varnothing$, 则存在一个包含 F 的闭超平面 L, 使 E 在 L 的一侧.**

证明 设 $F=X_0+x_0$, 其中 $x_0\in X$, X_0 是 X 的线性子空间. 由定理 7.2.11, 存在闭超平面 H_f^r 分离 E 与 F, 即

$$f(x)\leqslant r \quad (\forall x\in E),\ f(x+x_0)\geqslant r \quad (\forall x\in X_0). \tag{7.2.24}$$

记 $r_0=r-f(x_0)$, 便有 $f(x)\geqslant r_0(\forall x\in X_0)$. 由 f 的线性及 X_0 是线性子空间可以推出

$$f(x)\equiv 0 \quad (\forall x\in X_0). \tag{7.2.25}$$

事实上，不妨设 $r_0\geqslant 0$. 假若 $\exists x^*\in X_0$, 使得 $f(x^*)=c>0$, 由于 $-c^{-1}x^*\in X_0$, 从而

$$f(-c^{-1}x^*)=-c^{-1}f(x^*)=-1<0\leqslant r_0.$$

这与 $f(x)\geqslant r_0(\forall x\in X_0)$矛盾. 因此(7.2.25)成立. 由(7.2.25)即知 $X_0\subset H_f^0$, 从而 $F\subset H_f^0+x_0=H_f^s$, 其中 $s=f(x_0)$. 再由(7.2.24)可以推出 $f(x)\leqslant f(x_0)=s(\forall x\in E)$, 于是 $L=H_f^s$ 便为所求. 证毕.

注 推论 7.2.13 的结论换句话说就是: 存在 X 上的非零连续线性泛函 f 及 $s\in\mathbb{R}$, 使得

$$f(x)\leqslant s \quad (\forall x\in E); f(x)=s \quad (\forall x\in F).$$

下面我们来推广平面上直线和圆相切的概念.

定义 7.2.6 超平面 $L=H_f^r$ 称为是凸集 E 在点 x_0 的承托超平面, 是指 E 在 L 的一侧, 且与 L 有公共点 x_0. 换句话说就是,

$$f(x)\leqslant r=f(x_0) \quad (\forall x\in E); \text{或 } f(x)\geqslant r=f(x_0) \quad (\forall x\in E).$$

例 3 设 X 是赋范线性空间, $x_0\in X-\{\theta\}$, $\|x_0\|=r$, $E=\{x\in X \mid \|x\|\leqslant r\}$,

则 E 在 x_0 点有一个承托超平面.

证明 根据推论 7.2.6, $\exists f\in X^*$, 使得 $f(x_0)=\|x_0\|$, $\|f\|=1$. 于是 H_f^r 便是 E 在 x_0 点的承托超平面, 这是因为

$$f(x)\leqslant\|f\|\|x\|$$
$$\leqslant r=f(x_0) \quad (\forall x\in E)$$

(参阅图 7.2.2). 证毕.

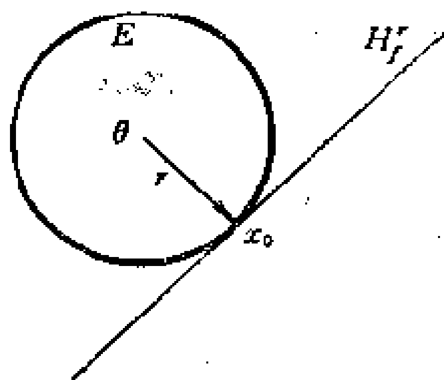


图 7.2.2

更一般地, 我们有

定理 7.2.14 设 X 是赋范线性空间, E 是 X 的含有内点的闭凸集, 那末通过 E 的每个边界点都可以作出 E 的一个承托超平面.

证明 $\forall x_0\in E-E^0$, 令 $F=\{x_0\}$. 由推论 7.2.13 的注, $\exists f\in X^*-\{\theta\}$ 及 $s\in\mathbb{R}$, 使得

$$f(x)\leqslant s=f(x_0)\quad(\forall x\in E).$$

因此 H_f^s 便是 E 在 x_0 点的承托超平面. 证毕.

习 题 7.2

1. 设 X 是由实数列 $x=\{\alpha_n\}$ 全体按通常的线性运算组成的线性空间. 定义

$$p(x)=\overline{\lim_{n\to\infty}}\alpha_n\quad(\forall x=\{\alpha_n\}\in X).$$

证明: $p(x)$ 是 X 上的次可加正齐性泛函.

2. 设 p 是实线性空间 X 上的次可加正齐性泛函. 证明:

(1) $p(\theta)=0$;

(2) $p(-x)\geqslant -p(x)$;

(3) $\forall x_0\in X$, 在 X 上存在实线性泛函 f, 使得 $f(x_0)=p(x_0)$, 且

$$f(x)\leqslant p(x)\quad(\forall x\in X).$$

3. 设 X 是复线性空间, p 是 X 上的半范数, $x_0\in X$, $p(x_0)\neq 0$. 证明: 存在 X 上的线性泛函 f, 使得 $f(x_0)=1$, 且 $|f(x)|\leqslant\dfrac{p(x)}{p(x_0)}\quad(\forall x\in X)$.

4. 设 X 是赋范线性空间, 又设当 f_1、$f_2\in X^*$, $\|f_1\|=\|f_2\|=1$, $f_1\neq f_2$ 时, 恒有 $\|f_1+f_2\|<2$. 若 f_0 是定义在 X 的子空间 X_0 上的有界线性泛函, 证明 f_0 的保范延拓是唯一的.

5. 设 X 是赋范线性空间, $f\in X^*$, $\|f\|=1$, $\mathscr{N}(f)=\{x\,|\,x\in X,\ f(x)=0\}$. 证明: $\forall x\in X$, 有 $|f(x)|=\rho(x,\mathscr{N}(f))$.

6. 设 X 是赋范线性空间, $X\neq\{\theta\}$, M 是 X 的非空子集, $x_0\in X-\{\theta\}$. 证明:

$$x_0\in\overline{\operatorname{span}M}\Leftrightarrow\forall f\in X^*,$$

若 $f(x)=0\quad(\forall x\in M)$, 则 $f(x_0)=0$.

7. 设 X 是赋范线性空间, $\{x_n\}\subset X$. 证明:

$$y\in\overline{\operatorname{span}\{x_n\}}\Leftrightarrow\forall f\in X^*,$$

若 $f(x_n)=0\quad(n=1,2,\cdots)$, 则 $f(y)=0$.

8. 设 X 是赋范线性空间, $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是 X 中 n 个线性无关的元, α_1, $\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是一组数. 证明: $\exists f\in X^*$, 适合

(1) $f(x_i)=\alpha_i\quad(i=1,2,\cdots,n)$;

(2) $\|f\|\leqslant M$

的充要条件是：对任意的 n 个数 $t_1, t_2, \cdots, t_n$，都成立

$$\left|\sum_{i=1}^{n} t_i a_i\right| \leqslant M\left\|\sum_{i=1}^{n} t_i x_i\right\|.$$

9. 设 X,Y 是两个赋范线性空间，$X\neq\{\theta\}$，并且 $\mathscr{B}(X,Y)$ 是 Banach 空间，则 Y 必是 Banach 空间(即定理 7.1.6 的逆命题成立).

10. 证明定义 7.2.5 的注 1.

11. 设 X 是线性空间，M 是 X 的线性子空间. 求证：M 是 X 的极大线性子空间 $\Leftrightarrow \dim(X\backslash M)=1$.

12. 设 X 是实 Banach 空间，E、F 是 X 的两个凸集，$\rho(E,F)=d>0$. 证明：存在超平面分离 E 与 F.

13. 定义：设 $\mathbb{C}$ 是复数域，X 是 $\mathbb{C}$ 上的线性空间. X 的一个子集 E 称为是均衡的是指

$$x\in E\Rightarrow \alpha x\in E \quad (\forall \alpha\in\mathbb{C}, |\alpha|=1).$$

设 X 是复赋范线性空间，E 是 X 中的非空均衡凸集，f 是 X 上的线性泛函. 求证：

$$|f(x)|\leqslant \sup_{y\in E}\mathrm{Re}f(y) \quad (\forall x\in E).$$

14. 设 X 是复赋范线性空间，E 是 X 中的非空均衡闭凸集，$\forall x_0\in X-E$. 求证：$\exists f\in X^*$ 及 $a>0$，使得

$$|f(x)|<a<|f(x_0)| \quad (\forall x\in E).$$

15. 设 E,F 是复赋范线性空间 X 中的两个互不相交的非空凸集，并且 E 是开的和均衡的. 求证：$\exists f\in X^*$，使得

$$|f(x)|<\inf_{y\in F}|f(y)| \quad (\forall x\in E).$$

§7.3 几个常用空间上连续线性泛函的表示

本节讨论 $C[a,b]$、$L^p[a,b](1\leqslant p<+\infty)$、$l^p(1\leqslant p<+\infty)$上连续线性泛函的表示问题，并给出这些空间的共轭空间. 为此，需要引入下述概念.

定义 7.3.1 设 X、Y 是两个赋范线性空间，T 是 X 到 Y 的映

射. T 称为保范的，是指 $\|Tx\|=\|x\|\quad(\forall x\in X)$. 如果 T 不仅是保范的，而且又是线性的，并有 $TX=Y$，则称 T 是 X 到 Y 的保范线性同构映射，简称为同构映射. 如果存在一个 X 到 Y 上的保范线性同构映射，则称 X 与 Y 是保范线性同构的，简称 X 与 Y 是同构的.

显然，X 到 Y 上的保范线性同构映射，既是 X 到 Y 上的线性同构映射，也是 X 到 Y 上的等距同构映射，因此，两个保范线性同构的空间既是线性同构的，也是等距同构的.

今后，我们往往将两个保范线性同构的空间 X、Y 视为同一个空间而不加区别，并简单地记作 $X=Y$.

7.3.1 $C[a,b]$上连续线性泛函的表示

定理 7.3.1(F. Riesz) **设** f **是** $C[a,b]$ **上的连续线性泛函，则必有唯一的** $g\in V_0[a,b]$(其定义见§6.2 例 7)，**使得**

$$f(x)=\int_a^b x(t)dg(t)\quad(\forall x\in C[a,b]),\qquad(7.3.1)$$

而且 $\|f\|=\|g\|=\overset{b}{\underset{a}{V}}(g)$.

证明 设 $B[a,b]$是$[a,b]$上的有界函数全体按通常的线性运算和范数$\|x\|=\sup\limits_{a\leq t\leq b}|x(t)|\,(\forall x\in B[a,b])$所成的赋范线性空间. 显然 $C[a,b]$是 $B[a,b]$的线性子空间.

设 f 是 $C[a,b]$上的连续线性泛函，据定理 7.2.4，f 可以保范地延拓成 $B[a,b]$上的连续线性泛函 F，即

$$F(x)=f(x)\quad(\forall x\in C[a,b]),\text{ 且 }\|F\|=\|f\|.$$

$\forall\xi\in[a,b]$，令

$$\chi_\xi(t)=\begin{cases}1, & a\leq t\leq\xi,\\ 0, & \xi<t\leq b,\end{cases}$$

则 $\chi_\xi\in B[a,b]$，且 $\mathrm{span}\{\chi_\xi\mid\xi\in[a,b]\}$ 在 $C[a,b]$中稠密(据§6.3

例 2).

令

$$h(\xi)=\begin{cases}0, & \xi=a,\\ F(\chi_{\xi}), & \xi\in(a,b],\end{cases} \tag{7.3.2}$$

则 $h\in V[a,b]$，且

$$\bigvee_a^b(h)\leqslant\|f\|. \tag{7.3.3}$$

事实上，在$[a,b]$上任取一组分点：

$$a=\xi_0<\xi_1<\xi_2<\cdots<\xi_n=b,$$

记

$$\varepsilon_i=\begin{cases}0, & |h(\xi_i)-h(\xi_{i-1})|=0,\\ \dfrac{\overline{h(\xi_i)-h(\xi_{i-1})}}{|h(\xi_i)-h(\xi_{i-1})|}, & |h(\xi_i)-h(\xi_{i-1})|>0,\end{cases} \quad i=1,2,\cdots,n.$$

则

$$\sum_{i=1}^n|h(\xi_i)-h(\xi_{i-1})|=\sum_{i=1}^n\varepsilon_i[h(\xi_i)-h(\xi_{i-1})]$$

$$=\varepsilon_1F(\chi_{\xi_1})+\sum_{i=2}^n\varepsilon_i[F(\chi_{\xi_i})-F(\chi_{\xi_{i-1}})]$$

$$=F\left[\varepsilon_1\chi_{\xi_1}+\sum_{i=2}^n\varepsilon_i(\chi_{\xi_i}-\chi_{\xi_{i-1}})\right]$$

$$\leqslant\|F\|\left\|\varepsilon_1\chi_{\xi_1}+\sum_{i=2}^n\varepsilon_i(\chi_{\xi_i}-\chi_{\xi_{i-1}})\right\|$$

$$\leqslant\|F\|=\|f\|.$$

因此，$h\in V[a,b]$，且(7.3.3)式成立.

根据定理 5.5.4，存在 $g\in V[a,b]$，满足：g 在(a,b)上右连续；

在 (a, b) 中 h 的连续点 x 上，$g(x)=h(x)$；$g(a)=h(a)$，$g(b)=h(b)$；并且

$$\bigvee_a^b (g) \leqslant \bigvee_a^b (h). \tag{7.3.4}$$

由于 $h(a)=0$，所以 $g\in V_0[a,b]$.

现在证明

$$F(x)=\int_a^b x(t)dg(t) \quad (\forall x\in C[a,b]).$$

$\forall x\in C[a,b]$，在$[a,b]$上选取一分点组：

$$a=\xi_0^{(n)}<\xi_1^{(n)}<\cdots<\xi_{m_n}^{(n)}=b,$$

要求 $\xi_i^{(n)}(i=1,2,\cdots,m_n-1)$都是 $h(\xi)$的连续点，而且

$$\lim_{n\to\infty}\max_{1\leqslant i\leqslant m_n}(\xi_i^{(n)}-\xi_{i-1}^{(n)})=0.$$

(注　由于有界变差函数的不连续点的全体至多可数，因此这个要求是可以做到的.)对这样的分点组，作 $B[a,b]$中的点列

$$x_n(t)=x(\xi_1^{(n)})\chi_{\xi_1^{(n)}}(t)+\sum_{k=2}^{m_n}x(\xi_k^{(n)})[\chi_{\xi_k^{(n)}}(t)-\chi_{\xi_{k-1}^{(n)}}(t)]$$

$n=1,2,\cdots.$

由§6.3 例 2 知，$\|x_n-x\|\to 0\quad(n\to\infty)$. 由于

$$F(x_n)=x(\xi_1^{(n)})h(\xi_1^{(n)})+\sum_{k=2}^{m_n}x(\xi_k^{(n)})[h(\xi_k^{(n)})-h(\xi_{k-1}^{(n)})]$$

$$=\sum_{k=1}^{m_n}x(\xi_k^{(n)})[h(\xi_k^{(n)})-h(\xi_{k-1}^{(n)})]$$

$$=\sum_{k=1}^{m_n}x(\xi_k^{(n)})[g(\xi_k^{(n)})-g(\xi_{k-1}^{(n)})],$$

根据F的连续性及 Riemann-Stieltjes 积分的定义，就得到

$$F(x)=\lim_{n\to\infty}F(x_n)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{m_n}x(\xi_k^{(n)})[g(\xi_k^{(n)})-g(\xi_{k-1}^{(n)})]$$

$$=\int_a^b x(t)dg(t).$$

由于当 $x\in C[a,b]$时，$F(x)=f(x)$，所以

$$f(x)=\int_a^b x(t)dg(t)\quad (\forall x\in C[a,b]).$$

由 Riemann-Stieltjes 积分的性质，$\forall x\in C[a,b]$，有

$$|f(x)|=\left|\int_a^b x(t)dg(t)\right|\leqslant\|x\|\bigvee_a^b(g),\qquad (7.3.5)$$

所以$\|f\|\leqslant\bigvee_a^b(g)=\|g\|$. 但由(7.3.3)和(7.3.4)知，$\|f\|\geqslant\bigvee_a^b(g)$.

从而$\|f\|=\|g\|=\bigvee_a^b(g)$.

再证 g 的唯一性. 设 $g^*\in V_0[a,b]$也满足

$$f(x)=\int_a^b x(t)dg^*(t)\quad (\forall x\in C[a,b]),$$

则 $\forall x\in C[a,b]$，有

$$\int_a^b x(t)d(g(t)-g^*(t))=0.$$

取 $x(t)\equiv 1\in C[a,b]$，由于 $g(a)=g^*(a)=0$，从而得到

$g(b)-g^*(b)=0$，即 $g(b)=g^*(b)$. 令 $\varphi(t)=g(t)-g^*(t)$，则

$$\int_a^b x(t)d\varphi(t)=0\quad (\forall x\in C[a,b]).$$

$\forall c\in(a,b)$，取

$$x(t)=\begin{cases}0, & t\in[a,c),\\ \frac{1}{h}t-\frac{c}{h}, & t\in[c,c+h],\\ 1, & t\in(c+h,b],\end{cases}\quad (0<h<b-c).$$

则 $x(t)\in C[a,b]$. 用分部积分法,得到

$$0=\int_a^b x(t)d\varphi(t)=\int_c^{c+h}x(t)d\varphi(t)+\int_{c+h}^b d\varphi(t)$$

$$=\varphi(c+h)-\frac{1}{h}\int_c^{c+h}\varphi(t)dt+\varphi(b)-\varphi(c+h)$$

$$=-\frac{1}{h}\int_c^{c+h}\varphi(t)dt\to-\varphi(c+0)\quad(\text{当 } h\to 0^+\text{时}).$$

所以 $\varphi(c+0)=0$, 从而 $g(c+0)=g^*(c+0)$, 即 $g(c)=g^*(c)$. 因此, $g=g^*$. 证毕.

推论 7.3.2 $C[a,b]^*=V_0[a,b]$.

证明 $\forall g\in V_0[a,b]$, 令

$$f(x)=\int_a^b x(t)dg(t)\quad(\forall x\in C[a,b]),$$

由 Riemann-Stieltjes 积分的线性及不等式 (7.3.5)知, $f\in C[a,b]^*$. 作 $V_0[a,b]\to C[a,b]^*$ 的映射

$$T: g\mapsto f.$$

显然 T 是 $V_0[a,b]$ 到 $C[a,b]^*$ 的线性算子, 再由定理 7.3.1 知, T 是 $V_0[a,b]$ 到 $C[a,b]^*$ 上的保范线性同构映射. 因此 $V_0[a,b]$ 与 $C[a,b]^*$ 保范线性同构, 即 $C[a,b]^*=V_0[a,b]$. 证毕.

7.3.2 $L^p[a,b](1\leqslant p<+\infty)$ 上连续线性泛函的表示

定理 7.3.3 设 f 是 $L^p[a,b](1<p<+\infty)$ 上的连续线性泛函, 则必有唯一的 $y\in L^q[a,b]\left(q=\frac{p}{p-1}\right)$, 使得

$$f(x)=\int_a^b x(t)y(t)dt\quad(\forall x\in L^p[a,b]),\tag{7.3.6}$$

而且

$$\|f\|=\|y\|_q{}^{①}=\left(\int_a^b|y(t)|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

---

① 当几个空间的范数同时出现时, 为了防止混淆, 对某些空间的范数加上下标, 以示区别, 例如, 这里的 $\|\cdot\|_q$ 表示 $L^q[a,b]$ 的范数, 下同.

证明　令

$$u_t(\xi)=\begin{cases}1, a\leqslant\xi\leqslant t,\\0, t<\xi\leqslant b\end{cases}(t\in[a,b]).$$

显然，$\{u_t \mid t\in[a,b]\}\subset L^p[a,b]$，记 $A=\mathrm{span}\{u_t \mid t\in[a,b]\}$，根据推论 6.4.7，$A$ 是$[a,b]$上的左方连续的阶梯函数全体，且 A 是 $L^p[a,b]$的稠密子集. 令

$$g(t)=f(u_t), \tag{7.3.7}$$

则 $g(t)$是$[a,b]$上的绝对连续函数. 事实上，设

$$\{\delta_i=(\tau_i,t_i) \mid i=1,2,\cdots,n\}$$

是$[a,b]$中任意有限个互不相交的开区间，记

$$\varepsilon_i=\begin{cases}\dfrac{\overline{g(t_i)-g(\tau_i)}}{|g(t_i)-g(\tau_i)|}, & |g(t_i)-g(\tau_i)|>0,\\0, & |g(t_i)-g(\tau_i)|=0.\end{cases}$$

则有

$$\sum_{i=1}^{n}|g(t_i)-g(\tau_i)|=\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i(g(t_i)-g(\tau_i))$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i(f(u_{t_i})-f(u_{\tau_i}))$$

$$=f\left(\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i(u_{t_i}-u_{\tau_i})\right)$$

$$\leqslant\|f\|\left\|\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i(u_{t_i}-u_{\tau_i})\right\|_p$$

$$=\|f\|\left(\int_a^b\left|\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i[u_{t_i}(\xi)-u_{\tau_i}(\xi)]\right|^p d\xi\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leqslant\|f\|\left(\int_{\bigcup_{i=1}^{n}\delta_i}1d\xi\right)^{\frac{1}{p}}=\|f\|\left(\sum_{i=1}^{n}\int_{\tau_i}^{t_i}1d\xi\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$=\|f\|\left(\sum_{i=1}^{n}(t_i-\tau_i)\right)^{\frac{1}{p}}.$$

因此，$\forall\varepsilon>0$，取 $\delta=\left(\frac{\varepsilon}{1+\|f\|}\right)^p$，对$[a,b]$中任意有限个互不相交的开区间$\{(\tau_i,t_i)\mid i=1,2,\cdots,n\}$，当 $\sum_{i=1}^{n}(t_i-\tau_i)<\delta$ 时，有

$$\sum_{i=1}^{n}|g(t_i)-g(\tau_i)|<\varepsilon.$$

即 $g(t)$在$[a,b]$上绝对连续. 根据推论 5.5.15，$g(t)$在$[a,b]$上几乎处处存在（绝对值）有限的导数，且 $g'(t)\in L[a,b]$.

令 $y(t)=g'(t)(t\in[a,b])$. 注意到 $u_a(\xi)=0$ a.e. 于$[a,b]$，所以 $g(a)=f(u_a)=0$. 据定理 5.5.16，

$$g(t)=g(a)+\int_a^t g'(\xi)d\xi=\int_a^t y(\xi)d\xi=\int_a^b u_t(\xi)y(\xi)d\xi,$$

从而

$$f(u_t)=\int_a^b u_t(\xi)y(\xi)d\xi. \tag{7.3.8}$$

剩下的是要证明：

(i) (7.3.8)式对 $L^p[a,b]$中的有界可测函数成立；

(ii) $y\in L^q[a,b]$，且$\|y\|_q\leqslant\|f\|$；

(iii) (7.3.8)式对 $L^p[a,b]$中的一切函数成立，且$\|f\|\leqslant\|y\|_q$；

(iv) 对于给定的 f，适合(7.3.6)的 y 是唯一的.

(i) $\forall x(\xi)\in A$，$\exists$ 分点组 $a=t_0<t_1<\cdots<t_m=b$ 和数 $c_1,c_2,\cdots,c_m$，使得

$$x(\xi)=\sum_{k=1}^{m}c_k(u_{t_k}(\xi)-u_{t_{k-1}}(\xi)).$$

由 f 的线性及(7.3.8),有

$$f(x)=\sum_{k=1}^{m}c_k(f(u_{t_k})-f(u_{t_{k-1}}))$$

$$=\sum_{k=1}^{m}c_k\left[\int_a^b u_{t_k}(\xi)y(\xi)d\xi-\int_a^b u_{t_{k-1}}(\xi)y(\xi)d\xi\right]$$

$$=\int_a^b\sum_{k=1}^{m}c_k[u_{t_k}(\xi)-u_{t_{k-1}}(\xi)]y(\xi)d\xi$$

$$=\int_a^b x(\xi)y(\xi)d\xi.$$

即

$$f(x)=\int_a^b x(t)y(t)dt\quad(\forall x\in A).$$

设 $x(t)$ 是 $L^p[a,b]$ 中的任一有界可测函数, $|x(t)|\leqslant M$ $(\forall t\in[a,b])$. 由 A 在 $L^p[a,b]$ 中稠密以及 p 幂平均收敛与几乎处处收敛之关系(见推论 6.2.2),必有一列 $\{x_n(t)\}\subset A$,使得 $|x_n(t)|\leqslant M(t\in[a,b],n=1,2,\cdots)$,且 $x_n(t)\xrightarrow{\text{a.e.}}x(t)$ 于 $[a,b]$. 于是,由 Lebesgue 控制收敛定理,就可得到

$$\|x_n-x\|_p=\left(\int_a^b|x_n(t)-x(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\to 0\quad(n\to\infty)$$

和

$$f(x_n)=\int_a^b x_n(t)y(t)dt\to\int_a^b x(t)y(t)dt\quad(n\to\infty).$$

所以,由 f 的连续性,就可得到

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}f(x_n)=\int_a^b x(t)y(t)dt.$$

即(7.3.8)对 $L^p[a,b]$ 中的一切有界可测函数成立.

(ii) 作 $[a,b]$ 上的函数列

$$z_n(t)=\begin{cases}|y(t)|^{q-1}\dfrac{\overline{y(t)}}{|y(t)|}, & \text{当 } 0<|y(t)|^{q-1}\leqslant n \text{ 时},\\ n\cdot\dfrac{\overline{y(t)}}{|y(t)|}, & \text{当 } |y(t)|^{q-1}>n \text{ 时}, n=1,2,\cdots,\\ 0, & \text{当 } y(t)=0 \text{ 或不存在时},\end{cases}$$

显然，$\{z_n(t)\}$是$[a,b]$上的一列有界可测函数，由(i)，得到

$$f(z_n)=\int_a^b z_n(t)y(t)dt \quad (n=1,2,\cdots).$$

于是，一方面我们有

$$|f(z_n)|\leqslant\|f\|\|z_n\|_p=\|f\|\left(\int_a^b|z_n(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}(n=1,2,\cdots);$$

另一方面又有(注意到$|y(t)|^{q-1}\geqslant|z_n(t)|$)

$$\begin{aligned}|f(z_n)|&=\int_a^b z_n(t)y(t)dt=\int_a^b|z_n(t)||y(t)|dt\\&\geqslant\int_a^b|z_n(t)||z_n(t)|^{\frac{1}{q-1}}dt=\int_a^b|z_n(t)|^{\frac{q}{q-1}}dt\\&=\int_a^b|z_n(t)|^p dt \quad (n=1,2,\cdots).\end{aligned}$$

综合以上两式，得到

$$\int_a^b|z_n(t)|^p dt\leqslant\|f\|\left(\int_a^b|z_n(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \quad (n=1,2,\cdots),$$

从而

$$\left(\int_a^b|z_n(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{q}}\leqslant\|f\|(n=1,2,\cdots).$$

注意到$y(t)\in L[a,b]$，所以由$z_n(t)$的取法可知

$$|z_n(t)|\xrightarrow{a.e.}|y(t)|^{q-1} \text{ 于 } [a,b].$$

因此，由 Fatou 引理 5.3.3，我们得到

$$\left[\int_a^b(|y(t)|^{q-1})^p dt\right]^{\frac{1}{q}}\leqslant\|f\|,$$

即

$$\left(\int_a^b |y(t)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant \|f\|.$$

从而 $y \in L^q[a,b]$，且 $\|y\|_q \leqslant \|f\|$.

(iii) $\forall x(t) \in L^p[a,b]$，由于 $L^p[a,b]$中有界可测函数全体在 $L^p[a,b]$中稠密，所以在 $L^p[a,b]$中存在有界可测函数列 $\{x_n(t)\}$，使得

$$\|x_n - x\|_p = \left(\int_a^b |x_n(t) - x(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

由 f 的连续性知

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \int_a^b x_n(t) y(t) dt.$$

又因为 $y(t) \in L^q[a,b]$，所以积分 $\int_a^b x(t)y(t)dt$ 存在. 根据 Hölder 不等式，有

$$\left|\int_a^b [x_n(t) - x(t)] y(t) dt\right| \leqslant \int_a^b |x_n(t) - x(t)|\,|y(t)|\,dt$$

$$\leqslant \left(\int_a^b |x_n(t) - x(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_a^b |y(t)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

综合以上两式，就得到

$$f(x) = \int_a^b x(t)y(t)dt \quad (\forall x \in L^p[a,b]).$$

再由 Hölder 不等式知

$$|f(x)| \leqslant \int_a^b |x(t)y(t)|\,dt \leqslant \|x\|_p \cdot \|y\|_q \quad (\forall x \in L^p[a,b]),$$

因此

$$\|f\| \leqslant \|y\|_q.$$

再由(ii)知

$$\|f\| = \|y\|_q = \left(\int_a^b |y(t)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}.$$

(iv) 设 $y^*(t)\in L^q[a,b]$也满足(7.3.6)，则 $\forall x(t)\in L^p[a,b]$，有

$$\int_a^b x(t)[y(t)-y^*(t)]dt=0.$$

作$[a,b]$上的函数

$$x_0(t)=\begin{cases}\dfrac{\overline{y(t)-y^*(t)}}{|y(t)-y^*(t)|}, & \text{当 } |y(t)-y^*(t)|>0 \text{ 时},\\ 0, & \text{其它的 } t.\end{cases}$$

则 $x_0(t)\in L^p[a,b]$，且

$$\int_a^b x_0(t)[y(t)-y^*(t)]dt=\int_a^b |y(t)-y^*(t)|dt=0.$$

由定理 5.1.17 知 $y(t)=y^*(t)$ a.e. 于$[a,b]$，即 $y=y^*$. 证毕.

推论 7.3.4 $L^p[a,b]^*=L^q[a,b]$ $\left(1<p<+\infty, q=\dfrac{p}{p-1}\right)$.

证明 $\forall y\in L^q[a,b]$，令

$$f(x)=\int_a^b x(t)y(t)dt \quad (\forall x\in L^p[a,b]),$$

由 Lebesgue 积分的线性及 Hölder 不等式知，$f\in L^p[a,b]^*$. 作 $L^q[a,b]\to L^p[a,b]^*$的映射

$$T:\ y\mapsto f.$$

显然T是 $L^q[a,b]$到 $L^p[a,b]^*$的线性算子. 再由定理 7.3.3 知，T 是 $L^q[a,b]$到 $L^p[a,b]^*$上的保范线性同构映射，因此 $L^q[a,b]$与 $L^p[a,b]^*$保范线性同构. 证毕.

类似地可以证明

定理 7.3.5 **设 f 是 $L^1[a,b]$上的连续线性泛函，则必有唯一的 $y\in L^\infty[a,b]$，使得**

$$f(x)=\int_a^b x(t)y(t)dt \quad (\forall x\in L^1[a,b]),$$

而且$\|f\|=\|y\|_\infty=\inf\limits_{\substack{mE=0\\E\subset[a,b]}}\ \sup\limits_{t\in[a,b]-E}|y(t)|$.

注　由定理 7.3.5 立即可以推知

$$L^1[a,b]^* = L^\infty[a,b]. \tag{7.3.9}$$

7.3.3　$l^p(1\leqslant p<+\infty)$上连续线性泛函的表示

定理 7.3.6　**设 f 是 $l^p(1<p<+\infty)$上的连续线性泛函，则必有唯一的 $y=(y_1,y_2,\cdots)\in l^q\left(q=\dfrac{p}{p-1}\right)$，使得**

$$f(x)=\sum_{j=1}^{\infty}x_jy_j\quad(\forall x=(x_1,x_2,\cdots)\in l^p), \tag{7.3.10}$$

而且 $\|f\|=\|y\|_q=\left(\sum\limits_{j=1}^{\infty}|y_j|^q\right)^{\frac{1}{q}}$.

证明　令

$e_n=(\delta_{n1},\delta_{n2},\cdots,\delta_{nj},\cdots)\left(其中\ \delta_{nj}=\begin{cases}1, & 当\ n=j\ 时\\ 0, & 当\ n\neq j\ 时\end{cases}\right)$，$n=1,2,\cdots$.

显然 $e_n\in l^p(n=1,2,\cdots)$. 记 $y_j=f(e_j)$，$j=1,2,\cdots$.

先证 $y=(y_1,y_2,\cdots)\in l^q$. 若 $y_j=0(j=1,2,\cdots)$，则 $y\in l^q$. 以下设 y_j 不全为 0. 作点列 $x_m=(x_1^{(m)},x_2^{(m)},\cdots)(m=1,2,\cdots)$，其中

$$x_j^{(m)}=\begin{cases}|y_j|^{q-1}\dfrac{\overline{y}_j}{|y_j|}, & 当\ j\leqslant m\ 且\ y_j\neq 0\ 时,\\ 0, & 当\ j>m\ 或\ y_j=0\ 时,\end{cases}\quad j=1,2,\cdots.$$

显然 $x_m\in l^p(m=1,2,\cdots)$，并且由此得到

$$f(x_m)=f\left(\sum_{j=1}^{m}x_j^{(m)}e_j\right)=\sum_{j=1}^{m}x_j^{(m)}y_j=\sum_{j=1}^{m}|y_j|^q$$

和

$$\|x_m\|_p=\left(\sum_{j=1}^{\infty}|x_j^{(m)}|^p\right)^{\frac{1}{p}}=\left(\sum_{j=1}^{m}|x_j^{(m)}|^p\right)^{\frac{1}{p}}=\left(\sum_{j=1}^{m}|y_j|^q\right)^{\frac{1}{p}}.$$

因 y_j 不全为 0，所以 $\exists m_0\in\mathbf{N}$，使得当 $m\geqslant m_0$ 时，$\|x_m\|_p>0$. 根据 $\dfrac{|f(x_m)|}{\|x_m\|_p}\leqslant\|f\|\ (m\geqslant m_0)$，得到

$$\left(\sum_{j=1}^{m}|y_j|^q\right)^{\frac{1}{q}}\leqslant\|f\|,$$

再令 $m\to\infty$，便得到 $\left(\sum\limits_{j=1}^{\infty}|y_j|^q\right)^{\frac{1}{q}}\leqslant\|f\|$，即 $y=(y_1,\ y_2,\ \cdots)\in l^q$，而且

$$\|y\|_q\leqslant\|f\|. \tag{7.3.11}$$

再证(7.3.10)成立. $\forall x=(x_1,x_2,\cdots)\in l^p$，由 Hölder 不等式得到

$$\sum_{j=1}^{\infty}|x_jy_j|\leqslant\left(\sum_{j=1}^{\infty}|x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{j=1}^{\infty}|y_j|^q\right)^{\frac{1}{q}}=\|x\|_p\cdot\|y\|_q, \tag{7.3.12}$$

即 $\sum\limits_{j=1}^{\infty}x_jy_j$ 是绝对收敛级数. 由于

$$\left\|x-\sum_{j=1}^{n}x_je_j\right\|_p=\left(\sum_{j=n+1}^{\infty}|x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}\to 0\quad(n\to\infty),$$

所以

$$x=\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}x_je_j.$$

再由 f 的连续性和线性，就得到

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}f\left(\sum_{j=1}^{n}x_je_j\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}x_jy_j=\sum_{j=1}^{\infty}x_jy_j,$$

即

$$f(x)=\sum_{j=1}^{\infty}x_jy_j\quad(\forall x=(x_1,x_2,\cdots)\in l^p).$$

根据(7.3.12)得到

$$|f(x)|\leqslant\|x\|_p\cdot\|y\|_q,$$

从而

$$\|f\|\leqslant\|y\|_q. \tag{7.3.13}$$

由(7.3.11)和(7.3.13)知$\|f\|=\|y\|_q$.

最后证明唯一性. 设 $y^*=(y_1^*, y_2^*, \cdots)\in l^q$ 也满足 (7.3.10), 则 $\forall x=(x_1, x_2, \cdots)\in l^p$, 有

$$\sum_{j=1}^{\infty}x_j[y_j-y_j^*]=0. \tag{7.3.14}$$

令

$$x_j^{(0)}=\begin{cases}|y_j-y_j^*|^{q-1}\overline{\dfrac{y_j-y_j^*}{|y_j-y_j^*|}}, & \text{当}\ |y_j-y_j^*|>0\ \text{时},\\ 0, & \text{当}\ |y_j-y_j^*|=0\ \text{时},\end{cases}\quad j=1,2,\cdots.$$

由于

$$\sum_{j=1}^{\infty}|x_j^{(0)}|^p=\sum_{j=1}^{\infty}(|y_j-y_j^*|^{q-1})^p=\sum_{j=1}^{\infty}|y_j-y_j^*|^q<+\infty,$$

所以 $x_0=(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \cdots)\in l^p$. 将 x_0 代入(7.3.14), 便得到

$$\sum_{j=1}^{\infty}|y_j-y_j^*|^q=0,$$

从而 $y_j=y_j^*(j=1, 2, \cdots)$, 即 $y=y^*$. 证毕.

推论 7.3.7 $(l^p)^*=l^q\left(1<p<+\infty, q=\dfrac{p}{p-1}\right)$.

证明 $\forall y=(y_1, y_2, \cdots)\in l^q$, 令

$$f(x)=\sum_{j=1}^{\infty}x_jy_j \quad (\forall x=(x_1, x_2, \cdots)\in l^p),$$

由 Hölder 不等式知 $f\in(l^p)^*$. 作 $l^q\longrightarrow(l^p)^*$的映射

$$T: y\mapsto f.$$

显然T是l^q到$(l^p)^*$的线性算子，再由定理7.3.6知，T是l^q到$(l^p)^*$上的保范线性同构映射．证毕．

类似地可以证明

定理7.3.8 设f是l^1上的连续线性泛函，则必有唯一的$y=(y_1,y_2,\cdots)\in l^\infty$，使得

$$f(x)=\sum_{i=1}^{\infty}x_iy_i \quad (\forall x=(x_1,x_2,\cdots)\in l^1),$$

而且$\|f\|=\|y\|=\sup\limits_i|y_i|$．

注 由定理7.3.8立即可以推知

$$(l^1)^*=l^\infty. \qquad (7.3.15)$$

习 题 7.3

1．证明 定理7.3.8及公式(7.3.15)．

2．证明 定理7.3.5及公式(7.3.9)．

3．求出$\boldsymbol{R}^n$上连续线性泛函的一般形式，并证明$(\boldsymbol{R}^n)^*=\boldsymbol{R}^n$(提示：参见§7.1例1中的(7.1.2)式)．又问：若$\boldsymbol{R}^n$是按范数$\|x\|=\max\limits_{1\leq i\leq n}|x_i|$ $(\forall x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\boldsymbol{R}^n)$所成的赋范线性空间，它的共轭空间是什么？

4．设c是l^∞中收敛数列$x=\{x_n\}$全体所成的子空间．证明$c^*=l^1$．

提示：c上连续线性泛函的一般形式是

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}y_nx_n \quad (\forall x=(x_1,x_2,\cdots)\in c),$$

其中$y=(y_0,y_1,y_2,\cdots)\in l^1$，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$．

5．设c_0是c中收敛于零的数列$x=\{x_n\}$全体所成的子空间．证明：(1) c_0是c的闭线性子空间；(2) $(c_0)^*=l^1$．

§7.4 逆算子定理、闭图象定理和共鸣定理

在线性分析中，除了§7.2所介绍的Hahn-Banach泛函延拓

定理这一基本定理之外，还有几个重要的基本定理，它们是开映射定理、逆算子定理、闭图象定理和共鸣定理等. 本节介绍这些定理和它们的某些应用.

7.4.1 逆算子和正则算子

设 X、Y 都是数域 $\mathbb{K}$ 上的线性空间，T 是 $\mathscr{D}(T)\subset X$ 到 Y 的线性算子. 如果 T 是 $\mathscr{D}(T)$ 到 $\mathscr{R}(T)$ 上的一一映射，则 T 的逆算子 T^{-1} 存在，它以 $\mathscr{R}(T)$ 为定义域，以 $\mathscr{D}(T)$ 为值域，而且也是线性算子.

事实上，根据假设 T^{-1} 的存在是显然的，只须再证 T^{-1} 是线性的. $\forall y_1$、$y_2\in\mathscr{R}(T)$，$\forall \alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{K}$，$\exists x_1$、$x_2\in\mathscr{D}(T)$，使得 $Tx_1=y_1$，$Tx_2=y_2$，即 $x_1=T^{-1}y_1$，$x_2=T^{-1}y_2$，于是

$$T^{-1}(\alpha_1y_1+\alpha_2y_2)=T^{-1}(\alpha_1Tx_1+\alpha_2Tx_2)=T^{-1}[T(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2)]$$
$$=\alpha_1x_1+\alpha_2x_2=\alpha_1T^{-1}y_1+\alpha_2T^{-1}y_2.$$

即 T^{-1} 是线性算子.

定义 7.4.1 设 X、Y 都是赋范线性空间，T 是 $\mathscr{D}(T)\subset X$ 到 Y 的线性算子. 如果 T^{-1} 存在，而且 $\mathscr{R}(T)=Y$，同时 T^{-1} 又是有界算子，则称 T 是**正则算子**.

显然，如果 $T:\mathscr{D}(T)\subset X\to Y$ 是正则算子，则 $T^{-1}\in\mathscr{B}(Y,X)$.

引理 7.4.1 设 X、Y 都是赋范线性空间，T 是 $\mathscr{D}(T)\subset X$ 到 Y 的线性算子. 则 T 是正则算子 $\Leftrightarrow\exists A\in\mathscr{B}(Y,X)$，使得

$$AT=I_{\mathscr{D}(T)}①,\ TA=I_Y. \tag{7.4.1}$$

证明 “$\Rightarrow$”：设 T 是正则算子，据正则算子的定义，$T^{-1}\in\mathscr{B}(Y,X)$，且满足

$$T^{-1}T=I_{\mathscr{D}(T)},\ TT^{-1}=I_Y.$$

① $I_{\mathscr{D}(T)}$ 表示 $\mathscr{D}(T)$ 上的恒等算子. 下同.

取 $A=T^{-1}$，则 $A\in\mathscr{B}(Y,X)$，且适合(7.4.1)。

"$\Leftarrow$"：设 $A\in\mathscr{B}(Y,X)$ 适合(7.4.1)．则T^{-1} 存在，且$T^{-1}=A$．事实上，$\forall y\in Y$，由于 $y=TAy$，所以必有 $x=Ay\in\mathscr{D}(T)$（注意到$\mathscr{R}(A)\subset\mathscr{D}(T)$）使得 $Tx=y$，故 $\mathscr{R}(T)=Y$． 又 $\forall x_1,x_2\in\mathscr{D}(T)$，如果 $Tx_1=Tx_2$，就必定有 $x_1=ATx_1=ATx_2=x_2$，所以T是 $\mathscr{D}(T)\subset X$ 到 Y 上的一一映射，从而 T^{-1} 存在，且 $\mathscr{D}(T^{-1})=Y$．再由(7.4.1)的第一式得到

$$T^{-1}=AT\cdot T^{-1}=A,$$

即 T^{-1} 是有界算子，从而T是正则算子．证毕．

定理 7.4.2 **设 X、Y、Z 都是赋范线性空间．如果 A 是 X 到 Y 上的正则算子，B 是 Y 到 Z 上的正则算子，则 BA 是 X 到 Z 上的正则算子，并且 $(BA)^{-1}=A^{-1}B^{-1}$．**

证明 根据假设，A^{-1}、B^{-1} 存在，$A^{-1}\in\mathscr{B}(Y,X)$，$B^{-1}\in\mathscr{B}(Z,Y)$，从而 $A^{-1}B^{-1}\in\mathscr{B}(Z,X)$，并且

$$(A^{-1}B^{-1})\cdot(BA)=I_X,\ (BA)\cdot(A^{-1}B^{-1})=I_Z.$$

由引理 7.4.1，BA 是正则算子，并且 $(BA)^{-1}=A^{-1}B^{-1}$．证毕．

我们关心的问题是：如果 X、Y 都是赋范线性空间，$T\in\mathscr{B}(X,Y)$是双射（即X到Y上的一一映射），这时 T^{-1} 存在而且是Y到X上的线性算子．T^{-1} 是否有界呢？一般地说，即使X是完备的，T^{-1} 并不一定有界．下面即是一个反例．

例 1 设 $X=C[a,b]$，$Y=\{y\mid y\in C^{(1)}[a,b],\ y(a)=0\}$，$Y$ 按X 中的范数$\|y\|=\max\limits_{a\leqslant t\leqslant b}|y(t)|$构成赋范线性空间．令

$$T:\ x(t)\to y(t)=\int_a^t x(\tau)d\tau \quad (\forall x\in X),$$

显然，T 是 Banach 空间X到Y的双射，且 $T\in\mathscr{B}(X,Y)$．但

$$T^{-1}:\ y(t)\mapsto x(t)=\frac{d}{dt}y(t) \quad (\forall y\in Y)$$

是无界的线性算子.

事实上，取$y_n(t)=\sin\left[\left(2n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{b-a}(t-a)\right]\in Y\quad(n=1,2,\cdots)$，则$\|y_n\|=\max\limits_{a\leqslant t\leqslant b}|y_n(t)|=1\quad(n=1,2,\cdots)$. 但由于

$$(T^{-1}y_n)(t)=\left[\left(2n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{b-a}\right]\cos\left[\left(2n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{b-a}(t-a)\right]\quad(\forall n\in\mathbf{N}),$$

从而

$$\|T^{-1}y_n\|=\max_{a\leqslant t\leqslant b}|(T^{-1}y_n)(t)|=\left(2n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{b-a}\to+\infty\quad(n\to\infty).$$

证毕.

7.4.2 开映射定理和逆算子定理

本小节先给出开映射的概念和两个引理，然后介绍开映射定理和逆算子定理.

定义 7.4.2　设 X、Y 是度量空间，T 是 X 到 Y 的映射. 如果对 X 中的任何开集 G，象 TG 是 Y 中的开集，则称 T 是开映射或开算子.

显然，当 T 是拓扑映射时，T 必是开映射. 而当 T 是 X 到 Y 的双射时，T^{-1} 连续的充要条件是 T 为开映射.

引理 7.4.3　设 X 是赋范线性空间，Y 是 Banach 空间，$T\in\mathscr{B}(X,Y)$ 是满射，则必 $\exists\delta>0$，使得 $\forall a>0$，都有 $TB(\theta,a)$ 在 $O(\theta,a\delta)$ 中稠密（$B(\theta,a)$表示以 θ 点为中心以 a 为半径的闭球，下同）.

证明　由于 $X=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}B(\theta,n)$，所以$Y=TX=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}TB(\theta,n)$. 因完备空间 Y 是第二纲集，所以至少有一个自然数 n_0，使得 $TB(\theta,n_0)$

在 Y 的某个开球 $O(y_0,\eta)$ 中稠密. 取 $\delta=\dfrac{\eta}{n_0}$. 今证 $TB(\theta,a)$ 在 $O(\theta,a\delta)$ 中稠密. 事实上, $\forall y\in O(\theta,a\delta)$, 则 $\|y\|<a\delta=a\cdot\dfrac{\eta}{n_0}$, 从而

$$y_0-\frac{n_0}{a}y,\quad y_0+\frac{n_0}{a}y\in O(y_0,\eta).$$

因此, 必有 $B(\theta,n_0)$ 中的点列 $\{x_k\}$ 及 $\{x'_k\}$, 使得

$$Tx_k\to y_0-\frac{n_0}{a}y,\ Tx'_k\to y_0+\frac{n_0}{a}y\quad(k\to\infty).$$

所以 $T\left(a\dfrac{x'_k-x_k}{2n_0}\right)\to y\,(k\to\infty)$. 但是 $a\dfrac{x'_k-x_k}{2n_0}\in B(\theta,\ a)\quad(k=1,2,\cdots)$, 所以 $TB(\theta,a)$ 在 $O(\theta,a\delta)$ 中稠密. 证毕.

引理 7.4.4 **设** X、Y **都是 Banach 空间,** $T\in\mathscr{B}(X,Y)$ **是满射, 则必** $\exists\varepsilon>0$**, 使得** $TB(\theta,1)\supset O(\theta,\varepsilon)$.

证明 据引理 7.4.3, $\exists\delta>0$, 使 $\forall a>0$, 都有 $TB(\theta,a)$ 在 $O(\theta,a\delta)$ 中稠密. 取 $\varepsilon=\dfrac{\delta}{2}$. 今证 $TB(\theta,1)\supset O(\theta,\varepsilon)$. 事实上, $\forall y_0\in O(\theta,\varepsilon)$, 因为 $TB\left(\theta,\dfrac{1}{2}\right)$ 在 $O\left(\theta,\dfrac{\delta}{2}\right)$ 中稠密, 必有 $x_1\in B\left(\theta,\dfrac{1}{2}\right)$, 使得

$$\|y_0-Tx_1\|<\frac{\delta}{2^2},$$

因此 $y_1=y_0-Tx_1\in O\left(\theta,\dfrac{\delta}{2^2}\right)$. 由于 $TB\left(\theta,\dfrac{1}{2^2}\right)$ 在 $O\left(\theta,\dfrac{\delta}{2^2}\right)$ 中稠密, 必有 $x_2\in B\left(\theta,\dfrac{1}{2^2}\right)$, 使得

$$\|y_1-Tx_2\|<\frac{\delta}{2^3},$$

即 $y_2=y_1-Tx_2=y_0-T(x_1+x_2)\in O\left(\theta,\dfrac{\delta}{2^3}\right)$. 这样一直继续下去, 得到一列 $x_n\in B\left(\theta,\dfrac{1}{2^n}\right)(n=1,2,\cdots)$, 使得

$$\|y_0 - T(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)\| < \frac{\delta}{2^{n+1}} \quad (n=1,2,\cdots).$$

记 $S_m = \sum_{n=1}^{m} x_n \quad (m=1,2,\cdots)$. 由于 $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$, 所以 $\{S_m\}$ 是 Banach 空间 X 中的基本列, 设 $S_m \to x_0 \in X$, 则 $x_0 = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$, 且

$$\|x_0\| = \lim_{m\to\infty} \left\| \sum_{n=1}^{m} x_n \right\| \leqslant \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} \|x_n\| = \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| \leqslant 1.$$

所以 $x_0 \in B(\theta, 1)$. 又由 T 的连续性得到

$$y_0 = \lim_{n\to\infty} T(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = Tx_0,$$

因此 $y_0 \in TB(\theta, 1)$, 即 $TB(\theta, 1) \supset O(\theta, \varepsilon)$. 证毕

定理 7.4.5 (开映射定理) 设 X, Y 都是 Banach 空间, $T \in \mathscr{B}(X, Y)$ 是满射, 则 T 是开映射.

证明 据引理 7.4.4, $\exists \varepsilon > 0$, 使得 $TB(\theta, 1) \supset O(\theta, \varepsilon)$. 由此易知 $\forall a > 0$, 有

$$TB(\theta, a) \supset O(\theta, a\varepsilon). \tag{7.4.2}$$

事实上, $\forall y \in O(\theta, a\varepsilon)$, 则 $\frac{y}{a} \in O(\theta, \varepsilon) \subset TB(\theta, 1)$, 于是 $\exists x \in B(\theta, 1)$, 使 $Tx = \frac{y}{a}$, 即 $T(ax) = y$, 但 $ax \in B(\theta, a)$, 故 $y \in TB(\theta, a)$, 即 $TB(\theta, a) \supset O(\theta, a\varepsilon)$.

下面证明 T 是开映射. 设 G 是 X 中任一开集. $\forall y_0 \in TG$, $\exists x_0 \in G$ 使得 $Tx_0 = y_0$, 只要证明 Tx_0 是 TG 的内点就可以了. 由于 G 是开集, 必有 x_0 的 b-邻域 $O(x_0, b) \subset G$. 任取 $a \in (0, b)$, 这时 $B(x_0, a) \subset O(x_0, b) \subset G$, 因此

$$TB(x_0, a) \subset TG. \tag{7.4.3}$$

由于

$$B(x_0, a)=x_0+B(\theta, a)=\{x_0+x \mid x\in B(\theta, a)\},$$

从而

$$TB(x_0, a)=Tx_0+TB(\theta, a)\supset Tx_0+O(\theta, a\varepsilon)=O(Tx_0, a\varepsilon).$$

因此$O(Tx_0, a\varepsilon)\subset TG$，即$Tx_0$是$TG$的内点. 证毕.

本节例1已经告诉我们，当T是Banach空间X到赋范线性空间Y的有界线性算子并且还是一个双射时，T^{-1}并不一定有界，然而如果值域Y是完备的，情况就不同了，这就是下面的Banach逆算子定理.

定理7.4.6 (Banach逆算子定理) **设X、Y都是Banach空间，$T\in\mathscr{B}(X,Y)$是双射，则$T^{-1}\in\mathscr{B}(Y,X)$.**

证明 据定理7.4.5，T是开映射. 又因为T是X到Y的双射，所以T^{-1}是Y到X的连续线性算子，即$T^{-1}\in\mathscr{B}(Y,X)$. 证毕.

推论7.4.7 **设X是线性空间，$\|\cdot\|_1$与$\|\cdot\|_2$是X上的两个范数. 如果X关于这两个范数都成为Banach空间，而且$\|\cdot\|_2$强于$\|\cdot\|_1$，则$\|\cdot\|_1$也强于$\|\cdot\|_2$，从而$\|\cdot\|_1$与$\|\cdot\|_2$等价.**

证明 记$E=(X, \|\cdot\|_2)$，$F=(X, \|\cdot\|_1)$. 作$E\to F$的恒等算子

$$I: x\mapsto x \quad (\forall x\in E).$$

由于$\|\cdot\|_2$强于$\|\cdot\|_1$，据定理6.2.3，$\exists$ 常数$c>0$，使得

$$\|Ix\|_1=\|x\|_1\leqslant c\|x\|_2 \quad (\forall x\in E),$$

所以$I\in\mathscr{B}(E,F)$. 又I是E到F的双射，据逆算子定理，I^{-1}是有界的. 令$c_1=\|I^{-1}\|$，则$c_1>0$，且

$$\|I^{-1}x\|_2=\|x\|_2\leqslant c_1\|x\|_1 \quad (\forall x\in F).$$

因此$\|\cdot\|_1$强于$\|\cdot\|_2$. 证毕

7.4.3 闭图象定理

定义 7.4.3 设 X、Y 是数域 $\mathbb{K}$ 上的两个赋范线性空间. 记 $X\times Y=\{(x,y)\mid x\in X,\ y\in Y\}$, 在 $X\times Y$ 上定义线性运算如下: $\forall(x,y),(x_1,y_1)\in X\times Y$, $\forall\alpha\in\mathbb{K}$, 令

$$(x,y)+(x_1,y_1)=(x+x_1,y+y_1),$$
$$\alpha(x,y)=(\alpha x,\alpha y).$$

而对 $X\times Y$ 中的元(x,y)定义其范数为$\|(x,y)\|=(\|x\|^2+\|y\|^2)^{\frac{1}{2}}$(或$\|(x,y)\|_1=\|x\|+\|y\|$, 或$\|(x,y)\|_2=\max(\|x\|,\|y\|)$, 容易验证$\|\cdot\|$、$\|\cdot\|_1$、$\|\cdot\|_2$是彼此等价的范数), 则 $X\times Y$ 在此范数下成一赋范线性空间, 称为X与Y的乘积赋范线性空间, 记作$(X\times Y,\|\cdot\|)$或仍简记作 $X\times Y$. 类似地可定义有限个赋范线性空间 $X_1, X_2,\cdots, X_n$ 的乘积赋范线性空间 $X_1\times X_2\times\cdots\times X_n$.

显然, 如果 X、Y 皆为 Banach 空间, 则 $X\times Y$ 也是 Banach 空间.

定义 7.4.4 设 X、Y 是两个赋范线性空间, T 是 $\mathscr{D}(T)\subset X$ 到 Y 中的映射. 令

$$G(T)=\{(x,Tx)\mid x\in\mathscr{D}(T)\}\subset X\times Y.$$

称 $G(T)$ 为映射T的图象. 如果$G(T)$是乘积赋范线性空间$X\times Y$中的闭集, 则称T是闭映射或闭算子.

引理 7.4.8 设 X、Y 是两个赋范线性空间, T 是 $\mathscr{D}(T)\subset X$ 到 Y 的映射. T 是闭映射$\Leftrightarrow\forall\{x_n\}\subset\mathscr{D}(T)$, 若 $x_n\to x_0\in x$, $Tx_n\to y_0\in Y$, 则 $x_0\in\mathscr{D}(T)$, 且 $y_0=Tx_0$.

证明 "$\Rightarrow$": 设T是闭映射. 当 $\{x_n\}\subset\mathscr{D}(T)$, $x_n\to x_0\in X$, $Tx_n\to y_0\in Y$ 时, 显然$\{(x_n,Tx_n)\}\subset G(T)$, 而且由不等式

$$\|(x_n,Tx_n)-(x_0,y_0)\|=(\|x_n-x_0\|^2+\|Tx_n-y_0\|^2)^{\frac{1}{2}}$$
$$\leqslant\|x_n-x_0\|+\|Tx_n-y_0\|\quad(\forall n\in\mathbb{N})$$

知$(x_n, Tx_n)\to(x_0, y_0)\in X\times Y$. 由假设知$G(T)$是闭集，从而$(x_0, y_0)\in G(T)$，即$x_0\in\mathscr{D}(T)$，$y_0=Tx_0$.

"$\Leftarrow$"：任取$\{(x_n, Tx_n)\}\subset G(T)$，而且$(x_n, Tx_n)\to(x_0, y_0)\in X\times Y$，由于

$$\max(\|x_n-x_0\|, \|Tx_n-y_0\|)\leqslant\|(x_n, Tx_n)-(x_0, y_0)\|$$

$$=(\|x_n-x_0\|^2+\|Tx_n-y_0\|^2)^{\frac{1}{2}}\quad(\forall n\in\mathbf{N}),$$

所以$x_n\to x_0\in X$，$Tx_n\to y_0\in Y$. 再由假设知$x_0\in\mathscr{D}(T)$，$y_0=Tx_0$，从而$(x_0, y_0)\in G(T)$，即$G(T)$是$X\times Y$中的闭集. 证毕.

注 1 定义域是闭集的连续算子是闭算子. 事实上，设X、Y是赋范线性空间，T是$\mathscr{D}(T)\subset X$到Y的连续算子，并且$\mathscr{D}(T)$是X中的闭集. 当$\{x_n\}\subset\mathscr{D}(T)$，$x_n\to x_0\in X$，$Tx_n\to y_0\in Y$时，由$\mathscr{D}(T)$的闭性知$x_0\in\mathscr{D}(T)$，又由$T$的连续性知$y_0=\lim\limits_{n\to\infty}Tx_n=Tx_0$，据引理7.4.8，$T$是闭算子.

注 2 当X、Y都是Banach空间，T是$\mathscr{D}(T)\subset X$到Y的线性算子，而且是闭算子时，T不一定是连续算子. 例如，设$X=Y=C[a,b]$，$D=\{x(t)\,|\,x(t)\in C^{(1)}[a,b]\}$，显然$D$是$X$的线性子空间. 作$D$到$Y$的算子如下：

$$T:\ x(t)\mapsto y(t)=\frac{d}{dt}x(t)\quad(\forall x(t)\in D).$$

则T是D到Y的线性算子，而且是闭算子. 事实上，设$\{x_n\}\subset D$，$x_n\to x_0\in X$，$Tx_n\to y_0\in Y$，由数学分析中的定理知，$x_0\in D$，且$Tx_0=y_0$. 根据引理7.4.8，T是闭算子. 但由§7.1例7知T是无界的.

然而当算子T的定义域$\mathscr{D}(T)$是X的闭子空间时，有下面的闭图象定理.

定理7.4.9（闭图象定理） 设X、Y都是Banach空间，T是$\mathscr{D}(T)\subset X$到Y中的线性算子，而且是闭算子. 如果$\mathscr{D}(T)$是X的闭线性子空间，则T是连续的.

证明 由 X、Y 是 Banach 空间可知 $X\times Y$ 是 Banach 空间. 因为 $\mathscr{D}(T)$是 X 的闭线性子空间，故 $\mathscr{D}(T)$ 按 X 中范数是一个 Banach 空间. 又 T 是线性算子，易知 $G(T)$ 是 $X\times Y$ 的线性子空间，由假设 $G(T)$ 是 $X\times Y$ 中的闭集，故 $G(T)$是 $X\times Y$ 的闭线性子空间，从而 $G(T)$ 按 $X\times Y$ 中的范数也是一个 Banach 空间. 作 $G(T)$ 到$\mathscr{D}(T)$的算子 A 如下:

$$A:\ (x,Tx)\mapsto x\quad (\forall (x,Tx)\in G(T)).$$

显然 A 是 $G(T)$到 $\mathscr{D}(T)$ 上的线性算子，而且

$$\|A(x,Tx)\|=\|x\|\leqslant\|(x,Tx)\|\quad (\forall (x,Tx)\in G(T)),$$

所以 A 是有界的. 又当 x_1、$x_2\in\mathscr{D}(T)$，$x_1=x_2$ 时，必然 $Tx_1=Tx_2$，所以$(x_1,Tx_1)=(x_2,Tx_2)$，故 A 是 $G(T)$到 $\mathscr{D}(T)$ 的双射. 根据逆算子定理，$A^{-1}:\mathscr{D}(T)\to G(T)$是有界的. 于是

$$\|(x,Tx)\|=\|A^{-1}x\|\leqslant\|A^{-1}\|\|x\|\quad (\forall x\in\mathscr{D}(T)).$$

从而

$$\|Tx\|\leqslant\|(x,Tx)\|\leqslant\|A^{-1}\|\|x\|\quad (\forall x\in\mathscr{D}(T)).$$

由此可知 T 是有界的. 证毕.

由引理 7.4.8 的注 1 和定理 7.4.9 可立即得到

推论 7.4.10 **设 X、Y 都是 Banach 空间，T 是 X 到 Y 的线性算子，则 T 连续$\Leftrightarrow T$ 是闭算子.**

闭图象定理在偏微分方程理论中有很多应用，因为对于微分算子，要直接验证它的连续性往往比较困难，但要验证它是闭算子常较容易.

7.4.4 共鸣定理

定理 7.4.11 (Banach-Steinhaus 定理，共鸣定理) **设 X 是 Banach 空间，Y 是赋范线性空间，$T_\tau\in\mathscr{B}(X,\ Y)$，$\tau\in\Lambda$. 如果 $\forall x\in X$，**

$$\sup_{\tau\in\Lambda}\|T_\tau x\|<+\infty, \tag{7.4.4}$$

则数集$\{\|T_\tau\| \mid \tau\in\Lambda\}$是有界的.

证明 在指标集 Λ 外任取一个元素 α, 令 $\Lambda_1=\Lambda\cup\{\alpha\}, T_\alpha=I$. 在 Banach 空间 X 上再作新范数

$$\|x\|_1=\sup_{\tau\in\Lambda_1}\|T_\tau x\|=\max(\|x\|,\sup_{\tau\in\Lambda}\|T_\tau x\|) \quad (\forall x\in X).$$

现在证明$\|\cdot\|_1$是 X 上的范数. 显然$\|\cdot\|_1$满足范数的条件(1)、(2)、(4)(见定义 6.2.2), 下面证明 $\|\cdot\|_1$ 满足范数的条件(3). 事实上, $\forall x, y\in X$, 由于

$$\|T_\tau(x+y)\|\leqslant\|T_\tau x\|+\|T_\tau y\|\leqslant\sup_{\tau\in\Lambda_1}\|T_\tau x\|+\sup_{\tau\in\Lambda_1}\|T_\tau y\|$$

$$=\|x\|_1+\|y\|_1,$$

因此

$$\|x+y\|_1=\sup_{\tau\in\Lambda_1}\|T_\tau(x+y)\|\leqslant\|x\|_1+\|y\|_1.$$

再证 X 按$\|\cdot\|_1$成为 Banach 空间. 事实上, 设 $\{x_n\}$ 是$(X, \|\cdot\|_1)$中的基本列, 由于$\|x\|\leqslant\|x\|_1(\forall x\in X)$, 所以$\{x_n\}$ 也是 Banach 空间$(X, \|\cdot\|)$中的基本列, 从而$\exists x_0\in X$, 使得$\|x_n-x_0\|\to0\ (n\to\infty)$. 今证$\{x_n\}$按$\|\cdot\|_1$收敛于 x_0. 由于$\{x_n\}$按$\|\cdot\|_1$是基本列, 所以$\forall\varepsilon>0$, $\exists$ 自然数 N, 当 $n, m\geqslant N$ 时,

$$\|x_n-x_m\|_1=\sup_{\tau\in\Lambda_1}\|T_\tau(x_n-x_m)\|<\frac{\varepsilon}{2},$$

即

$$\|T_\tau(x_n-x_m)\|<\frac{\varepsilon}{2} \quad (\forall\tau\in\Lambda_1).$$

固定 $n\geqslant N$, 令 $m\to\infty$, 就得到

$$\|T_\tau(x_n-x_0)\|\leqslant\frac{\varepsilon}{2} \quad (\forall\tau\in\Lambda_1).$$

从而当 $n\geqslant N$ 时,

$$\|x_n-x_0\|_1=\sup_{\tau\in\Lambda_1}\|T_\tau(x_n-x_0)\|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon,$$

因此$\{x_n\}$按$\|\cdot\|_1$收敛于x_0. 故X按$\|\cdot\|_1$是Banach空间.

因为$\|\cdot\|_1$强于$\|\cdot\|$，根据推论7.4.7，$\|\cdot\|$也强于$\|\cdot\|_1$,即有常数$M>0$,使得

$$\|x\|_1=\sup_{\tau\in\Lambda_1}\|T_\tau x\|\leqslant M\|x\| \quad (\forall x\in X).$$

因此数集$\{\|T_\tau\| \mid \tau\in\Lambda\}$是有界的,并且$\|T_\tau\|\leqslant M \quad (\forall\tau\in\Lambda)$. 证毕.

注 条件: $\forall x\in X, \sup\limits_{\tau\in\Lambda}\|T_\tau x\|<+\infty$,意味着$\forall x\in X, \exists M_x>0$,使得

$$\|T_\tau x\|\leqslant M_x\|x\| \quad (\forall\tau\in\Lambda). \tag{7.4.5}$$

而结论:数集$\{\|T_\tau\| \mid \tau\in\Lambda\}$有界，则可看作是存在与$x$无关的常数$M>0$,使得

$$\|T_\tau x\|\leqslant M\|x\| \quad (\forall\tau\in\Lambda, \forall x\in X). \tag{7.4.6}$$

(7.4.5)意味着算子族$\{T_\tau \mid \tau\in\Lambda\}$点点有界; (7.4.6)意味着算子族$\{T_\tau \mid \tau\in\Lambda\}$一致有界. 因此在定理的条件下保证了点点有界蕴含一致有界,故本定理又称"一致有界"定理. 另一方面,如果我们从反面来叙述本定理,将有:

$$\sup_{\tau\in\Lambda}\|T_\tau\|=+\infty\Rightarrow\exists x_0\in X, \text{使得} \sup_{\tau\in\Lambda}\|T_\tau x_0\|=+\infty.$$

因此本定理又有"共鸣定理"之称.

共鸣定理的应用是很广泛的，下面我们举一个它在古典分析上应用的例子.

例2 (Fourier级数的发散问题) 存在以2π为周期的实值连续函数,使在任意给定的点上其Fourier级数是发散的.

证明 用$C_{2\pi}$表示定义在实轴上,以2π为周期的实值连续函数全体,在$C_{2\pi}$中定义范数

$$\|x\|=\max_{-\infty<t<+\infty}|x(t)| \quad (\forall x\in C_{2\pi}),$$

则$C_{2\pi}$成为Banach空间.

$\forall x = x(t) \in C_{2\pi}$，它的 Fourier 级数的前 $n+1$ 项之和为

$$S_n(x;t) = \frac{1}{2}\alpha_0 + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k \cos kt + \beta_k \sin kt). \quad (7.4.7)$$

其中

$$\alpha_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(\tau) \cos k\tau d\tau, \quad k = 0, 1, 2, \cdots, n.$$

$$\beta_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(\tau) \sin k\tau d\tau, \quad k = 1, 2, \cdots, n.$$

将 α_k、β_k 代入(7.4.7)$\left(\text{注意到 } 2\sin\frac{\varphi}{2}\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos k\varphi\right] = \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\varphi\right)$得到

$$S_n(x;t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos k(\tau - t)\right] x(\tau) d\tau$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)(\tau - t)\right]}{2\pi \sin\left[\frac{1}{2}(\tau - t)\right]} \cdot x(\tau) d\tau.$$

令

$$K_n(\tau, t) = \frac{\sin\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)(\tau - t)\right]}{2\pi \sin\left[\frac{1}{2}(\tau - t)\right]},$$

则

$$S_n(x;t) = \int_{-\pi}^{\pi} K_n(\tau, t) x(\tau) d\tau. \quad (7.4.7')$$

显然，对任意固定的 $t = t_0$ 及自然数 n，$S_n(x; t_0)$ 是 $C_{2\pi}$ 上的线性泛函，为讨论简单起见，不妨设 $t_0 = 0$. 令

$$f_n(x) = S_n(x;0) = \int_{-\pi}^{\pi} K_n(\tau, 0) x(\tau) d\tau,$$

则 $f_n\in(C_{2\pi})^*$，且

$$\|f_n\|=\int_{-\pi}^{\pi}|K_n(\tau,0)|d\tau.$$

事实上，由于

$$|f_n(x)|\leqslant\int_{-\pi}^{\pi}|K_n(\tau,0)||x(\tau)|d\tau$$

$$\leqslant\|x\|\int_{-\pi}^{\pi}|K_n(\tau,0)|d\tau,$$

从而

$$\|f_n\|\leqslant\int_{-\pi}^{\pi}|K_n(\tau,0)|d\tau.$$

另一方面，令

$$y_n(\tau)=\operatorname{sign}K_n(\tau,0)=\begin{cases}1, & \text{当 } K_n(\tau,0)>0 \text{ 时},\\ 0, & \text{当 } K_n(\tau,0)=0 \text{ 时},\\ -1, & \text{当 } K_n(\tau,0)<0 \text{ 时}.\end{cases}$$

则 $y_n(\tau)$ 可测，且 $|y_n(\tau)|\leqslant1$. 根据 Лузин 定理，$\forall\varepsilon>0$，相应于每个自然数 n，存在 $x_n(\tau)\in C_{2\pi}$，使得 $\|x_n\|\leqslant1$，而且

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi}K_n(\tau,0)(x_n(\tau)-y_n(\tau))d\tau\right|<\varepsilon.$$

从而

$$\|f_n\|=\sup_{\|x\|\leqslant1}|f_n(x)|\geqslant|f_n(x_n)|$$

$$=\left|\int_{-\pi}^{\pi}K_n(\tau,0)x_n(\tau)d\tau\right|$$

$$=\left|\int_{-\pi}^{\pi}K_n(\tau,0)y_n(\tau)d\tau+\int_{-\pi}^{\pi}K_n(\tau,0)(x_n(\tau)-y_n(\tau))d\tau\right|$$

$$\geqslant\left|\int_{-\pi}^{\pi}K_n(\tau,0)y_n(\tau)d\tau\right|-\left|\int_{-\pi}^{\pi}K_n(\tau,0)(x_n(\tau)-y_n(\tau))d\tau\right|$$

$$\geqslant\int_{-\pi}^{\pi}|K_n(\tau,0)|d\tau-\varepsilon,$$

由 ε 的任意性，知 $\|f_n\| \geqslant \int_{-\pi}^{\pi} |K_n(\tau,0)| d\tau$.

综合以上两个方面就得到 $\|f_n\| = \int_{-\pi}^{\pi} |K_n(\tau,0)| d\tau \quad (n=1,2,\cdots)$.

现在证明 $\|f_n\| \to +\infty (n\to\infty)$. 事实上，

$$\|f_n\| = \int_{-\pi}^{\pi} |K_n(\tau,0)| d\tau = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\tau\right]}{\sin\frac{\tau}{2}} \right| d\tau$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{\sin\left[(2n+1)\frac{\tau}{2}\right]}{\frac{\tau}{2}} \right| \cdot \left| \frac{\frac{\tau}{2}}{\sin\frac{\tau}{2}} \right| d\tau$$

$$\geqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{\sin\left[(2n+1)\frac{\tau}{2}\right]}{\frac{\tau}{2}} \right| d\tau$$

$$\geqslant \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} \left| \frac{\sin\left[(2n+1)\frac{\tau}{2}\right]}{\frac{\tau}{2}} \right| d\tau$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\frac{2n+1}{2}\pi} \left| \frac{\sin u}{u} \right| du \to +\infty \quad (n\to\infty).$$

(这里利用了 $|\sin\tau| \leqslant |\tau|$ 和广义积分 $\int_0^{+\infty} \left|\frac{\sin u}{u}\right| du$ 是发散的两个事实). 根据共鸣定理的逆否命题，$\exists x_0(t) \in C_{2\pi}$，使得 $\sup\limits_n |f_n(x_0)| = +\infty$，即 $x_0(t)$ 的 Fourier 级数在 $t=0$ 处发散. 证毕.

习 题 7.4

1. 设 X、Y 是 Banach 空间，$T\in\mathscr{B}(X,Y)$ 是满射，则 $\exists M>0$，使得 $\forall y\in Y$，$\exists x\in X$，适合 $Tx=y$ 且 $\|x\|\leqslant M\|y\|$ (提示：应用引理 7.4.4).

2. 设 X、Y 是 Banach 空间，$T\in\mathscr{B}(X,Y)$ 是满射. 则存在 $M>0$，使对任

何 Y 中收敛于 y_0 的点列 $\{y_n\}$，必存在 $\{x_n\}\subset X$，适合 $\|x_n\|\leqslant M\|y_n\|$，$Tx_n=y_n$ $(n=1,2,\cdots)$ 且 $x_n\to x_0$。

3. 证明习题 7.1 的第 4 题中的算子 T 存在有界逆算子的充要条件是 $\inf\limits_n|a_n|>0$.

4. 试用闭图象定理证明逆算子定理.

5. 设 X、Y 是 Banach 空间，$T\in\mathscr{B}(X,Y)$ 是单射. 证明：$T^{-1}:\mathscr{R}(T)\to X$ 是有界的 $\Leftrightarrow\mathscr{R}(T)$ 在 Y 中是闭的.

6. 设 X 和 Y 是 Banach 空间，$T\in\mathscr{B}(X,Y)$ 是双射. 证明存在 C_1，$C_2>0$，使得 $\forall x\in X$，有

$$C_1\|x\|\leqslant\|Tx\|\leqslant C_2\|x\|.$$

7. 设 X 和 Y 是赋范线性空间，$T:X\to Y$ 是闭线性算子.

(1) 证明 X 的紧子集 C 的象 $T(C)$ 在 Y 中是闭的.

(2) 证明 Y 的紧子集 K 的原象 $T^{-1}(K)$ 在 X 中是闭的.

8. 设 X 是 Banach 空间，Y 是赋范线性空间，T: $\mathscr{D}(T)\subset X\to Y$ 是闭线性算子. 若 T^{-1} 存在且有界，则 $\mathscr{R}(T)$ 在 Y 中是闭的.

9. 设 $(X,\|\cdot\|)$ 是 Banach 空间，$(Y,\|\cdot\|_1)$ 是赋范线性空间，$\|\cdot\|_2$ 是 Y 上第二个范数，并且 $(Y,\|\cdot\|_2)$ 成为 Banach 空间. 如果 $\|\cdot\|_2$ 强于 $\|\cdot\|_1$，则任何 $(X,\|\cdot\|)\to(Y,\|\cdot\|_1)$ 的有界线性算子 T 必是 $(X,\|\cdot\|)\to(Y,\|\cdot\|_2)$ 的有界线性算子，即 $\mathscr{B}((X,\|\cdot\|),(Y,\|\cdot\|_1))\subset\mathscr{B}((X,\|\cdot\|),(Y,\|\cdot\|_2))$.

10. 证明 Гельфанд 引理：设 X 是 Banach 空间，$p(x)$ 是 X 上的泛函，适合下面的条件：

(1) $p(x)\geqslant 0\quad(\forall x\in X)$;

(2) $p(\alpha x)=\alpha p(x)\quad(\forall\alpha\geqslant 0,\forall x\in X)$;

(3) $p(x_1+x_2)\leqslant p(x_1)+p(x_2)\quad(\forall x_1,x_2\in X)$;

(4) 当 $x\in X$，$x_n\to x$ 时，$\varliminf\limits_{n\to\infty}p(x_n)\geqslant p(x)$.

则必有正数 M，使得 $\forall x\in X$，$p(x)\leqslant M\|x\|$.

11. 用 Гельфанд 引理证明共鸣定理.

12. 举例说明共鸣定理中空间 X 的完备性条件不可除去.

13. 设 X 是 Banach 空间，Y 是赋范线性空间，$T_n\in\mathscr{B}(X,Y)$ $(n=1,2,\cdots)$. 如果 $\forall x\in X$，$\{T_nx\}$ 是 Y 中的基本列，则 $\{\|T_n\|\}$ 是有界的.

14. 设 $(\eta_1,\eta_2,\cdots)$ 为一数列. 如果 $\forall(\xi_1,\xi_2,\cdots)\in l^p(1<p<+\infty)$，级数

$\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i\eta_i$ 收敛，则 $(\eta_1,\eta_2,\cdots)\in l^q\left(q=\frac{p}{p-1}\right)$.

15. 设 $y(t)$ 是 $[a,b]$ 上的可测函数. 如果 $\forall x(t)\in L^p[a,b]$ $(1<p<+\infty)$，有 $x(t)y(t)\in L[a,b]$，则 $y(t)\in L^q[a,b]\left(q=\frac{p}{p-1}\right)$.

16. 设 X、Y 都是 Banach 空间，$T\in\mathscr{B}(X,Y)$，又设 $\forall y\in Y$，方程 $Tx=y$ 有解 $x\in X$，并且 $\exists C>0$，使得

$$\|Tx\|\geqslant C\|x\| \quad (\forall x\in X).$$

证明：T 有连续逆 T^{-1}，并且 $\|T^{-1}\|\leqslant\frac{1}{C}$.

§7.5 自反空间与共轭算子

本节利用共轭空间的概念，引入二次共轭空间、自反空间和共轭算子等概念，并举一些例子.

7.5.1 二次共轭空间与自反空间

设 X 是赋范线性空间. 由于 X 的共轭空间 X^* 也是赋范线性空间，所以 X^* 也有共轭空间 $(X^*)^*$，把它记为 X^{**}，称 X^{**} 是 X 的二次共轭空间. 类似地，还可以定义 X 的三次共轭空间 $X^{***}=(X^{**})^*$，等等. 用 $X^{(n^*)}$ 表示 X 的 n 次共轭空间，显然 $(X^{(n^*)})^*=X^{((n+1)^*)}$. 这些空间之间自然是有联系的. 下面我们来考察 X 与 X^{**} 的关系.

$\forall x\in X$，作 X^* 上的泛函 x^{**} 如下：

$$x^{**}(f)=f(x) \quad (\forall f\in X^*). \tag{7.5.1}$$

显然，x^{**} 是 X^* 上的线性泛函. 又因为

$$|x^{**}(f)|=|f(x)|\leqslant\|f\|\|x\| \quad (\forall f\in X^*),$$

所以 x^{**} 是有界泛函，即 $x^{**}\in X^{**}$，并且

$$\|x^{**}\|\leqslant\|x\|. \tag{7.5.2}$$

称泛函 x^{**} 为由 x 生成的. 并称 $X\to X^{**}$ 的映射

$$\tau: x\mapsto x^{**}\ (\forall x\in X)$$

为自然嵌入映射.

定理 7.5.1　设 X 是赋范线性空间，自然嵌入映射 $\tau: x\to x^{**}$ $(\forall x\in X)$ 是 X 到 X^{**} 的保范的线性算子，即

(1) $(\alpha x+\beta y)^{**}=\alpha x^{**}+\beta y^{**}\quad (\forall x, y\in X, \forall \alpha, \beta\in\mathbb{K})$;

(2) $\|x^{**}\|=\|x\|\quad (\forall x\in X)$.

证明　(1) $\forall f\in X^*$，由于

$$\begin{aligned}(\alpha x+\beta y)^{**}(f)&=f(\alpha x+\beta y)=\alpha f(x)+\beta f(y)\\&=\alpha x^{**}(f)+\beta y^{**}(f)\\&=(\alpha x^{**}+\beta y^{**})(f),\end{aligned}$$

所以(1)成立，即 τ 是线性算子.

(2) 只须证 $\|x^{**}\|\geqslant\|x\|$ 就可以了. $\forall x\in X-\{\theta\}$，根据推论 7.2.6，必有 $f_x\in X^*$，使得 $f_x(x)=\|x\|$，且 $\|f_x\|=1$. 因此

$$\|x^{**}\|\geqslant|x^{**}(f_x)|=|f_x(x)|=\|x\|.$$ 证毕.

注　定理 7.5.1 说明 X 与 X^{**} 的子空间 $\tau(X)=\{x^{**}=\tau x\mid x\in X\}$ 保范线性同构，即 X 可以通过自然嵌入映射 $\tau: x\mapsto x^{**}\ (\forall x\in X)$ 嵌入二次共轭空间 X^{**}. 今后为简单起见，我们往往对 x 与 x^{**} 不加区别，即把 X 与 $\tau(X)$ 视为同一空间，从而把 X 视为 X^{**} 的子空间(特别当 X 是Banach空间时，可把 X 视为 X^{**} 的闭子空间)，并简单地记作 $X\subset X^{**}$. 更一般的是可以把 $X^{(n*)}$ 视为 $X^{((n+2)^*)}$ 的子空间，并简单地记作 $X^{(n^*)}\subset X^{((n+2)^*)}(n=0,1,2,\cdots)$.

定义 7.5.1　设 X 是赋范线性空间. 如果 X 到 X^{**} 的自然嵌入映射 $\tau: x\mapsto x^{**}$ 是满射，则称 X 是自反空间，记作 $X\xlongequal{(\tau)}X^{**}$.

赋范线性空间 X 称为自共轭的，是指 $X=X^*$. 如果 X 既是自共轭的，又是自反的，则称 X 是自共轭的自反空间.

注 1 从定义 7.5.1 可以看出，若 X 是自反空间，则 X 与 X^{**} 保范线性同构，即 $X \xrightarrow{(r)} X^{**} \Rightarrow X \cong X^{**}$. 但此问题的逆一般不成立，限于篇幅，这里不举例了，可参看文献[12].

注 2 自反空间是 Banach 空间(根据推论7.1.7). 但 Banach 空间却不一定是自反的. 例如 $L^1[a,b]$、l^1 都是 Banach 空间，但都不是自反的(证明见本节例 2、例 3).

例 1 $L^p[a,b](1<p<+\infty)$、$l^p(1<p<+\infty)$、$\mathbf{R}^n$ 都是自反空间，其中 $L^2[a,b]$、l^2、$\mathbf{R}^n$ 还是自共轭的自反空间. 这可分别由推论 7.3.4、推论 7.3.7 和习题 7.3 的第 3 题导出.

为了说明 $L^1[a,b]$ 和 l^1 不是自反空间，我们先给出下面的定理.

定理 7.5.2 **设 X 是赋范线性空间，如果 X^* 是可分的，则 X 也是可分的.**

证明 由于 X^* 是可分的，所以 X^* 中存在可数的稠密集 $\{g_n\}$ $(n=1,2,\cdots)$，不妨设 $g_n\neq\theta$. 取 $f_n=\dfrac{g_n}{\|g_n\|}(n=1,2,\cdots)$，则 $\{f_n\}$ 是 X^* 的单位球面 $S=\{f\in X^* \mid \|f\|=1\}$ 的可数的稠密子集. 事实上，$\forall f\in S$，有 $\{g_n\}$ 的子列 $\{g_{n_k}\}$，使得 $\lim\limits_{k\to\infty} g_{n_k}=f$，从而

$$\|f-f_{n_k}\|=\|f-\|g_{n_k}\|^{-1}g_{n_k}\|\to 0 \quad (k\to\infty).$$

所以 $\{f_n\}\subset S$ 且 $\{f_n\}$ 在 S 中稠密.

$\forall n\in\mathbf{N}$，由于

$$1=\|f_n\|=\sup_{\substack{x\in X\\ \|x\|=1}}|f_n(x)|>\frac{1}{2},$$

所以 $\exists x_n\in\{x\in X \mid \|x\|=1\}$，使得 $|f_n(x_n)|>\dfrac{1}{2}$.

记 $X_0=\overline{\operatorname{span}\{x_n\}}$. 由于 $\{x_n\}$ 中有限个向量的有理系数(当 X 是复空间时，指系数的实部和虚部均为有理数)的线性组合全体在 X_0

中稠密，所以 X_0 是可分的.

假若 X 不可分，则必然 $X\neq X_0$，取 $x_0\in X-X_0$，由于 X_0 是 X 的闭子空间，从而 $d=\rho(x_0,X_0)>0$，根据推论 7.2.5，$\exists f_0\in S$，使得 $f_0(x)=0(\forall x\in X_0)$. 然而

$$\|f_n-f_0\|\geqslant|f_n(x_n)-f_0(x_n)|=|f_n(x_n)|>\frac{1}{2}\quad(n\in\mathbf{N}).$$

这与 $\{f_n\}$ 在 S 中稠密矛盾. 因此 X 是可分的. 证毕.

定理 7.5.2 启发我们用共轭空间 X^* 的性质可以研究原来的赋范空间 X 的某些性质.

例 2 $L^1[a,b]$ 不是自反的.

证明 反证法. 假若 $L^1[a,b]$ 是自反的，则 $(L^1[a,b])^{**}=L^1[a,b]$，由于 $L^1[a,b]$ 是可分的（根据 §6.4 例 4），从而 $L^1[a,b]^*$ 是可分的（根据定理 7.5.2），但 $L^1[a,b]^*=L^\infty[a,b]$（据公式 (7.3.9)），而 $L^\infty[a,b]$ 是不可分的（根据 §6.4 例 6），这就产生了矛盾. 因此 $L^1[a,b]$ 不是自反的. 证毕.

例 3 l^1 不是自反的. 这可以类似于例 2 来证明.

7.5.2 共轭算子

定义 7.5.2 设 X、Y 是两个赋范线性空间，$A\in\mathscr{B}(X,Y)$. 如果有 Y^* 到 X^* 的算子 A^*，使 $\forall h\in Y^*$，$\forall x\in X$，成立

$$(A^*h)(x)=h(Ax),\tag{7.5.3}$$

则称 A^* 是 A 的共轭算子或伴随算子.

定理 7.5.3 设 X、Y、Z 都是数域 $\mathbf{K}$ 上的赋范线性空间.

(1) $\forall A\in\mathscr{B}(X,Y)$，必有唯一的共轭算子 $A^*\in\mathscr{B}(Y^*,X^*)$；

(2) 映射 $A\mapsto A^*$ 是由 $\mathscr{B}(X,Y)$ 到 $\mathscr{B}(Y^*,X^*)$ 的保范线性算子；

(3) $I_{X^*}=(I_X)^*$（这里 I_{X^*}、I_X 分别是 X^*、X 上的单位

算子)；

(4) **如果** $A\in\mathscr{B}(X,Y)$, $B\in\mathscr{B}(Y,Z)$, **则**

$$A^*B^*=(BA)^*. \tag{7.5.4}$$

(5) **如果** $A\in\mathscr{B}(X,Y)$ **是正则的, 则** A^* **也是正则的, 而且**

$$(A^{-1})^*=(A^*)^{-1}. \tag{7.5.5}$$

证明 (1) $\forall h\in Y^*$, $\forall x\in X$, 由于

$$|h(Ax)|\leqslant\|h\|\|Ax\|\leqslant\|h\|\|A\|\|x\|,$$

所以泛函 $x\mapsto h(Ax)$ ($\forall x\in X$) 是 X 上的有界线性泛函, 把它记为 A^*h. 则 $A^*h\in X^*$, 并且

$$\|A^*h\|\leqslant\|A\|\|h\|. \tag{7.5.6}$$

显然, 映射 $h\mapsto A^*h$ ($\forall h\in Y^*$) 是线性的, 所以 $A^*\in\mathscr{B}(Y^*,X^*)$, 而且满足(7.5.3)的算子 A^* 显然是由 A 唯一确定的.

(2) 先证映射 $A\mapsto A^*$ 是保范的. 由(7.5.6)式得到

$$\|A^*\|\leqslant\|A\|.$$

现在证明 $\|A^*\|\geqslant\|A\|$. 当 $A=\theta$ (零算子)时, 不等式显然成立. 不妨设 $A\neq\theta$. $\forall x\in X$, 如果 $Ax\neq\theta$, 根据推论7.2.6, $\exists h\in Y^*$, $\|h\|=1$, 使得 $h(Ax)=\|Ax\|$, 于是

$$\begin{aligned}\|Ax\|=h(Ax)&=(A^*h)(x)\leqslant\|A^*h\|\|x\|\\&\leqslant\|A^*\|\|h\|\|x\|=\|A^*\|\|x\|,\end{aligned}$$

上式对使 $Ax=\theta$ 的 x 自然成立. 由此得到

$$\|A^*\|\geqslant\|A\|.$$

从而 $\|A^*\|=\|A\|$, 即映射 $A\mapsto A^*$ 是保范的.

再证映射 $A\mapsto A^*$ 是线性的. $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{K}$, $\forall A,B\in\mathscr{B}(X,Y)$, 由 A、B 和 h 的线性就得到

$$\begin{aligned}[(\alpha A+\beta B)^*h](x)&=h[(\alpha A+\beta B)x]\\&=\alpha h(Ax)+\beta h(Bx)\\&=\alpha(A^*h)(x)+\beta(B^*h)(x)\end{aligned}$$

$$=[(\alpha A^* + \beta B^*)h](x) \quad (\forall h\in Y^*, \forall x\in X),$$

即

$$(\alpha A+\beta B)^*=\alpha A^*+\beta B^*. \tag{7.5.7}$$

因此 $A\mapsto A^*$是线性算子.

(3) $\forall h\in X^*, \forall x\in X$, 由(7.5.3),

$$[(I_X)^*h](x)=h(I_Xx)=h(x),$$

即$(I_X)^*h=h$对一切$h\in X^*$成立. 所以 $I_{X^*}=(I_X)^*$.

(4) $\forall g\in Z^*$, $\forall x\in X$,

$$[(BA)^*g](x)=g[B(Ax)]=(B^*g)(Ax)=[A^*(B^*g)](x).$$

所以

$$(BA)^*g=A^*(B^*g) \quad (\forall g\in Z^*),$$

即(7.5.4)式成立.

(5) 由于 $A^{-1}\in\mathscr{B}(Y,X)$, 而且

$$AA^{-1}=I_Y, A^{-1}A=I_X,$$

从而由(7.5.4)式得到

$$(A^{-1})^*A^*=(AA^{-1})^*=(I_Y)^*=I_{Y^*},$$

$$A^*(A^{-1})^*=(A^{-1}A)^*=(I_X)^*=I_{X^*}.$$

再由引理 7.4.1 知 A^*是正则的,而且$(A^*)^{-1}=(A^{-1})^*$. 证毕.

既然映射 $\tau: x\mapsto x^{**}$将X中的向量 x 嵌入二次共轭空间 X^{**} 自然也可以把算子"嵌入"二次共轭空间.

设 X、Y 是两个赋范线性空间, $A\in\mathscr{B}(X,Y)$, A^*是 A 的共轭算子,即 $A^*\in\mathscr{B}(Y^*,X^*)$, 且$\|A^*\|=\|A\|$. 由定理 7.5.3 的 (1), A^*也有共轭算子$(A^*)^*$,把它记为 A^{**},则$A^{**}\in\mathscr{B}(X^{**}, Y^{**})$,且$\|A^{**}\|=\|A^*\|$. 于是当 $x\in X, f\in Y^*$时,

$$(A^{**}x^{**})(f)=x^{**}(A^*f)=(A^*f)(x)=f(Ax)=(Ax)^{**}(f),$$

由此得到

$$A^{**}x^{**}=(Ax)^{**}. \tag{7.5.8}$$

如果把X嵌入X^{**},Y嵌入Y^{**},那末上式便可以写成

$$A^{**}x=Ax. \tag{7.5.8'}$$

这样便得到下面的定理:

定理 7.5.4 **设** X、Y **是赋范线性空间,** $A\in\mathscr{B}(X,Y)$, **那末当** X、Y **分别嵌入** X^{**}、Y^{**} **时,** A^{**}**便是算子**A**的延拓, 而且**$\|A^{**}\|=\|A\|$.

例 4 设 $A=(t_{ij})$ 是 $m\times n$ 矩阵, 这里 $t_{ij}(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$是实数,下标 i 表示行,下标 j 表示列. 由矩阵A定义了一个由n维实欧几里得空间$\mathbf{R}^n$到m维实欧几里得空间$\mathbf{R}^m$的算子T:

$$Tx=y\quad(\forall x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbf{R}^n),$$

其中 $y=(y_1,y_2,\cdots,y_m)$, $y_i=\sum\limits_{j=1}^{n}t_{ij}x_j$, $i=1,2,\cdots,m$. 显然T是$\mathbf{R}^n$到$\mathbf{R}^m$的线性算子, 并且由§7.1例5知T是有界算子, 即$T\in\mathscr{B}(\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^m)$. 现在求$T$的共轭算子$T^*$. $\forall f\in(\mathbf{R}^m)^*$, 由§7.1例1和例5可知, 有唯一确定的有序数组 $(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)\in\mathbf{R}^m$, 使得

$$\begin{aligned}(T^*f)(x)=f(Tx)&=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\Big(\sum_{j=1}^{n}t_{ij}x_j\Big)\\&=\sum_{j=1}^{n}\Big(\sum_{i=1}^{m}t_{ij}\alpha_i\Big)x_j\\&=\sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{m}t_{ji}\alpha_j\Big)x_i\quad(\forall x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbf{R}^n).\end{aligned}$$

记 $\beta_i=\sum\limits_{j=1}^{m}t_{ji}\alpha_j(i=1,2,\cdots,n)$, 由上式知 T^*f 可以由$\mathbf{R}^n$中的

元 $(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n)$ 来表示. 于是, 如果把 f 与 $\mathbf{R}^m$ 中的元 $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)$ 视为同一, 把 T^*f 与 $\mathbf{R}^n$ 中的元 $(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n)$ 视为同一, 则 T^* 可以写成

$$T^*: (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m) \mapsto (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n) \quad (\forall (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m) \in \mathbf{R}^m = (\mathbf{R}^m)^*).$$

这表明 T^* 由 A 的转置矩阵 (t_{ji}) 唯一确定.

例 5 设 $K(s, t)$ 是 $[a, b] \times [a, b]$ 上的可测函数且满足

$$\int_a^b \int_a^b |K(s, t)|^q ds dt < +\infty \quad (1 < q < +\infty).$$

令

$$(Tx)(s) = \int_a^b K(s, t) x(t) dt \quad \left(\forall x \in L^p[a, b],\ p = \frac{q}{q-1}\right),$$

则 T 是 $L^p[a, b]$ 到 $L^q[a, b]$ 的有界线性算子. 事实上, 记

$$M = \left(\int_a^b \int_a^b |K(s, t)|^q ds dt\right)^{\frac{1}{q}}.$$

由 Fubini 定理和 Hölder 不等式得到

$$\begin{aligned}
|(Tx)(s)| &= \left|\int_a^b K(s, t) x(t) dt\right| \\
&\leqslant \int_a^b |K(s, t) x(t)| dt \\
&\leqslant \left(\int_a^b |x(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |K(s, t)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \|x\| \left(\int_a^b |K(s, t)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \quad (\forall x \in L^p[a, b]),
\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}
\left(\int_a^b |(Tx)(s)|^q ds\right)^{\frac{1}{q}} &\leqslant \|x\| \left(\int_a^b \int_a^b |K(s, t)|^q dt ds\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \|x\| \left(\int_a^b \int_a^b |K(s, t)|^q ds dt\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= M \|x\| \quad (\forall x \in L^p[a, b]).
\end{aligned}$$

所以 $Tx\in L^q[a,b]$($\forall x\in L^p[a,b]$)，且 $\|T\|\leqslant M$，即 $T\in\mathscr{B}(L^p[a,b],L^q[a,b])$.

现在求 T 的共轭算子 T^*. $\forall f\in L^q[a,b]^*$，$\exists$唯一的 $y\in L^p[a,b]$，使得

$$
\begin{aligned}
(T^*f)(x)=f(Tx)&=\int_a^b (Tx)(s)y(s)ds\\
&=\int_a^b y(s)\left(\int_a^b K(s,t)x(t)dt\right)ds\\
&=\int_a^b x(t)\left(\int_a^b K(s,t)y(s)ds\right)dt\\
&=\int_a^b x(s)\left(\int_a^b K(t,s)y(t)dt\right)ds \quad (\forall x\in L^p[a,b]).
\end{aligned}
$$

所以 T^*f 可以由函数 $\int_a^b K(t,s)y(t)dt=g(s)$ 来表示. 于是，如果把 f 与 y 视为同一，把 T^*f 与 g 视为同一，则 T^* 可以写成

$$
(T^*y)(s)=\int_a^b K(t,s)y(t)dt \quad (\forall y\in L^p[a,b]=L^q[a,b]^*).
$$

证毕.

习 题 7.5

1. 证明：任何有限维赋范线性空间都是自反的.

2. 证明：无限维赋范线性空间的共轭空间是无限维的.

3. 证明：Banach 空间 X 自反的充要条件是 X^* 自反.

*4. 证明：$C[a,b]$ 是不自反的.

5. 设 X 是赋范线性空间，τ 是 X 到 X^{**} 的自然嵌入映射. 则 $\tau(X)$ 是 X^{**} 的闭子空间 $\Leftrightarrow X$ 是完备的.

6. 设 X 是 Banach 空间，$\{x_n\}$ 是 X 中的点列. 如果 $\forall f\in X^*$，$\sum_{n=1}^{\infty}|f(x_n)|<+\infty$，则必有正数 M，使 $\forall f\in X^*$，有 $\sum_{n=1}^{\infty}|f(x_n)|\leqslant M\|f\|$.

7. 设 X 是 Banach 空间，$\{x_n\}$ 是 X 中的点列. 证明下列三件事彼此

等价：

(1) $\forall f\in X^*$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|f(x_n)|$收敛；

(2) $\exists M>0$，使对一切自然数m以及任意的$\varepsilon_n=\pm1$，有

$$\left\|\sum_{n=1}^{m}\varepsilon_n x_n\right\|\leqslant M;$$

(3) $\exists M>0$，使对任意的一串自然数$n_1<n_2<\cdots<n_k$(这里k也是任意的自然数)，有

$$\left\|\sum_{j=1}^{k}x_{n_j}\right\|\leqslant M.$$

8. 设$\{f_n\}$是Banach空间X的共轭空间X^*中的点列。则$\forall x\in X$，

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|f_n(x)|$收敛$\Leftrightarrow\forall F\in X^{**}$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|F(f_n)|$收敛。

9. 设X，Y是Banach空间，T是X到Y的线性算子。如果$\forall g\in Y^*$，$g(Tx)$是X上的连续线性泛函，则$T\in\mathscr{B}(X,Y)$。

10. 设X是Banach空间，$\{x_n\}\subset X$。如果$\forall f\in X^*$，$\{f(x_n)\}$是有界的，证明$\{\|x_n\|\}$是有界的。

11. 设X和Y是Banach空间，$T_n\in\mathscr{B}(X,Y)$，$n=1,2,\cdots$。证明下列三件事等价：

(1) $\{\|T_n\|\}$是有界的。

(2) $\forall x\in X$，$\{\|T_n x\|\}$是有界的。

(3) $\forall x\in X$，$\forall g\in Y^*$，$\{|g(T_n x)|\}$是有界的。

12. 在l^2中定义算子

$$T:(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)\longmapsto\left(x_1,\frac{x_2}{2},\cdots,\frac{x_n}{n},\cdots\right),$$

证明$T\in\mathscr{B}(l^2)$并求T^*。

13. 在$l^p(1\leqslant p<+\infty)$中定义算子

$$T:(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)\longmapsto(0,x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots),$$

证明$T\in\mathscr{B}(l^p)$并求T^*。

14. 设X、Y是赋范线性空间，$T_n(n=1,2,\cdots)$，$T_0\in\mathscr{B}(X,Y)$。如果$\|T_n-T_0\|\to0\,(n\to\infty)$，则$\|T_n^*-T_0^*\|\to0\,(n\to\infty)$。

§7.6 弱收敛和弱列紧性

7.6.1 算子列的一致、强、弱收敛

在经典分析中，关于函数序列的收敛性常常用到的是处处收敛和一致收敛的概念. 由于所考察的问题的需要，不同的场合采用不同的收敛概念. 对于算子序列，类似于函数序列的一致收敛和处处收敛，也常常用到下面几种形式的收敛性.

定义 7.6.1 设 X、Y 都是赋范线性空间，$T_n(n=1,2,\cdots)$，$T\in\mathscr{B}(X,Y)$.

(1) 如果 $\|T_n-T\|\to 0(n\to\infty)$，则称 $\{T_n\}$ 按算子范数收敛于 T，或称 $\{T_n\}$ 一致收敛于 T，记作 $T_n\to T$. 这时 T 称作 $\{T_n\}$ 的一致极限.

(2) 如果 $\forall x\in X$，$\|(T_n-T)x\|\to 0(n\to\infty)$，则称 $\{T_n\}$ 强收敛于 T，记作 $T_n\xrightarrow{\text{强}}T$. 这时 T 称作 $\{T_n\}$ 的强极限.

(3) 如果 $\forall x\in X$，$\forall f\in Y^*$，都有 $f(T_nx)\to f(Tx)(n\to\infty)$，则称 $\{T_n\}$ 弱收敛于 T，记作 $T_n\xrightarrow{\text{弱}}T$. 这时 T 称作 $\{T_n\}$ 的弱极限.

注 1 上述极限若存在必唯一. 其中一致极限和强极限的唯一性是显然的. 现证明弱极限也是唯一的. 事实上，设 T、$T'\in\mathscr{B}(X,Y)$ 都是 $\{T_n\}\subset\mathscr{B}(X,Y)$ 的弱极限，由于 $\forall x\in X$，$\forall f\in Y^*$，

$$f(T_nx)\to f(Tx)\quad(n\to\infty),\ f(T_nx)\to f(T'x)\quad(n\to\infty),$$

从而 $f(Tx)=f(T'x)$，即 $f(Tx-T'x)=0$. 由此可知 $Tx-T'x=\theta$（如果 $(T-T')x\neq\theta$，根据泛函延拓定理的推论7.2.6，必有 $f_0\in Y^*$，使得 $f_0((T-T')x)=\|(T-T')x\|\neq 0$）. 所以 $Tx=T'x(\forall x\in X)$，即 $T=T'$.

注 2 一致收敛蕴含强收敛，强收敛蕴含弱收敛. 这由上述定义可立即推知. 但反过来都不对.

例 1 （强收敛而不一致收敛） 在 l^2 中作"左移"算子

$$Tx=(x_2, x_3, \cdots) \quad (\forall x=(x_1, x_2, \cdots)\in l^2).$$

令 $T_n=T^n$，便有

$$T_n x=(x_{n+1}, x_{n+2}, \cdots) \quad (\forall x=(x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots)\in l^2).$$

显然 $\{T_n\}\subset\mathscr{B}(l^2)$. $\{T_n\}$ 强收敛于 θ（零算子）.

事实上，$\forall x=(x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots)\in l^2$，有

$$\|T_n x\|=\left(\sum_{i=n+1}^{\infty}|x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}\to 0 \quad (n\to\infty),$$

即 $T_n \xrightarrow{\text{强}} \theta$. 但 $\{T_n\}$ 不一致收敛于 θ.

事实上，令 $e_n=(\delta_{n1}, \delta_{n2}, \cdots)\left(\text{其中 } \delta_{nj}=\begin{cases}1, \text{当 } n=j \text{ 时}, \\ 0, \text{当 } n\neq j \text{ 时}\end{cases}\right)$，则 $\|e_n\|=1$ $(n=1, 2, \cdots)$，并且 $T_n e_{n+1}=e_1$，从而

$$\|T_n\|\geqslant\|T_n e_{n+1}\|=1 \quad (n=1, 2, \cdots).$$

因此 $\{T_n\}$ 不一致收敛于 θ.

例 2 （弱收敛而不强收敛） 在 l^2 中作"右移"算子

$$Tx=(0, x_1, x_2, \cdots) \quad (\forall x=(x_1, x_2, \cdots)\in l^2).$$

令 $T_n=T^n$，便有

$$T_n x=(\underbrace{0, 0, \cdots, 0}_{n\text{ 个}}, x_1, x_2, \cdots) \quad (\forall x=(x_1, x_2, \cdots)\in l^2).$$

显然 $\{T_n\}\subset\mathscr{B}(l^2)$，且 $\|T_n x\|=\|x\|$ $(\forall x\in l^2, n=1, 2, \cdots)$，从而 $\{T_n\}$ 不强收敛于 θ. 但是 $\forall f=(y_1, y_2, \cdots)\in(l^2)^*=l^2$，$\forall x=(x_1, x_2, \cdots)\in l^2$，有

$$\begin{aligned}|f(T_n x)|&=\left|\sum_{i=1}^{\infty}y_{i+n}x_i\right| \\ &\leqslant\left(\sum_{i=1}^{\infty}|y_{i+n}|^2\right)^{\frac{1}{2}}\|x\|\to 0 \quad (n\to\infty),\end{aligned}$$

因此 $T_n \xrightarrow{\text{弱}} \theta$.

定理 7.6.1 设 X、Y 是 Banach空间，$\{T_n\}\subset\mathscr{B}(X,Y)$．$\{T_n\}$ 强收敛于某个 $T\in\mathscr{B}(X,Y)$ 的充要条件是

(1) $\{\|T_n\|\}$ 有界，即有 $M>0$，使 $\|T_n\|\leqslant M\ (n=1,2,\cdots)$；

(2) 存在 X 中的稠密集 D，使 $\forall x\in D$，$\{T_nx\}$ 收敛.

证明 "$\Rightarrow$"：(1)由共鸣定理得出，(2)是显然的.

"$\Leftarrow$"：$\forall x\in X$，$\forall\varepsilon>0$，由于 $\bar{D}=X$，所以 $\exists x'\in D$，使得

$$\|x-x'\|<\frac{\varepsilon}{3M}.$$

由于 $\{T_nx'\}$ 是收敛的，所以 $\exists$ 自然数 N，使当 $n,m\geqslant N$ 时，

$$\|T_nx'-T_mx'\|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

从而当 $n,m\geqslant N$ 时，

$$\begin{aligned}\|T_nx-T_mx\|&\leqslant\|T_nx-T_nx'\|+\|T_nx'-T_mx'\|+\|T_mx'-T_mx\|\\&<(\|T_n\|+\|T_m\|)\|x-x'\|+\frac{\varepsilon}{3}<\varepsilon,\end{aligned}$$

所以 $\{T_nx\}$ 是 Banach 空间 Y 中的基本列，于是 $\exists y\in Y$，使得 $\lim\limits_{n\to\infty}T_nx=y$．作 $X\to Y$ 的算子 T 如下：

$$Tx=y=\lim_{n\to\infty}T_nx\quad(\forall x\in X).$$

显然 T 是线性算子，并且

$$\|Tx\|=\lim_{n\to\infty}\|T_nx\|\leqslant\varliminf_{n\to\infty}\|T_n\|\|x\|\leqslant M\|x\|\quad(\forall x\in X),$$

从而 $T\in\mathscr{B}(X,Y)$，且 $\|T\|\leqslant\varliminf\limits_{n\to\infty}\|T_n\|$．证毕.

注 定理 7.6.1 的充分性可以不要求 X 的完备性，必要性可以不要求 Y 的完备性.

7.6.2 泛函列的*弱收敛与向量列的弱收敛

定义 7.6.2 设 X 是赋范线性空间．X^* 中的点列 $\{f_n\}$ 称为

*弱收敛于 $f\in X^*$，是指 $\forall x\in X$，均有

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x).$$

记作 $f_n \xrightarrow{*弱} f$. 这时 f 称作 $\{f_n\}$ 的*弱极限.

注 1 如果把 X^* 中的点列看成 $\mathscr{B}(X,\mathbb{K})$ 中的算子列，则算子列的强收敛和弱收敛都相当于泛函列的*弱收敛. 根据定义 7.6.1 的注 1，泛函列的*弱极限若存在也必唯一.

注 2 今后为了与*弱收敛作对照，我们把 X^* 中点列的依范数收敛也称为强收敛. 显然 X^* 中点列的强收敛蕴含*弱收敛，但反之不然.

例 3 （*弱收敛而不强收敛） 作 l^2 上的泛函列

$$f_n(x)=\xi_n \quad (\forall x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots)\in l^2).$$

显然 $\{f_n\}\subset(l^2)^*$，且 $\|f_n\|=1\,(n=1,2,\cdots)$，从而 $\{f_n\}$ 不强收敛于 θ（零泛函）. 但是 $\forall x\in l^2$，$\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=0$，因此 $f_n \xrightarrow{*弱} \theta$.

如果把定理 7.6.1 中的 Banach 空间 Y 改为 Banach 空间 $\mathbb{K}$，就立即得到

定理 7.6.2 **设 X 是 Banach 空间，$\{f_n\}\subset X^*$. $\{f_n\}$ *弱收敛于某个 $f\in X^*$ 的充要条件是**

(1) $\{\|f_n\|\}$ 有界；

(2) 存在 X 中的稠密集 D，使得 $\forall x\in D$，$\{f_n(x)\}$ 收敛.

注 定理 7.6.2 的充分性可以不要求 X 的完备性. 此外，由定理 7.6.1 充分性的证明结果知，若 X^* 中的点列 $\{f_n\}$ *弱收敛于 f，则 $\|f\|\leqslant\varliminf\limits_{n\to\infty}\|f_n\|$.

定义 7.6.3 设 X 是赋范线性空间. X 中的点列 $\{x_n\}$ 称为弱收敛于 $x\in X$，是指 $\forall f\in X^*$，均有

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=f(x).$$

记作 $x_n \xrightarrow{\text{弱}} x$. 这时 x 称作 $\{x_n\}$ 的弱极限.

注 1 由于 X 可视为 X^{**} 的子空间，从而"$\{x_n\}$ 作为 X 中的点列弱收敛于 $x \in X$"也可以说是"$\{x_n\}$ 作为 X^{**} 中的点列*弱收敛于 $x \in X^{**}$". 因此 X 中点列的弱极限若存在也必然是唯一的.

注 2 由于 X^* 也是赋范线性空间，自然 X^* 中的点列也有弱收敛的概念. 又由于 $X \subset X^{**}$，因此，X^* 中点列的弱收敛蕴含*弱收敛，而且当 X 是自反空间时，X^* 中点列的弱收敛与*弱收敛等价.

注 3 今后为了与弱收敛作对照，我们把 X 中点列的依范数收敛也称为强收敛. 显然 X 中点列的强收敛蕴含弱收敛. 当 $\dim X < +\infty$ 时，X 中点列的强收敛与弱收敛等价（证明留为习题）. 当 $\dim X = +\infty$ 时，X 中点列的弱收敛未必是强收敛（见下面例 4）.

例 4（弱收敛而不强收敛） 在 l^2 中取点列 $\{e_n\}$（其中 e_n 的取法同本节例 1）. $\forall f = (y_1, y_2, \cdots) \in (l^2)^* = l^2$,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n \quad (\forall x = (x_1, x_2, \cdots) \in l^2),$$

特别

$$f(e_n) = y_n \quad (n = 1, 2, \cdots),$$

从而 $\lim\limits_{n \to \infty} f(e_n) = 0$，即 $e_n \xrightarrow{\text{弱}} \theta$. 但由于 $\|e_n\| = 1\ (n = 1, 2, \cdots)$，因此 $\{e_n\}$ 不强收敛于 θ.

由定义 7.6.3 的注 1 和定理 7.6.2 可以得到

定理 7.6.3 设 X 是赋范线性空间，$\{x_n\} \subset X$, $x \in X$, $\{x_n\}$ 弱收敛于 x 的充要条件是

(1) $\{\|x_n\|\}$ 有界;

(2) 存在 X^* 中的稠密集 D，使得 $\forall f \in D$，均有 $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) =$

$f(x)$.

注 若赋范线性空间 $X(X\neq\{\theta\})$ 中的点列 $\{x_n\}$ 弱收敛于 $x\in X-\{\theta\}$，则 $\|x\|\leqslant\varliminf_{n\to\infty}\|x_n\|$.

事实上，根据泛函延拓定理的推论 7.2.6，$\exists f\in X^*$，使得 $f(x)=\|x\|$，且 $\|f\|=1$，从而

$$\|x\|=f(x)=\lim_{n\to\infty}f(x_n)\leqslant\varliminf_{n\to\infty}\|f\|\|x_n\|=\varliminf_{n\to\infty}\|x_n\|.$$ 证毕.

为了介绍下面的定理，我们先介绍一些概念.

设 X 是线性空间，$x_1,x_2,\cdots,x_n\in X$. 称 $\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i x_i$ 是 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的凸组合，如果 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\in[0,1]$，并且 $\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i=1$.

设 $A\subset X$，由习题 6.2 的第 2 题知，$\mathrm{co}(A)$（A 的凸包）是凸集，并且 $\mathrm{co}(A)$ 就是 A 中有限个元素的凸组合的全体.

设 X 是赋范线性空间，$A\subset X$. 称 $\overline{\mathrm{co}(A)}$（$A$ 的凸包的闭包）是 A 的凸闭包. 显然 A 的凸闭包就是包含 A 的最小的闭凸集.

定义 7.6.3 的注 3 已经指出，在无限维赋范线性空间中，点列的强收敛蕴含弱收敛，但反之不然. 然而，如果 $x_n\xrightarrow{\text{弱}}x_0$，我们却可以找到 $\{x_n\}$ 的凸组合序列，使其强收敛于 x_0. 这就是下面的定理：

***定理 7.6.4 (Mazur)** **设 X 是赋范线性空间，$\{x_n\}\subset X$，$x_0\in X$，$x_n\xrightarrow{\text{弱}}x_0$，则必定存在由 $\{x_n\}$ 的凸组合构成的一个点列**

$$\left\{\sum_{i=1}^{m(n)}\lambda_i^{(n)}x_i\,\middle|\,\sum_{i=1}^{m(n)}\lambda_i^{(n)}=1,\lambda_i^{(n)}\in[0,1],i=1,2,\cdots,m(n);\ n=1,2,\cdots\right\},$$

使其强收敛于 x_0.

证明 为简单起见，我们仅就X是实空间的情形进行证明. 令$M=\overline{\mathrm{co}(\{x_n\})}$，则$M$是$X$中的一个闭凸集. 只要证明$x_0\in M$就可以了. 假若$x_0\notin M$，根据推论 7.2.12，$\exists f\in X^*$及$\alpha\in\mathbf{R}$，使得

$$f(x)<\alpha<f(x_0)\quad(\forall x\in M),$$

从而

$$f(x_n)<\alpha<f(x_0)\quad(\forall n\in\mathbf{N}).$$

这与$x_n\xrightarrow{\text{弱}}x_0$矛盾，因此$x_0\in M$. 证毕.

从定理 7.6.4 的证明中我们得到

推论 7.6.5 设X是赋范线性空间，$\{x_n\}\subset X$，$x_0\in X$. 如果$x_n\xrightarrow{\text{弱}}x_0$，则$x_0\in\overline{\mathrm{co}(\{x_n\})}$.

7.6.3 弱列紧性与*弱列紧性

定义 7.6.4 设X是赋范线性空间，$A\subset X$. 如果A中任一点列都含有弱收敛的子列，则称A是弱列紧的. 如果X中任一有界集都是弱列紧的，则称X是局部弱列紧的.

显然，X中的列紧集必是弱列紧的，但反之不然.

定义 7.6.5 设X是赋范线性空间，$A\subset X^*$. 如果A中任一点列都含有*弱收敛的子列，则称A是*弱列紧的. 如果X^*中任一有界集都是*弱列紧的，则称X^*是局部*弱列紧的.

显然，X^*中的列紧集必是*弱列紧的，但反之不然.

定理 7.6.6 如果赋范线性空间X是可分的，则X^*是局部*弱列紧的.

证明 设A是X^*中的有界集，$\{f_n\}$是A中的任一点列. 因为X可分，所以X中有可数的稠密子集$\{x_k\}$ ($k=1,2,\cdots$). 因为$\{\|f_n\|\}$有界，所以$\{f_n(x_1)\}$是有界数列，因而可从$\{f_n\}$中选出子列$\{f_n^{(1)}\}$，使得$\{f_n^{(1)}(x_1)\}$收敛. 又因为$\{f_n^{(1)}(x_2)\}$也是有界数列，因而可

从$\{f_n^{(1)}\}$中选出子列$\{f_n^{(2)}\}$，使得$\{f_n^{(2)}(x_2)\}$收敛. 依次类推，由归纳法可以得到$\{f_n\}$的可数个子列 $\{f_n^{(k)}\}$ $(k=1,2,\cdots)$，其中$\{f_n^{(k)}\}\subset\{f_n^{(k-1)}\}$，而且对每个自然数$k$，数列$\{f_1^{(k)}(x_k), f_2^{(k)}(x_k),\cdots, f_n^{(k)}(x_k),\cdots\}$是收敛的. 取"对角线"序列$\{f_n^{(n)}\}$，则$\{f_n^{(n)}\}$是$\{f_n\}$的子列，$\{\|f_n^{(n)}\|\}$有界，并且对每个自然数$k$，数列

$$f_1^{(1)}(x_k), f_2^{(2)}(x_k),\cdots, f_n^{(n)}(x_k),\cdots$$

收敛. 又因为$\{x_k\}(k=1,2,\cdots)$在X中稠密，根据定理 7.6.2 及其注，$\exists f\in X^*$，使得 $f_n^{(n)}\xrightarrow{*弱} f$. 证毕.

注 可分赋范线性空间X的共轭空间X^*的单位闭球

$$B(\theta,1)=\{f\in X^*\mid \|f\|\leqslant 1\}$$

是*弱自列紧的，即$B(\theta,1)$中任一点列必含有*弱收敛于$B(\theta,1)$中一点的子列. 这可由定理 7.6.6 和定理 7.6.2 的注立即推出.

为了证明自反空间是局部弱列紧的，我们先给出一个引理.

引理 7.6.7(B. J. Pettis)　自反空间X的闭线性子空间X_0必是自反空间.

证明　要证X_0是自反的，只须证明 $\forall x_0^{**}\in X_0^{**}$，$\exists x_0\in X_0$，使得

$$x_0^{**}(f)=f(x_0)\quad (\forall f\in X_0^*). \qquad (7.6.1)$$

$\forall\varphi\in X^*$，φ在X_0上的限制$\varphi|_{X_0}$显然是X_0上的连续线性泛函，即$\varphi|_{X_0}\in X_0^*$，且

$$\|\varphi|_{X_0}\|=\sup_{\substack{x\in X_0\\ \|x\|=1}}|\varphi|_{X_0}(x)|\leqslant\sup_{\substack{x\in X\\ \|x\|=1}}|\varphi(x)|=\|\varphi\|. \quad (7.6.2)$$

作$X^*\to X_0^*$的算子

$$T:\varphi\mapsto f=\varphi|_{X_0}\quad (\forall\varphi\in X^*).$$

显然T是线性算子，且由(7.6.2)式知$T\in\mathscr{B}(X^*,X_0^*)$. 根据定理 7.5.3 的(1)，有唯一的$T^*\in\mathscr{B}(X_0^{**},X^{**})$. 于是$T^*x_0^{**}\in X^{**}$，由于$X$是自反的，所以$\exists x_0\in X$，使得

$$T^* x_0^{**}(\varphi) = \varphi(x_0) \quad (\forall \varphi \in X^*). \tag{7.6.3}$$

今证 $x_0 \in X_0$，用反证法．如果 $x_0 \in X - X_0$，由 X_0 是 X 的闭线性子空间知 $\rho(x_0, X_0) = d > 0$，根据泛函延拓定理的推论 7.2.5，$\exists \varphi_0 \in X^*$，使得 $\varphi_0(x) = 0 (\forall x \in X_0)$，$\varphi_0(x_0) = d$．这意味着 $T\varphi_0 = f_0 = \theta$，从而

$$0 = x_0^{**}(f_0) = x_0^{**}(T\varphi_0) = T^* x_0^{**}(\varphi_0) = \varphi_0(x_0) = d > 0,$$

这是不可能的，因此 $x_0 \in X_0$．

最后证明 x_0 也适合(7.6.1)．事实上，$\forall f \in X_0^*$，根据泛函延拓定理 7.2.4，$\exists \varphi \in X^*$，使得 $T\varphi = f = \varphi|_{X_0}$，从而

$$x_0^{**}(f) = x_0^{**}(T\varphi) = (T^* x_0^{**})(\varphi) = \varphi(x_0) = f(x_0).$$ 证毕．

定理 7.6.8　自反空间 X 是局部弱列紧的

证明　设 A 是 X 中的任一有界集，$\{x_n\}$ 是 A 中任一点列．令 $X_0 = \overline{\text{span}\{x_n\}}$，则 X_0 是 X 的闭线性子空间，且 X_0 可分（见定理 7.5.2 的证明）．由引理 7.6.7 知 X_0 是自反的，因而 X_0^{**} 是可分的，再由定理 7.5.2 知 X_0^* 也是可分的，根据定理 7.6.6，X_0^{**} 是局部 * 弱列紧的，即 X_0^{**} 中的任一有界点列必含有 * 弱收敛的子列．

设 τ 是 X_0 到 X_0^{**} 的自然嵌入映射，因为 $\{x_n\}$ 是 X_0 中的有界点列，从而 $\{\tau x_n\}$ 是 X_0^{**} 中的有界点列，所以 $\{\tau x_n\}$ 有子列 $\{\tau x_{n_k}\}$ * 弱收敛于 $x_0^{**} \in X_0^{**}$．由于 X_0 是自反的，因而 $\exists x_0 \in X_0$，使得 $\tau x_0 = x_0^{**}$．于是 $\forall f \in X_0^*$，有

$$(\tau x_{n_k})(f) \to (\tau x_0)(f) \quad (k \to \infty),$$

亦即 $f(x_{n_k}) \to f(x_0) \quad (k \to \infty)$．

剩下的是要证明

$$\lim_{n \to \infty} \varphi(x_{n_k}) = \varphi(x_0) \quad (\forall \varphi \in X^*).$$

事实上，$\forall \varphi \in X^*$，显然 φ 在 X_0 上的限制 $\varphi|_{X_0} \in X_0^*$，从而

$$\varphi(x_{n_k}) = \varphi|_{X_0}(x_{n_k}) \to \varphi|_{X_0}(x_0) = \varphi(x_0) \quad (k \to \infty).$$

即 $x_{n_k} \xrightarrow{\text{弱}} x_0$. 证毕.

注 自反空间X的单位闭球 $B(\theta,1)=\{x\in X \mid \|x\|\leqslant 1\}$ 是弱自列紧的,即 $B(\theta,1)$ 中的任一点列必含有弱收敛于 $B(\theta,1)$中一点的子列. 这可由定理 7.6.8 和定理 7.6.3 的注立即推出.

习 题 7.6

1. 设X是赋范线性空间, X_0是X的闭线性子空间, 如果$\{x_n\}\subset X_0$, $x_n \xrightarrow{\text{弱}} x_0\in X$, 则 $x_0\in X_0$.

2. 证明:空间$C[a,b]$中点列$\{x_n\}$弱收敛于 $x_0\in C[a,b]\Leftrightarrow$存在正数$M$,使$\|x_n\|\leqslant M\ (n=1,2,\cdots)$,并且$\forall t\in[a,b]$,都有$\lim\limits_{n\to\infty}x_n(t)=x_0(t)$.

3. 试在$C[0,1]$中作一个弱收敛但不强收敛的点列.

4. 证明: $L^p[a,b]\ (1<p<+\infty)$中点列$\{x_n\}$弱收敛于 $x_0\in L^p[a,b]\Leftrightarrow$ $\{\|x_n\|\}$有界,并且$\forall t\in[a,b]$,

$$\int_a^t x_n(s)\,ds\to\int_a^t x_0(s)\,ds \quad (n\to\infty).$$

5. 证明: $l^p\ (1<p<+\infty)$中点列$\{x_n\}=\{(\xi_1^{(n)},\xi_2^{(n)},\cdots)\}$弱收敛于 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots)\in l^p\Leftrightarrow$存在正数$M$使$\|x_n\|\leqslant M\ (n=1,2,\cdots)$, 并且$\lim\limits_{n\to\infty}\xi_i^{(n)}=\xi_i$ $(i=1,2,\cdots)$.

6. 证明:任何有限维赋范线性空间中点列的弱收敛与强收敛等价.

*7. 证明: l^1 中点列的弱收敛与强收敛等价.

8. **定义** 设X是赋范线性空间, $\{f_n\}$是 X^*中一点列, 如果 $\forall x\in X$, $\{f_n(x)\}$收敛,则称$\{f_n\}$为*弱基本列. 如果 X^*中的任何*弱基本列都*弱收敛于 X^*中一点,则称 X^*是*弱序列完备的. 同样,设$\{x_n\}$是X中的点列, 如果$\forall f\in X^*$, $\{f(x_n)\}$是收敛的,则称$\{x_n\}$为弱基本列. 如果X中的任何弱基本列都弱收敛于X中一点,则称X是弱序列完备的.

证明: (1) 若X是 Banach 空间, 则 X^*是*弱序列完备的. (2) 若X是自反空间,则X是弱序列完备的.

9. **定义** 设X、Y是两个赋范线性空间,$\{T_n\}\subset\mathscr{B}(X,Y)$. 如果$\forall x\in X$, $\forall f\in Y^*$, $\{f(T_nx)\}$为基本数列, 则称$\{T_n\}$为弱基本列. 如果$\mathscr{B}(X,Y)$中的任何弱基本列都弱收敛于$\mathscr{B}(X,Y)$中一点,则称$\mathscr{B}(X,Y)$是弱完备的.

证明：设 X 是 Banach 空间，Y 是赋范线性空间. $\mathscr{B}(X,Y)$ 弱完备$\Leftrightarrow Y$ 是弱序列完备的.

10. **证明**：在自反的赋范线性空间中，集合的弱列紧性与有界性是等价的.

11. 证明：赋范线性空间 X 中的闭凸集是弱闭的，即若 M 是 X 的闭凸集，$\{x_n\}\subset M$，且 $x_n \xrightarrow{\text{弱}} x_0$，则 $x_0\in M$.

12. **定义** 设 X 是赋范线性空间，$D\subset X$，$f:D\to\mathbf{R}$ 是 D 上的泛函，$x\in D$. 称 f 在 x 处是弱下半连续的，如果 $\forall\{x_n\}\subset D$，$x_n \xrightarrow{\text{弱}} x$，都有 $f(x)\leqslant\varliminf\limits_{n\to\infty} f(x_n)$；称 f 在 x 处是弱上半连续的，如果 $\forall\{x_n\}\subset D$，$x_n \xrightarrow{\text{弱}} x$，都有 $f(x)\geqslant\varlimsup\limits_{n\to\infty} f(x_n)$；如果 f 在 x 处既是弱下半连续的，也是弱上半连续的，就称 f 在 x 处是弱连续的. 如果 f 在 D 中每一点都是弱连续(弱下半连续、弱上半连续)的，则称 f 在 D 上是弱连续(弱下半连续、弱上半连续)的.

证明：设 X 是自反空间，M 是 X 中的有界闭凸集，$f:M\to\mathbf{R}$ 为弱连续泛函，则 f 在 M 上必达到最大值和最小值.

13. 设 X 是赋范线性空间，M 是 X 中弱列紧弱闭集，$\varphi:M\to\mathbf{R}$ 为弱下半连续泛函，则 $\exists x_0\in M$，使得 $\varphi(x_0)=\inf\limits_{x\in M}\varphi(x)$.

14. 设 X 是自反空间，M 是 X 中的非空闭凸集，则 $\exists x_0\in M$，使得

$$\|x_0\|=\inf\{\|x\|\mid x\in M\}.$$

第八章　内积空间和 Hilbert 空间

Hilbert 空间是有限维欧几里得空间的直接推广，其基本特征是在线性空间中引入了"内积"，并由此在空间中建立起了相应的几何学.

Hilbert 空间的理论是泛函分析中成熟最早的部分，它在分析数学中有很重要的地位和广泛的应用.

本章介绍内积空间和 Hilbert 空间的基本概念、性质以及几类重要的线性算子.

§ 8.1　内积空间的基本概念和性质

8.1.1　内积空间的定义及特征

不论是复或实的 n 维欧几里得空间都有一个特点，在其中定义了向量的内积，并且一向量的范数之平方等于该向量与它自身的内积. 详细地说，设 $\boldsymbol{R}^n$ 是复(或实)的欧几里得空间，对于 $\boldsymbol{R}^n$ 中任意两个向量 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$，规定内积 (x,y) 是如下的复(或实)数

$$(x,y)=x_1\bar{y}_1+x_2\bar{y}_2+\cdots+x_n\bar{y}_n,$$

其中 $\bar{y}_i$ 表示 y_i 的共轭复数. 显然，这样定义的内积 $(\cdot,\cdot)$ 具有下述性质：

(1) $(x,x)\geqslant 0\quad(\forall x\in\boldsymbol{R}^n)$，且 $(x,x)=0\Leftrightarrow x=\theta$；

(2) $(x,y)=\overline{(y,x)}\quad(\forall x,y\in\boldsymbol{R}^n)$；

(3) $(\alpha x+\beta y,z)=\alpha(x,z)+\beta(y,z)\quad(\forall x,y,z\in\boldsymbol{R}^n,\forall\alpha,\beta\in\mathbf{K})$.

现在，我们将 n 维欧几里得空间的"内积"这个概念抽象出来

移植到一般的线性空间中去，就得到内积空间的概念.

定义 8.1.1 设 X 是 $\mathbb{K}$ 上的线性空间. 称泛函 $(\cdot,\cdot): X\times X\to\mathbb{K}$ 是 X 中的一个内积，是指它满足：

(1) 正定性 $(x,x)\geqslant 0 \quad (\forall x\in X)$，且 $(x,x)=0\Leftrightarrow x=\theta$；

(2) 共轭对称性 $(x,y)=\overline{(y,x)} \quad (\forall x,y\in X)$；

(3) 对第一变元线性 $(\alpha x+\beta y,z)=\alpha(x,z)+\beta(y,z) \quad (\forall x,y,z\in X,\forall\alpha,\beta\in\mathbb{K})$.

具有内积 $(\cdot,\cdot)$ 的复(或实)的线性空间 X 称为复(或实)的内积空间，记作 $(X,(\cdot,\cdot))$ 或简记作 X.

由内积的条件(2)、(3)可以得到下列事实：

1° 内积 $(\cdot,\cdot)$ 对于第二个变元是共轭线性的，即 $\forall x,y,z\in X,\forall\alpha,\beta\in\mathbb{K}$，有

$$(x,\alpha y+\beta z)=\bar{\alpha}(x,y)+\bar{\beta}(x,z).$$

事实上，
$$(x,\alpha y+\beta z)=\overline{(\alpha y+\beta z,x)}=\overline{\alpha(y,x)+\beta(z,x)}=\bar{\alpha}(x,y)+\bar{\beta}(x,z).$$

2° $(x,\theta)=(\theta,x)=0 \quad (\forall x\in X)$.

显然，当 X 为实空间时，条件(2)成为 $(x,y)=(y,x)$ (对称性)，并且内积对第二个变元也是线性的.

注 本章凡说到内积空间，而未指明是"复"的或"实"的时，均假定是复空间.

定理 8.1.1 设 $(X,(\cdot,\cdot))$ 是内积空间，令

$$\|x\|=(x,x)^{1/2} \quad (\forall x\in X), \tag{8.1.1}$$

则 $\|\cdot\|$ 是 X 上的范数.

证明 显然 $\|\cdot\|$ 满足范数的条件(1)、(2)、(4)(见定义6.2.2)，只须再证 $\|\cdot\|$ 满足范数的条件(3). 为此，先证明 Schwarz 不等式

$$|(x,y)|\leqslant\|x\|\|y\| \quad (\forall x,y\in X). \tag{8.1.2}$$

事实上，对任何复数 λ，都有

$$\begin{aligned}0&\leqslant(x+\lambda y,\ x+\lambda y)\\&=(x,x)+\bar{\lambda}(x,y)+\lambda(y,x)+|\lambda|^2(y,y).\end{aligned}\tag{8.1.3}$$

当 $y=\theta$ 时，(8.1.2)显然成立。现设 $y\neq\theta$，令 $\lambda=-\dfrac{(x,y)}{(y,y)}$，代入(8.1.3)，得到

$$(x,x)-2\frac{|(x,y)|^2}{(y,y)}+\frac{|(x,y)|^2}{(y,y)^2}(y,y)\geqslant 0,$$

即

$$|(x,y)|^2\leqslant(x,x)(y,y).$$

上式两边开平方就得到不等式(8.1.2)。

现在证明 $\|\cdot\|$ 满足范数的条件(3)。$\forall x,y\in X$，在(8.1.3)中取 $\lambda=1$，得到

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2&=\|x\|^2+2\mathrm{Re}(x,y)+\|y\|^2\\&\leqslant\|x\|^2+2|(x,y)|+\|y\|^2\\&\leqslant\|x\|^2+2(x,x)^{1/2}(y,y)^{1/2}+\|y\|^2\\&=\|x\|^2+2\|x\|\|y\|+\|y\|^2\\&=(\|x\|+\|y\|)^2,\end{aligned}$$

所以 $$\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|.$$ 证毕.

我们称(8.1.1)式所定义的范数 $\|\cdot\|$ 是由 X 中的内积 $(\cdot,\cdot)$ 导出的范数。因此，内积空间按其内积导出的范数成为赋范线性空间。今后凡说内积空间上的范数均指其内积导出的范数，并在此意义下我们说内积空间是赋范线性空间。内积空间上的收敛、极限等概念，通常都是按其内积导出的范数而言。

定理 8.1.2 **设 $(X,(\cdot,\cdot))$ 是内积空间，则内积 $(\cdot,\cdot)$ 按范数 $\|\cdot\|$ 是 $X\times X$ 上的连续函数.**

证明 $\forall x,y\in X$，设 $\{x_n\},\{y_n\}\subset X$，$x_n\to x$，$y_n\to y$，则 $\{\|y_n\|\}$ 有界，于是

$$
\begin{aligned}
&|(x_n, y_n) - (x, y)| \\
\leqslant &|(x_n, y_n) - (x, y_n)| + |(x, y_n) - (x, y)| \\
= &|(x_n - x, y_n)| + |(x, y_n - y)| \\
\leqslant &\|x_n - x\| \|y_n\| + \|x\| \|y_n - y\| \to 0 \quad (n \to \infty).
\end{aligned}
$$

证毕.

定义 8.1.2 如果内积空间 X 按其内积导出的范数是完备的赋范线性空间，则称 X 是 Hilbert 空间.

例 1 n 维欧几里得空间 $\boldsymbol{R}^n$ $\forall x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$，$y = (y_1, y_2, \cdots, y_n) \in \boldsymbol{R}^n$，令

$$
(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y}_i, \tag{8.1.4}
$$

则 $(\cdot, \cdot)$ 是 $\boldsymbol{R}^n$ 中的内积，并且由此内积 $(\cdot, \cdot)$ 导出的范数就是欧几里得范数，因此 $\boldsymbol{R}^n$ 是一个 Hilbert 空间.

例 2 空间 l^2 $\forall x = (x_1, x_2, \cdots), y = (y_1, y_2, \cdots) \in l^2$，由于

$$
\sum_{i=1}^{\infty} |x_i y_i| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^2 \right)^{1/2} < +\infty,
$$

所以 $\sum_{i=1}^{\infty} x_i \overline{y}_i$ 绝对收敛. 令

$$
(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \overline{y}_i. \tag{8.1.5}
$$

易知 $(\cdot, \cdot)$ 满足内积的全部条件，所以 l^2 按 (8.1.5) 定义的内积成为内积空间. 又因为由此内积导出的范数

$$
\|x\| = (x, x)^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 \right)^{1/2} \quad (\forall x = (x_1, x_2, \cdots) \in l^2)
$$

就是 l^2 的范数，因此 l^2 按 (8.1.5) 规定的内积成为 Hilbert 空间.

例 3 空间 $L^2(E)$ ($E \in \mathscr{L}_\nu$, ν 为自然数) $\forall x, y \in L^2(E)$，令

$$(x, y)=\int_{E} x(t) \overline{y(t)} d t. \tag{8.1.6}$$

易知$(\cdot,\cdot)$满足内积的全部条件,所以$L^2(E)$按(8.1.6)定义的内积成为内积空间. 又因为由内积(8.1.6)导出的范数

$$\|x\|=(x, x)^{1/2}=\left(\int_{E}|x(t)|^{2} d t\right)^{1/2} \quad (\forall x \in L^{2}(E))$$

就是$L^2(E)$的范数,因此$L^2(E)$按(8.1.6)定义的内积是 Hilbert 空间.

下面讨论内积空间中范数的特征.

引理 8.1.3　设$(X,(\cdot,\cdot))$是内积空间,$\|\cdot\|$是由内积$(\cdot,\cdot)$导出的范数,则$(\cdot,\cdot)$与$\|\cdot\|$满足下列关系:
当X是实空间时,

$$(x, y)=\frac{1}{4}\left(\|x+y\|^{2}-\|x-y\|^{2}\right) \quad (\forall x, y \in X); \tag{8.1.7}$$

当X是复空间时,

$$(x, y)=\frac{1}{4}\left(\|x+y\|^{2}-\|x-y\|^{2}+i\|x+i y\|^{2}-i\|x-i y\|^{2}\right) \quad (\forall x, y \in X). \tag{8.1.8}$$

(注　(8.1.7)、(8.1.8)称为极化恒等式.)

证明　只要把(8.1.7)、(8.1.8)式右端的范数用内积表示,直接计算即可得到这两个等式. 证毕.

定理 8.1.4　为了在赋范线性空间$(X,\|\cdot\|)$中引入内积$(\cdot,\cdot)$使得由$(\cdot,\cdot)$导出的范数就是$\|\cdot\|$,必须且只须范数$\|\cdot\|$满足如下的平行四边形公式(参阅图 8.1.1)

$$\|x+y\|^{2}+\|x-y\|^{2}=2\left(\|x\|^{2}+\|y\|^{2}\right) \quad (\forall x, y \in X). \tag{8.1.9}$$

证明　"$\Rightarrow$":设$(\cdot,\cdot)$是X中的内积,并且$(x,x)^{1/2}=\|x\|$ $(\forall x \in X)$,则$\forall x, y \in X$,有

$$
\begin{aligned}
\|x+y\|^2+\|x-y\|^2 &= (x+y,x+y)+(x-y,x-y)\\
&=2(x,x)+2(y,y)\\
&=2(\|x\|^2+\|y\|^2).
\end{aligned}
$$

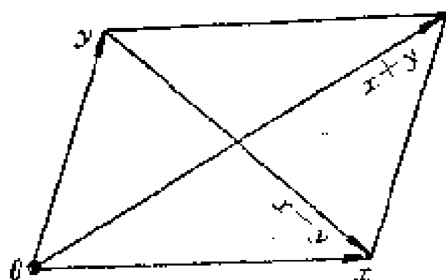


图 8.1.1

"⇐"：下面分 X 是实空间与复空间两种情形进行证明.

1° 当 X 是实空间时，如果 $(\cdot,\cdot)$ 是 X 中的内积，并且 $\|\cdot\|$ 是由 $(\cdot,\cdot)$ 导出的范数，由引理 8.1.3 知 $(\cdot,\cdot)$ 与 $\|\cdot\|$ 满足极化恒等式(8.1.7)，自然应该令

$$
(x,y)=\frac{1}{4}(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2) \quad (\forall x,y\in X). \tag{8.1.10}
$$

现在证明 $(\cdot,\cdot)$ 是 X 中的内积. 事实上，显然有

$$
(x,x)=\|x\|^2 \quad (\forall x\in X) \tag{8.1.11}
$$

和

$$
(x,y)=(y,x) \quad (\forall x,y\in X),
$$

即 $(\cdot,\cdot)$ 满足内积的条件(1)和(2). 由条件(8.1.9)，$\forall x,y,z\in X$，有

$$
\begin{aligned}
(x,z)+(y,z) &= \frac{1}{4}(\|x+z\|^2-\|x-z\|^2+\|y+z\|^2-\|y-z\|^2)\\
&=\frac{1}{8}(\|x+y+2z\|^2+\|x-y\|^2-\|x+y-2z\|^2\\
&\quad -\|x-y\|^2)\\
&=\frac{1}{2}\left(\left\|\frac{x+y}{2}+z\right\|^2-\left\|\frac{x+y}{2}-z\right\|^2\right)\\
&=2\left(\frac{x+y}{2},z\right).
\end{aligned} \tag{8.1.12}
$$

在(8.1.12)中取 $y=\theta$，得到

$$(x, z)=2\left(\frac{x}{2}, z\right). \tag{8.1.13}$$

在(8.1.13)中以 $x+y$ 代 x，并注意到(8.1.12)，得到

$$(x+y, z)=(x, z)+(y, z). \tag{8.1.14}$$

由(8.1.14)易知对任何自然数 n，有

$$(nx, y)=n(x, y). \tag{8.1.15}$$

事实上，当 $n=1$ 时，(8.1.15)显然成立. 设对于自然数 n，(8.1.15)成立，由(8.1.14)得到

$$\begin{aligned}((n+1)x, y)&=(nx+x, y)=(nx, y)+(x, y)\\&=n(x, y)+(x, y)=(n+1)(x, y),\end{aligned}$$

所以对 $n+1$，(8.1.15) 成立. 由数学归纳法，对任何自然数 n，(8.1.15)成立. 从而对任何正有理数 $\frac{n}{m}$(n, m 为自然数)，由(8.1.15)得到

$$\begin{aligned}\left(\frac{n}{m}x, y\right)&=n\left(\frac{1}{m}x, y\right)=\frac{n}{m}\left(m\left(\frac{1}{m}x\right), y\right)\\&=\frac{n}{m}(x, y).\end{aligned} \tag{8.1.16}$$

在(8.1.14)中令 $y=-x$，得到

$$(-x, z)=-(x, z). \tag{8.1.17}$$

由(8.1.16)，(8.1.17)，对任何有理数 r，有

$$(rx, y)=r(x, y). \tag{8.1.18}$$

再注意到由(8.1.10)定义的(x, y)是 x、y 的二元连续函数，即知对任何实数 α，有

$$(\alpha x, y)=\alpha(x, y). \tag{8.1.19}$$

从而对任何实数 α、β 及 $\forall x, y, z\in X$，由(8.1.14)和(8.1.19) 得到

$$(\alpha x+\beta y, z)=(\alpha x, z)+(\beta y, z)=\alpha(x, z)+\beta(y, z).$$

即$(\cdot, \cdot)$满足内积的条件(3). 因此由(8.1.10)定义的$(\cdot, \cdot)$ 是 X

中的内积，并且由(8.1.11)知道由$(\cdot,\cdot)$导出的范数就是$\|\cdot\|$.

2° 当X是复空间时，我们受到极化恒等式(8.1.8)的启发，自然应该令

$$(x,y)=\frac{1}{4}(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2+i\|x+iy\|^2-i\|x-iy\|^2)$$

$$(\forall x,y\in X). \tag{8.1.20}$$

现在证明$(\cdot,\cdot)$是X上的内积. 事实上，由(8.1.20)易知

$$(x,x)=\|x\|^2 \quad (\forall x\in X) \tag{8.1.21}$$

和

$$(x,y)=\overline{(y,x)} \quad (\forall x,y\in X),$$

即$(\cdot,\cdot)$满足内积的条件(1)和(2). 用类似于1°的方法可以证明：$\forall x,y,z\in X$，有

$$(x+y,z)=(x,z)+(y,z) \tag{8.1.22}$$

又由(8.1.19)知对任何实数α，有

$$(\alpha x,y)=\alpha(x,y). \tag{8.1.23}$$

并且由(8.1.20)可以直接验证

$$(ix,y)=i(x,y).$$

因此对任何复数α，(8.1.23)仍成立. 再由(8.1.22)就知道$(\cdot,\cdot)$满足内积的条件(3). 所以由(8.1.20)定义的$(\cdot,\cdot)$是X中的内积，并且由(8.1.21)知道由$(\cdot,\cdot)$导出的范数就是$\|\cdot\|$. 证毕.

注1 如图8.1.1所示，当将x,y视为$\boldsymbol{R}^2$中的向量时，(8.1.9)式表示"平行四边形两对角线长度的平方和等于其四边长度的平方和"，所以对一般内积空间，等式(8.1.9)也就称为平行四边形公式.

注2 定理8.1.4表明，平行四边形公式是内积空间中范数的特征. 也就是说，赋范线性空间成为内积空间的充要条件是范数满足平行四边形公式. 由此可知，并非每个赋范线性空间都可

以成为内积空间. 例如赋范线性空间 $l^p(1\leqslant p<+\infty)$, 当 $p\neq 2$ 时,不能成为内积空间. 事实上,取 $x=(1,1,0,0,\cdots)$, $y=(1,-1,0,0,\cdots)\in l^p$, 则 $\|x\|=\|y\|=2^{\frac{1}{p}}$, $\|x+y\|=\|x-y\|=2$, 从而

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=8\neq 4\ (2^{\frac{2}{p}})=2(\|x\|^2+\|y\|^2)\qquad (1\leqslant p<+\infty,p\neq 2).$$ 证毕.

8.1.2 正交与正交分解

和欧儿里得空间一样,对内积空间 $(X,(\cdot,\cdot))$ 中的两个非零向量 x,y, 我们用

$$\theta=\cos^{-1}\frac{|(x,y)|}{\|x\|\|y\|}$$

表示它们之间的夹角,从而可以引入 x 与 y 正交(或直交)的概念.

定义 8.1.3 内积空间 $(X,(\cdot,\cdot))$ 中的两个向量 x 与 y 称为正交的, 是指

$$(x,y)=0,$$

记作 $x\perp y$. 设 M 是 X 的非空子集, $x\in X$. 若 $\forall y\in M$, 都有 $x\perp y$, 则称 x 与 M 正交,记作 $x\perp M$. 设 M、N 是 X 的两个非空子集,若 $\forall x\in M$, $\forall y\in N$, 都有 $x\perp y$, 则称 M 与 N 正交,记作 $M\perp N$. 设 M 是 X 的非空子集, X 中所有与 M 正交的向量全体 $\{x\in X\mid x\perp M\}$ 称为 M 的正交补(集),记作 $M^{\perp}$.

由定义 8.1.3 可以得到

定理 8.1.5 **设** $(X,(\cdot,\cdot))$ **是内积空间,** M **是** X **的非空子集,** x、y、$y_n(n=1,2,\cdots)\in X$.

(1) **若** $x\perp y$, **则**

$$\|x+y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2. \tag{8.1.24}$$

这个等式称为内积空间中的勾股定理.

(2) 若 $x\perp y_n(n=1,2,\cdots)$，且 $y_n\to y$，则 $x\perp y$.

(3) 若 $x\perp M$，则 $x\perp \operatorname{span}M$.

(4) $M\subset (M^\perp)^\perp$.

(5) $M\cap M^\perp=\varnothing$ 或 $\{\theta\}$.

(6) $M^\perp$ 是X的闭线性子空间，且 $M^\perp=(\overline{\operatorname{span}M})^\perp$.

证明 (1)—(5)是显然的. 下面证明(6). 先证 $M^\perp$ 是 X 的闭线性子空间. $\forall x_1,x_2\in M^\perp$, $\forall \alpha_1,\alpha_2\in \mathrm{K}$，由于

$$(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2,z)=\alpha_1(x_1,z)+\alpha_2(x_2,z)=0\quad(\forall z\in M),$$

所以 $\alpha_1x_1+\alpha_2x_2\in M^\perp$，即 $M^\perp$ 是 X 的线性子空间. 又若 $\{x_n\}\subset M^\perp$, $x_n\to x_0$，由(2)，$\forall z\in M$，有 $(x_0,z)=0$，因此 $x_0\in M^\perp$，即 $M^\perp$ 是闭集.

再证 $M^\perp=(\overline{\operatorname{span}M})^\perp$. 因为 $M\subset\overline{\operatorname{span}M}$，所以 $M^\perp\supset(\overline{\operatorname{span}M})^\perp$. 另一方面，$\forall x_0\in M^\perp$，由(3)，$x_0\perp\operatorname{span}M$，再由(2)，$x_0\perp\overline{\operatorname{span}M}$，从而 $x_0\in(\overline{\operatorname{span}M})^\perp$，即 $M^\perp\subset(\overline{\operatorname{span}M})^\perp$. 因此 $M^\perp=(\overline{\operatorname{span}M})^\perp$. 证毕.

下面讨论内积空间中向量的"正交分解"问题. 我们先介绍变分引理.

引理 8.1.6 (变分引理) 设 X 是 Hilbert 空间，M 是 X的一个非空闭凸子集，则 $\forall x\in X$，$\exists$ 唯一的 $y_0\in M$，使得

$$\|x-y_0\|=\rho(x,M)=\inf_{y\in M}\|x-y\|.$$

证明 不妨设 $\rho(x,M)=d>0$（因为当 $d=0$ 时，结论显然成立），则必有一点列 $\{y_n\}\subset M$，使得

$$\|y_n-x\|\to d\,(n\to\infty).$$

这样的点列称为"极小化"点列. 下面证明"极小化"点列$\{y_n\}$是基本列. 由于

$$\|y_n-y_m\|^2=\|(y_n-x)+(x-y_m)\|^2$$

$$=2(\|y_n-x\|^2+\|x-y_m\|^2)-\|(y_n-x)-(x-y_m)\|^2$$
$$=2(\|y_n-x\|^2+\|x-y_m\|^2)-4\left\|x-\frac{y_n+y_m}{2}\right\|^2$$
$$\leqslant 2(\|y_n-x\|^2+\|x-y_m\|^2)-4d^2\to 0\quad (n,m\to\infty),$$
所以$\{y_n\}$是基本列，由X的完备性和M的闭性知$\exists y_0\in M$，使得$y_n\to y_0$．由范数的连续性，即有$\|x-y_0\|=\lim\limits_{n\to\infty}\|x-y_n\|=d$.

这样的y_0是唯一的．如果M中还有元y^*，使得$\|x-y^*\|=d$，那末点列$\{y_0,y^*,y_0,y^*,\cdots\}$显然也是“极小化”点列，因此也是基本列，从而$y_0=y^*$．证毕.

变分引理是内积空间中的一条基本引理，它在微分方程、现代控制论中有重要的应用.

定理 8.1.7(正交分解定理)　设M是 Hilbert 空间 X 的一个闭线性子空间，则 $\forall x\in X$，存在着下列唯一的正交分解：

$$x=x_0+x_1\quad (x_0\in M,x_1\in M^{\perp}).\tag{8.1.25}$$

证明　$\forall x\in X$，由于M是X的闭凸子集，据引理 8.1.6，$\exists$唯一的$x_0\in M$，使得$\|x-x_0\|=\rho(x,M)$，记$d=\rho(x,M)$．现在证明$x-x_0\perp M$．事实上，$\forall y\in M-\{\theta\}$，$\forall\lambda\in\mathbb{K}$，$x_0+\lambda y\in M$，从而

$$d^2\leqslant\|x-x_0-\lambda y\|^2=(x-x_0-\lambda y,x-x_0-\lambda y)$$
$$=\|x-x_0\|^2-\bar\lambda(x-x_0,y)-\lambda(y,x-x_0)+|\lambda|^2\|y\|^2.$$

把上式移项并注意到$\|x-x_0\|=d$，得到

$$\bar\lambda(x-x_0,y)+\lambda(y,x-x_0)-|\lambda|^2\|y\|^2\leqslant 0.$$

令 $\lambda=\dfrac{(x-x_0,y)}{\|y\|^2}$ 并代入上式，得到

$$\frac{|(x-x_0,y)|^2}{\|y\|^2}\leqslant 0,$$

即$|(x-x_0,y)|\leqslant 0$．从而$(x-x_0,y)=0$，因此$x-x_0\perp M$．令$x_1=$

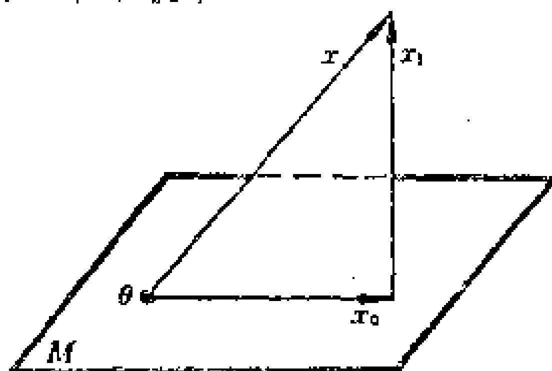


图　8.1.2

$x-x_0$，则

$$x=x_0+x_1 \quad (x_0\in M, x_1\in M^\perp).$$

此外，由 x_0 的唯一性和 x_1 的取法即知分解是唯一的. 证毕.

注 1 在分解式(8.1.25)中，x_0 称为 x 在 M 上的(正交)投影(参阅图 8.1.2，图中画的是 $X=\boldsymbol{R}^3$ 的情形).

注 2 内积空间 X 中两个相互正交的线性子空间 L、M 的直接和称为正交和，并记为 $L\oplus M$. 因此，定理 8.1.7 的结论可以写成 $X=M\oplus M^\perp$.

8.1.3 标准正交系

现在我们把欧几里得空间中直角坐标系的概念推广到一般的内积空间中来.

定义 8.1.4 设 $\mathscr{F}$ 是内积空间 X 中的一族非零向量. 如果 $\mathscr{F}$ 中任何两个不同的向量都正交，就称 $\mathscr{F}$ 是 X 中的一个正交系. 如果正交系 $\mathscr{F}$ 中每个向量的范数都是 1，就称 $\mathscr{F}$ 是标准正交系.

例 4 在 n 维欧几里得空间 $\boldsymbol{R}^n$ 中，$e_1=(1,0,0,\cdots,0)$，$e_2=(0,1,0,\cdots,0)$，$\cdots$，$e_n=(0,0,\cdots,1)$组成标准正交系.

例 5 $L^2[0,2\pi]$中的函数族$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{int}\right\}$ $(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$是 $L^2[0,2\pi]$中的一个标准正交系.

例 6 l^2 中的元素列$\{e_n\}$(其中 $e_n=(\underbrace{0,0,\cdots,0}_{n-1\text{个}},1,0,\cdots)$) $(n=1,2,\cdots)$是 l^2 中的一个标准正交系.

定义 8.1.5 设 $\mathscr{F}$ 是内积空间 X 中的标准正交系，$x\in X$. 数集

$$\{(x,e)\mid e\in\mathscr{F}\}$$

称为向量 x 关于标准正交系 $\mathscr{F}$ 的 Fourier 系数集，而数(x,e)称

为 x 关于 e 的 Fourier 系数.

引理 8.1.8 设 $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ 是内积空间 X 中的标准正交系, $M = \text{span}\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$, $x \in X$, 则 $x_0 = \sum_{i=1}^{n} (x, e_i) e_i$ 是 x 在 M 上的投影, 而且

$$\|x_0\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |(x, e_i)|^2,$$

$$\|x - x_0\|^2 = \|x\|^2 - \|x_0\|^2.$$

证明 显然, $x_0 = \sum_{i=1}^{n} (x, e_i) e_i \in M$, 且 $(x_0, e_i) = (x, e_i)$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$, 从而

$$(x - x_0, e_i) = (x, e_i) - (x_0, e_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, n).$$

因此, 向量 $x - x_0$ 与 $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ 正交, 所以 $x - x_0 \perp M$. 故 x_0 是 x 在 M 上的投影. 又由于 $e_1, e_2, \cdots, e_n$, $x - x_0$ 是两两正交的, 由定理 8.1.5 的(1),

$$\|x_0\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|(x, e_i) e_i\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |(x, e_i)|^2,$$

$$\|x\|^2 = \|(x - x_0) + x_0\|^2 = \|x - x_0\|^2 + \|x_0\|^2$$

$$= \|x - x_0\|^2 + \sum_{i=1}^{n} |(x, e_i)|^2,$$

因此, $\|x - x_0\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} |(x, e_i)|^2$. 证毕.

推论 8.1.9 设 $\{e_1, \cdots, e_n\}$ 是内积空间 X 中的标准正交系, 则 $\forall x \in X$, 有

$$\sum_{i=1}^{n} |(x, e_i)|^2 \leqslant \|x\|^2. \tag{8.1.26}$$

推论 8.1.10 设 $\{e_1, \cdots, e_n\}$ 是内积空间 X 中的标准正交系，$x \in X$. 则对任何 n 个数 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$,

$$\left\| x - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \right\| \geqslant \left\| x - \sum_{i=1}^{n} (x, e_i) e_i \right\|, \qquad (8.1.27)$$

而(8.1.27)成为等式的充要条件是 $\alpha_i = (x, e_i)$, $i = 1, 2, \cdots, n$.

证明 由于 $x_0 = \sum_{i=1}^{n} (x, e_i) e_i$ 是 x 在 $M = \mathrm{span}\{e_1, \cdots, e_n\}$ 上的投影，所以

$$\|x - x_0\| = \inf_{y \in M} \|x - y\|.$$

只要取 $y = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \in M$. 立即得到(8.1.27). 证毕.

不等式(8.1.26)称为 Bessel 不等式，更一般的如下：

定理 8.1.11(Bessel 不等式) 设 $\mathscr{F} = \{e_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$ 是内积空间 X 中的标准正交系，则 $\forall x \in X$, x 的 Fourier 系数 $\{(x, e_\lambda) | \lambda \in \Lambda\}$ 中最多只有可数个不为零而且适合 Bessel 不等式：

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} |(x, e_\lambda)|^2 \leqslant \|x\|^2. \qquad (8.1.28)$$

证明 如果 Λ 是有限集，则不等式(8.1.28)就是(8.1.26). 如果 Λ 是可数集，则 $\mathscr{F}$ 是由一列元 $\{e_n\}$ 所组成的标准正交系，这时对任意自然数 n, (8.1.26)式成立，令 $n \to \infty$, 就得到(8.1.28)式.

现在假设 Λ 是不可数集. 由于(8.1.26)式成立，所以当 x 固定时，对每个自然数 k, $\mathscr{F}$ 中使 $|(x, e_\lambda)| \geqslant \frac{1}{k}$ 的向量 e_λ 也只能是有限个. 记

$$\mathscr{F}_k = \left\{ e_\lambda \,|\, \lambda \in \Lambda, |(x, e_\lambda)| \geqslant \frac{1}{k} \right\} \quad (k = 1, 2, \cdots),$$

并记$\hat{\mathscr{F}}=\bigcup_{k=1}^{\infty}\mathscr{F}_k$，可见$\hat{\mathscr{F}}$至多是可数集，而当$e_\lambda\in\mathscr{F}-\hat{\mathscr{F}}$时，$(x, e_\lambda)=0$. 因此

$$\sum_{\lambda\in\Lambda}|(x,e_\lambda)|^2=\sum_{e_\lambda\in\hat{\mathscr{F}}}|(x,e_\lambda)|^2\leqslant\|x\|^2.$$ 证毕.

推论 8.1.12 设$\{e_n\}(n=1,2,\cdots)$是内积空间X中的标准正交系，则$\forall x\in X$，必有$\lim\limits_{n\to\infty}(x,e_n)=0$.

证明 由定理 8.1.11 知级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|(x, e_n)|^2$收敛，由此可得$\lim\limits_{n\to\infty}(x, e_n)=0$. 证毕

注 推论 8.1.12 在$L^2[0,2\pi]$中用于标准正交三角函数系(见例 5)的情况下，就是 Riemann-Lebesgue 引理.

为了研究 Bessel 不等式(8.1.28)什么时候能变成等式，我们引入下面的概念.

定义 8.1.6 设$\{e_\lambda|\lambda\in\Lambda\}$是内积空间$X$中的标准正交系，如果$\forall x\in X$，成立下列巴塞伐尔(Parseval)等式

$$\|x\|^2=\sum_{\lambda\in\Lambda}|(x,e_\lambda)|^2, \tag{8.1.29}$$

则称正交系$\{e_\lambda|\lambda\in\Lambda\}$在$X$中是完备的.

Parseval 等式(8.1.29)称为x关于$\mathscr{F}=\{e_\lambda|\lambda\in\Lambda\}$的完备性公式，这个公式相当于勾股定理的推广. 它的几何意义是向量的长度平方等于关于$\{e_\lambda\}$的各分量长度的平方和.

定义 8.1.7 设$\mathscr{F}=\{e_\lambda|\lambda\in\Lambda\}$是内积空间$X$中的标准正交系，$x\in X$，级数$\sum\limits_{\lambda\in\Lambda}(x,e_\lambda)e_\lambda$称为向量$x$关于$\mathscr{F}$的Fourier级数(或Fourier展开式). 当$x=\sum\limits_{\lambda\in\Lambda}(x,e_\lambda)e_\lambda$时，就称$x$关于$\mathscr{F}$可以展

开成 Fourier 级数(这时,展开式的几何意义就是向量 x 等于它的各分量 $(x, e_\lambda)e_\lambda$ 之和).

定理 8.1.13 设 $\mathscr{F}=\{e_\lambda|\lambda\in\Lambda\}$ 是内积空间 X 中的标准正交系, $M=\overline{\text{span}\mathscr{F}}$, **那末对于** $x\in X$, **下面三件事是等价的:**

(1) $x\in M$.

(2) $\|x\|^2=\sum\limits_{\lambda\in\Lambda}|(x, e_\lambda)|^2$.

(3) $x=\sum\limits_{\lambda\in\Lambda}(x, e_\lambda)e_\lambda$.

证明 (1) $\Rightarrow$(2) 由 Bessel 不等式有 $\sum\limits_{\lambda\in\Lambda}|(x, e_\lambda)|^2\leqslant\|x\|^2$. 如果 Parseval 等式不成立. 则必存在正数 α, 使得

$$\|x\|^2-\sum_{\lambda\in\Lambda}|(x, e_\lambda)|^2=\alpha^2>0.$$

这就是说, 对于 $\{e_\lambda|\lambda\in\Lambda\}$ 中任意有限个向量 e_1, $\cdots$, e_n, 由引理 8.1.8,

$$\left\|x-\sum_{i=1}^n(x, e_i)e_i\right\|^2=\|x\|^2-\sum_{i=1}^n|(x, e_i)|^2\geqslant\alpha^2.$$

再由推论 8.1.10, 立即得到 $e_1, \cdots, e_n$ 的任何线性组合与 x 的距离都不小于 $\left\|x-\sum\limits_{i=1}^n(x, e_i)e_i\right\|$ $(\geqslant\alpha)$, 这与假设 $x\in M$ 矛盾, 因此 Parseval 等式成立.

(2)$\Rightarrow$(3) 如果 $\mathscr{F}$ 是有限集 $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$, 由引理 8.1.8,

$$\left\|x-\sum_{i=1}^n(x, e_i)e_i\right\|^2=\|x\|^2-\sum_{i=1}^n|(x, e_i)|^2. \qquad (8.1.30)$$

从 $\|x\|^2=\sum\limits_{i=1}^n|(x, e_i)|^2$, 立即得到 $x=\sum\limits_{i=1}^n(x, e_i)e_i$. 当 $\mathscr{F}$ 是无限

集时，从$\|x\|^2=\sum_{\lambda\in\Lambda}|(x,e_\lambda)|^2$，立即知道$\{e_\lambda|\lambda\in\Lambda,\ (x,e_\lambda)\neq0\}$最多是可数集，不妨设为$\{e_i|i=1,2,\cdots\}$，对任何自然数$n$，(8.1.30)式总是成立. 由假设

$$\|x\|^2=\sum_{\lambda\in\Lambda}|(x,e_\lambda)|^2=\sum_{i=1}^{\infty}|(x,e_i)|^2,$$

因而(8.1.30)的右端，当$n\to\infty$时趋于0，即

$$\lim_{n\to\infty}\left\|x-\sum_{i=1}^{n}(x,e_i)e_i\right\|=0.$$

这就是说 $x=\sum_{i=1}^{\infty}(x,e_i)e_i=\sum_{\lambda\in\Lambda}(x,e_\lambda)e_\lambda$.

(3)⇒(1) 设 $x=\sum_{\lambda\in\Lambda}(x,e_\lambda)e_\lambda$，所以$x$或是$\mathscr{F}$中有限个向量的线性组合，或是$\mathscr{F}$中有限个向量线性组合的极限，即$x\in M$. 证毕

推论 8.1.14 内积空间X中标准正交系$\mathscr{F}=\{e_\lambda|\lambda\in\Lambda\}$成为完备系的充要条件是下面四个中的任何一个成立：

(1) $\overline{\text{span}\mathscr{F}}=X$.

(2) $\forall x\in X,\quad x=\sum_{\lambda\in\Lambda}(x,e_\lambda)e_\lambda$.

(3) $\forall x,y\in X$,

$$(x,y)=\sum_{\lambda\in\Lambda}(x,e_\lambda)\overline{(y,e_\lambda)}. \tag{8.1.31}$$

(4) (Стеклов 定理) **存在X中的稠密集D，使得**$\forall x\in D$，有

$$\|x\|^2=\sum_{\lambda\in\Lambda}|(x,e_\lambda)|^2. \tag{8.1.32}$$

证明 由定理 8.1.13 知，(1)、(2)都是$\mathscr{F}$成为完备系的充要

条件.

(3) 如果 $\mathscr{F}$ 是完备的，则由定理 8.1.13 知，$\forall x, y\in X$,

$$x=\sum_{\lambda\in\Lambda}(x, e_\lambda)e_\lambda,\quad y=\sum_{\lambda\in\Lambda}(y, e_\lambda)e_\lambda.$$

$$\sum_{\lambda\in\Lambda}|(x, e_\lambda)|^2=\|x\|^2,\quad \sum_{\lambda\in\Lambda}|(y, e_\lambda)|^2=\|y\|^2.$$

不妨设$\{e_n\}$ 是使得$(x, e_\lambda)\neq 0$ 或 $(y, e_\lambda)\neq 0$ 的 $\mathscr{F}$ 中的 e_λ 全体. 于是

$$x=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(x, e_i)e_i,\quad y=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(y, e_i)e_i.$$

从而

$$\begin{aligned}(x, y)&=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}(x, e_i)e_i, \sum_{i=1}^{n}(y, e_i)e_i\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(x, e_i)\overline{(y, e_i)}\\&=\sum_{i=1}^{\infty}(x, e_i)\overline{(y, e_i)}\\&=\sum_{\lambda\in\Lambda}(x, e_\lambda)\overline{(y, e_\lambda)}.\end{aligned}$$

反之，设公式(8.1.31)成立，特别取 $y=x$，由(8.1.31)就得到

$$\|x\|^2=\sum_{\lambda\in\Lambda}|(x, e_\lambda)|^2\quad (\forall x\in X).$$

因此 $\mathscr{F}$ 是完备的.

(4) 必要性是显然的，只要证明充分性就可以了. 记 $M=\overline{\operatorname{span}\mathscr{F}}$，由假设(8.1.32)，$D\subset M$，又因为$M$是闭集，所以 $\overline{D}\subset M$，由假设 $\overline{D}=X$，所以 $M=X$，由(1)知 $\mathscr{F}$ 是完备的. 证毕.

注 等式(8.1.31)也称为 Parseval 等式.

定理 8.1.15 设 $\mathscr{F}=\{e_\lambda|\lambda\in\Lambda\}$ 是内积空间 X 中的标准正交系，$M=\overline{\text{span}\mathscr{F}}$．$\forall x\in X$，如果 x 在 M 上有投影 x_0，那末 x_0 就是 x 的 Fourier 级数 $\sum\limits_{\lambda\in\Lambda}(x, e_\lambda)e_\lambda$．如果 X 是 Hilbert 空间，那末 $\forall x\in X$，$\sum\limits_{\lambda\in\Lambda}(x, e_\lambda)e_\lambda$ 就是 x 在 M 上的投影．

证明 如果 $x\in X$，x 在 M 上有投影 x_0，则由定理 8.1.13 知

$$x_0=\sum_{\lambda\in\Lambda}(x_0, e_\lambda)e_\lambda.$$

又因为 x_0 是 x 在 M 上的投影，所以 $x-x_0\perp M$，从而 $x-x_0\perp e_\lambda$ $(\lambda\in\Lambda)$，即 $(x, e_\lambda)=(x_0, e_\lambda)$．这样便得到

$$x_0=\sum_{\lambda\in\Lambda}(x, e_\lambda)e_\lambda.$$

当 X 是 Hilbert 空间时，由于 M 是 X 的闭线性子空间，由定理 8.1.7，$\forall x\in X$，x 必在 M 上有投影，从而 x 在 M 上的投影就是 $\sum\limits_{\lambda\in\Lambda}(x, e_\lambda)e_\lambda$．证毕．

定理 8.1.16 (Riesz-Fischer) 设 $\mathscr{F}=\{e_\lambda|\lambda\in\Lambda\}$ 是 Hilbert 空间 X 中的标准正交系，$M=\overline{\text{span}\mathscr{F}}$，$\{c_\lambda|\lambda\in\Lambda\}$ 是满足 $\sum\limits_{\lambda\in\Lambda}|c_\lambda|^2<+\infty$ 的一族数，那末必有唯一的 $x\in M$，以 c_λ 为 x 关于 $e_\lambda(\lambda\in\Lambda)$ 的 Fourier 系数，而且 x 有 Fourier 展开式 $x=\sum\limits_{\lambda\in\Lambda}c_\lambda e_\lambda$．

证明 当 $\mathscr{F}$ 是有限集时，定理显然是成立的，当 $\mathscr{F}$ 是无限集时，因为 $\sum\limits_{\lambda\in\Lambda}|c_\lambda|^2<+\infty$，所以最多只有可数个指标 $\{\lambda_n\in\Lambda|n=1, 2, \cdots\}$，使得 $c_{\lambda_n}\neq0$，分别改记 e_{λ_n}、c_{λ_n} 为 e_n、c_n．作点列 $x_n=\sum\limits_{i=1}^{n}c_ie_i$，那末，对于 $m<n$，

$$\|x_n - x_m\|^2 = \left\| \sum_{i=m+1}^{n} c_i e_i \right\|^2 = \sum_{i=m+1}^{n} |c_i|^2.$$

由于$\sum_{i=1}^{\infty}|c_i|^2<+\infty$，所以$\|x_n-x_m\|^2\to 0(n, m\to\infty)$，因此$\{x_n\}$是基本列．由$X$的完备性和$M$的闭性知，有唯一的$x\in M$，使得$\lim_{n\to\infty}x_n=x$．即

$$x=\sum_{i=1}^{\infty}c_i e_i=\sum_{\lambda\in\Lambda}c_\lambda e_\lambda.$$

剩下的是要证明$c_\lambda=(x, e_\lambda)(\forall\lambda\in\Lambda)$．事实上，$\forall i\in\mathbf{N}$，

$$(x, e_i)=\lim_{n\to\infty}(x_n, e_i)=c_i.$$

而当$e_\lambda\neq e_i(i=1, 2, \cdots)$时，因为$(x_n, e_\lambda)=0$，所以

$$(x, e_\lambda)=\lim_{n\to\infty}(x_n, e_\lambda)=0=c_\lambda,$$

从而$\forall\lambda\in\Lambda$，$c_\lambda=(x, e_\lambda)$．证毕．

对于Hilbert空间上给定的正交系$\mathscr{F}$，如果它不完备，是否能补充一些向量使它成为完备的．这就产生了正交系的完全性概念．

定义 8.1.8 设$\mathscr{F}$是内积空间X中的标准正交系，如果$\mathscr{F}^\perp=\{\theta\}$，就称$\mathscr{F}$是完全的．

由定义可知，$\mathscr{F}$是完全的，当且仅当在X中不存在与$\mathscr{F}$正交的非零向量．也就是说正交系$\mathscr{F}$已经不能再扩大了，即$\mathscr{F}$是X中极大的标准正交系．

定理 8.1.17 **设$\mathscr{F}=\{e_\lambda|\lambda\in\Lambda\}$是内积空间$X$中的标准正交系，如果$\mathscr{F}$是完备的，那末$\mathscr{F}$是完全的．如果$X$是Hilbert空间，那末完全的标准正交系必定是完备的．**

证明 如果$\mathscr{F}$是完备的，据推论8.1.14，$\forall x\in X$，成立

$$x=\sum_{\lambda\in\Lambda}(x,e_\lambda)e_\lambda.$$

因此，如果 $x\perp\mathscr{F}$，必定 $x=\theta$，所以 $\mathscr{F}$ 是完全的.

反过来，如果 X 是 Hilbert 空间，$\mathscr{F}$ 是完全的. 记 $M=\overline{\mathrm{span}\mathscr{F}}$. 由推论 8.1.14 知，只须证明 $M=X$. 假若 $M\neq X$，据定理 8.1.7 的注 2，$X=M\oplus M^\perp$，从而 $M^\perp\neq\{\theta\}$，所以，$\mathscr{F}^\perp=(\overline{\mathrm{span}\mathscr{F}})^\perp=M^\perp\neq\{\theta\}$，这与 $\mathscr{F}$ 的完全性矛盾. 因此，$M=X$. 证毕.

定理 8.1.17 说明了在 Hilbert 空间中，标准正交系的完全性和完备性是等价的. 在一般的内积空间中，完备标准正交系一定是完全的，但反之不然(请见例 7).

例 7 在 $L^2[0,2\pi]$ 中，记

$$\mathscr{F}=\left\{\frac{\cos t}{\sqrt{\pi}},\frac{\sin t}{\sqrt{\pi}},\frac{\cos 2t}{\sqrt{\pi}},\frac{\sin 2t}{\sqrt{\pi}},\cdots,\frac{\cos nt}{\sqrt{\pi}},\frac{\sin nt}{\sqrt{\pi}},\cdots\right\}.$$

又记

$$f_0(t)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{\cos nt}{\sqrt{\pi}}+\frac{\sin nt}{\sqrt{\pi}}\right).$$

据 Riesz-Fischer 定理，$f_0\in L^2[0,2\pi]$. 令 $X_0=\mathrm{span}(\mathscr{F}\cup\{f_0\})$，即

$$X_0=\left\{\alpha_0 f_0+\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k\cos kt+\beta_k\sin kt)\,\middle|\, n\in\mathbb{N},\alpha_0,\alpha_k,\beta_k\in\mathbb{K},k=1,2,\cdots,n\right\}.$$

按照 $L^2[0,2\pi]$ 的线性运算及内积，X_0 是一个内积空间. $\mathscr{F}$ 显然是 X_0 中的标准正交系. $\mathscr{F}$ 在 X_0 中是完全的. 这是因为如果有 $f\in X_0$，$f\perp\mathscr{F}$，那末由 X_0 的定义，必有 $n\in\mathbb{N}$ 及 $\alpha_0,\alpha_k,\beta_k\in\mathbb{K}(k=1,2,\cdots,n)$，使得

$$f(t)=\alpha_0 f_0(t)+\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k\cos kt+\beta_k\sin kt).$$

取 $m>n$，得到 $0=\left(f,\frac{\cos mt}{\sqrt{\pi}}\right)=\frac{\alpha_0}{m}$，即 $\alpha_0=0$，因此

$$f(t)=\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k\cos kt+\beta_k\sin kt).$$

同样，对于 $m\leqslant n$，得到

$$0=\left(f,\frac{\cos mt}{\sqrt{\pi}}\right)=\sqrt{\pi}\,\alpha_m,$$

$$0=\left(f,\frac{\sin mt}{\sqrt{\pi}}\right)=\sqrt{\pi}\,\beta_m,$$

即 $\alpha_m=\beta_m=0$. 于是 $f=\theta$. 因此 $\mathscr{F}$ 在 X_0 中是完全的. 但是

$$\|f_0\|^2=2\pi+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{k^2},$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\left(f_0,\frac{\cos kt}{\sqrt{\pi}}\right)\right|^2+\sum_{k=1}^{\infty}\left|\left(f_0,\frac{\sin kt}{\sqrt{\pi}}\right)\right|^2=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{k^2}.$$

所以 f_0 关于 $\mathscr{F}$ 的完备性公式不成立，即 $\mathscr{F}$ 在 X_0 中不是完备的.

因此，确实有这样的内积空间，其中有不完备的完全标准正交系.

一个内积空间中是否有完全的标准正交系，为了回答这个问题，我们给出下面的定理.

定理 8.1.18　不只含一个零向量的内积空间 X 中必存在完全标准正交系.

证明　因为 $X\neq\{\theta\}$，所以 X 中的全体标准正交系依包含关系构成一个半序集，并且这个半序集的每个全序子集有上确界，就是全序子集中所有集之并集，由 Zorn 引理，这个半序集有极大元 $\mathscr{F}$. 我们来证明：极大元 $\mathscr{F}$ 就是 X 的完全标准正交系. 因若不然，则必有 $x_0\in\mathscr{F}^{\perp}$，$x_0\neq\theta$，令 $\hat{\mathscr{F}}=\mathscr{F}\cup\left\{\frac{x_0}{\|x_0\|}\right\}$，则 $\hat{\mathscr{F}}$ 是 X 的标准正交

系，并且 $\mathscr{F} \subsetneqq \hat{\mathscr{F}}$，这与 $\mathscr{F}$ 是极大元矛盾. 证毕.

由定理 8.1.17 和定理 8.1.18 可立即得到

推论 8.1.19 **不只含一个零向量的 Hilbert 空间中必存在完备标准正交系.**

例 8 $\{e_n\}$（其定义同本节例 6）$(n=1,2,\cdots)$是 l^2 中的完备标准正交系.

证明 根据例 6，$\{e_n\}$是 l^2 中的标准正交系，只须再证$\{e_n\}$是完备的. 因为$\overline{\text{span}\{e_n\}}=l^2$（见定理7.3.6的证明），据推论 8.1.14，$\{e_n\}$是完备的. 证毕.

类似地可证$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{int}\right\}(n=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$是 $L^2[0,2\pi]$中的完备标准正交系（证明留为习题）.

8.1.4 线性无关向量系的正交化

在 Hilbert 空间X中，利用正交系，可以迅速作出 $x \in X$ 关于标准正交系 $\mathscr{F}$ 的Fourier 级数 $x_0=\sum_{\lambda \in \Lambda}(x,e_\lambda)e_\lambda$，据定理8.1.15，$x_0$ 就是 x 在$M=\overline{\text{span}\mathscr{F}}$ 上的投影. 即很快就能找到达到极值 $\inf_{y \in M}\|x-y\|$ 的向量 x_0. 如果先给定一个闭线性子空间 M，如何能找出张成 M 的正交系 $\mathscr{F}$ 呢？这节中将提供一个正交化的方法.

引理 8.1.20(Gram-Schmidt) **设 $G=\{g_1,g_2,g_3,\cdots\}$是内积空间X中有限个或可数个线性无关的向量，那末必定有X中的标准正交系 $\mathscr{F}=\{h_1,h_2,h_3,\cdots\}$，使得对于每个自然数 n（注 当G只有 m 个向量时，要求 $n \leqslant m$），g_n 是 $h_1,h_2,\cdots,h_n$ 的线性组合，h_n也是 $g_1,g_2,\cdots,g_n$ 的线性组合. 这种 h_n 除去一个绝对值为 1 的常数因子外，由 $g_1,g_2,\cdots,g_n$ 完全确定.**

证明 我们不妨只考虑G是可数个向量的情况. 利用数学归

纳法. 首先作 $h_1=\frac{g_1}{\|g_1\|}$, 显然, $\mathrm{span}\{h_1\}=\mathrm{span}\{g_1\}$, 记 $M_1=\mathrm{span}\{h_1\}$, 由于 $g_2\overline{\in}M_1$, 据引理 8.1.8, g_2 在 M_1 上有投影 $x_1=(g_2,h_1)h_1$. $g_2-x_1\neq\theta$, $g_2-x_1\perp M_1$, 记 $h_2=\frac{g_2-x_1}{\|g_2-x_1\|}$. 显然, $\{h_1,h_2\}$ 是标准正交系, 它满足引理的要求. 而且

$$M_2=\mathrm{span}\{g_1,g_2\}=\mathrm{span}\{h_1,h_2\}.$$

设满足引理要求的标准正交向量系 $\{h_1,h_2,\cdots,h_{n-1}\}$ $(n\geqslant 3)$ 已经作好. 而

$$M_{n-1}=\mathrm{span}\{g_1,g_2,\cdots,g_{n-1}\}=\mathrm{span}\{h_1,h_2,\cdots,h_{n-1}\}.$$

由于 $g_n\overline{\in}M_{n-1}$, 据引理 8.1.8, g_n 在 M_{n-1} 上有投影 $x_{n-1}=\sum_{i=1}^{n-1}(g_n,h_i)h_i$. $g_n-x_{n-1}\neq\theta$, $g_n-x_{n-1}\perp M_{n-1}$, 记

$$h_n=\frac{g_n-x_{n-1}}{\|g_n-x_{n-1}\|}.$$

显然, h_n 是 $g_1,g_2,\cdots,g_n$ 的线性组合, g_n 也是 $h_1,h_2,\cdots,h_n$ 的线性组合, 而且 $\{h_1,h_2,\cdots,h_n\}$ 是标准正交系, 即 $\{h_1,h_2,\cdots,h_n\}$ 满足引理的要求. 因此由归纳法可作出一列 $\{h_1,h_2,h_3,\cdots\}$, 使其满足引理的要求.

如果 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots$ 是一列绝对值为 1 的数, 则 α_1h_1, $\alpha_2h_2,\cdots$ 仍是标准正交系, 它显然仍满足引理的要求.

另一方面, 如果 $h_1',h_2',h_3',\cdots$ 是满足引理要求的任一标准正交系, 那末对每个自然数 n,

$$\mathrm{span}\{h_1',h_2',\cdots,h_n'\}=\mathrm{span}\{h_1,h_2,\cdots,h_n\}=M_n.$$

由于 $\{h_1,h_2,\cdots,h_n\}$ 是完备空间 M_n 中的完备标准正交系, 据推论 8.1.14, $h_n'=\sum_{i=1}^{n}(h_n',h_i)h_i$. 又因为 $h_n'\perp\mathrm{span}\{h_1',h_2',\cdots,h_{n-1}'\}$, 而

$$\mathrm{span}\{h_1',h_2',\cdots,h_{n-1}'\}=\mathrm{span}\{h_1,h_2,\cdots,h_{n-1}\}=M_{n-1},$$

所以，$(h'_n, h_i)=0, i=1,2,\cdots,n-1$. 故 $h'_n=(h'_n,h_n)h_n$. 由于

$$1=\|h'_n\|=\|(h'_n,h_n)h_n\|=|(h'_n,h_n)|\|h_n\|=|(h'_n,h_n)|,$$

因此，h'_n 和 h_n 相差一个绝对值为 1 的常数因子. 证毕.

例 9 在 $L^2[-1,1]$ 中，函数列 $g_k(x)=x^k (k=0,1,2,3,\cdots)$ 显然是线性无关的，因此可以将 $\{g_k\}$ 用 Gram-Schmidt 方法化成标准正交的 $\{h_0,h_1,h_2,\cdots\}$，其中 h_k 是一个 k 次多项式. 可是要用直接计算的方法算出函数 h_k 是比较麻烦的，因此对许多具体问题往往还要用一些特殊的方法.

记 $\psi_0(x)=1,\quad \psi_k(x)=\dfrac{d^k}{dx^k}(x^2-1)^k \quad (k=1,\ 2,\ \cdots)$. 显然 $\psi_k(x)$ 是个 k 次多项式. 下面我们证明 $\{\psi_0,\ \psi_1,\psi_2,\cdots\}$ 是 $L^2[-1,1]$ 中的正交系，即当 $0\leqslant m<n$ 时，$(\psi_m,\psi_n)=0$. 事实上，利用分部积分法，得到

$$\begin{aligned}
&\int_{-1}^{1}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n\frac{d^m}{dx^m}(x^2-1)^m dx\\
&=-\int_{-1}^{1}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^2-1)^n\frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}}(x^2-1)^m dx\\
&=\cdots=(-1)^n\int_{-1}^{1}(x^2-1)^n\frac{d^{m+n}}{dx^{m+n}}(x^2-1)^m dx\\
&=\begin{cases}0, & \text{当 } m<n \text{ 时},\\ \dfrac{(m!)^2}{2m+1}\cdot 2^{2m+1}, & \text{当 } m=n \text{ 时},\end{cases}
\end{aligned}\tag{8.1.33}$$

因此，$h_0(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}, h_m(x)=\dfrac{1}{2^m m!}\sqrt{\dfrac{2m+1}{2}}\ \dfrac{d^m}{dx^m}(x^2-1)^m, m=1, 2,\cdots$. 这就是把 $\{g_k\}$ 标准正交化后的函数列.

勒让德(Legendre)多项式列

$$P_0(x)\equiv 1, P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n \quad (n=1,2,\cdots)$$

组成 $L^2[-1,1]$ 中的正交系.

8.1.5 可分 Hilbert 空间的模型

为了研究 Hilbert 空间及其中的线性算子，往往把一个抽象的 Hilbert 空间表示为一个具体的 Hilbert 空间. 为此，需要引入下面的概念.

定义 8.1.9 设 X、Y 是两个内积空间. 如果有 X 到 Y 上的一一映射 T 保持线性运算及内积，即 $\forall x, y\in X$, $\forall \alpha, \beta\in \mathbb{K}$, 都成立

$$T(\alpha x+\beta y)=\alpha Tx+\beta Ty,$$
$$(Tx, Ty)=(x, y),$$

则称 T 是 X 到 Y 上的保范线性同构映射，简称同构映射. 如果存在一个 X 到 Y 上的保范线性同构映射，则称 X 与 Y 是保范线性同构的，简称 X 与 Y 是同构的.

对于一个抽象的 Hilbert 空间，我们要研究它能和怎样的具体 Hilbert 空间同构.

定理 8.1.21 **任何 n 维内积空间 X 必和 n 维欧几里得空间 R^n 同构.**

证明 在 X 中取一组基 $g_1, \cdots, g_n$，然后用 Gram-Schmidt 方法，可得 X 中标准正交的基 $h_1, \cdots, h_n$. 作 X 到 R^n 的映射

$$T: x\mapsto((x, h_1), (x, h_2), \cdots, (x, h_n)).$$

易知 T 是 X 到 R^n 上的一一映射，而且是保持线性运算及内积的映射，因此，X 和 R^n 同构. 证毕.

定理 8.1.22 **任何可分无限维 Hilbert 空间 X 必和 l^2 同构.**

证明 由于 X 是可分的，在 X 中有稠密的点列 $\{x_1, x_2, x_3, \cdots\}$，在这个点列中选一个子集 $G=\{g_1, g_2, \cdots\}$，使得 $\{g_1, g_2, \cdots\}$ 是线性无关的，而且每个 x_n 都是有限个 g_i 的线性组合. 这样的 G 可以如下地用数学归纳法来选取. 把 $\{x_n\}$ 中第一个线性无关的向量(即不等于零的向量)记为 x_{n_1}，取 $g_1=x_{n_1}$. 显然对一切 $n\leqslant n_1$，x_n 是 g_1

的线性组合. 假设已经选好 $k(k\in\mathbf{N})$ 个线性无关的向量 $g_1, g_2, \cdots, g_k$, 它们分别等于 $x_{n_1}, x_{n_2}, \cdots, x_{n_k}$, $n_1<n_2<\cdots<n_k$, 而且对于一切 $n\leqslant n_k$, x_n 是 $g_1, g_2, \cdots, g_k$ 的线性组合. 由于X是无限维的, 所以必有 $n>n_k$, 使得 x_n 不能用 $g_1, g_2, \cdots, g_k$ 线性表示(否则将可推知 X 是 k 维空间). 设在 $\{x_{n_k+1}, x_{n_k+2}, \cdots\}$ 中第一个不能用 $g_1, g_2, \cdots, g_k$ 线性表示的向量是 x_{n_k+p}, 记 $n_k+p=n_{k+1}$, 取 $g_{k+1}=x_{n_{k+1}}$, 这时显然 $n_k<n_{k+1}$, $g_1, g_2, \cdots, g_k, g_{k+1}$ 是线性无关的, 而且对于一切$n\leqslant n_{k+1}$, x_n 可以用 $g_1, g_2, \cdots, g_{k+1}$ 线性表示. 因此, 由归纳法可作出一列$\{g_1, g_2, \cdots\}$满足我们的要求.

把 $G=\{g_1, g_2, \cdots\}$ 按照 Gram-Schmidt 方法化成标准正交系 $\mathscr{F}=\{h_1, h_2, \cdots\}$. 这时每个 x_n 都可用 $\mathscr{F}$ 中有限个向量的线性组合来表示, 而$\{x_n\}$在X中稠密, 因此 $\mathscr{F}$ 张成的闭线性子空间就是 X. 由推论 8.1.14, $\mathscr{F}$ 是X中完备的标准正交系. 显然 $\mathscr{F}$ 是可数集. 作X到 l^2 的映射

$$T: x\mapsto((x, h_1), (x, h_2), (x, h_3), \cdots).$$

由推论 8.1.14 易知, T 是保持线性运算及内积的单射. 再证 T 是满射. $\forall(c_1, c_2, c_3, \cdots)\in l^2$, 因为$\sum\limits_{i=1}^{\infty}|c_i|^2<+\infty$, 据 Riesz-Fischer 定理, 有唯一的 $x\in X$, 使得$(x, h_i)=c_i(i=1, 2, \cdots)$. 这时$Tx=(c_1, c_2, c_3, \cdots)$. 因此, T 的值域就是 l^2. 所以X和 l^2 是同构的. 证毕.

从定理 8.1.22 的证明中还得到

推论 8.1.23　可分无限维 Hilbert 空间中的完备标准正交系是可数的.

习　题　8.1

1. 内积空间的闭子空间是否必为 Hilbert 空间? Hilbert 空间的闭子空

间是否必为Hilbert空间？有限维内积空间的任何子空间是否为Hilbert空间？

2. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ 是一列内积空间. 令

$$X=\{\{x_n\} \mid x_n \in X_n, \sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|^2<\infty\},$$

当 $\{x_n\}, \{y_n\} \in X, \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ 时，规定

$$\alpha\{x_n\}+\beta\{y_n\}=\{\alpha x_n+\beta y_n\},$$

$$(\{x_n\}, \{y_n\})=\sum_{n=1}^{\infty}(x_n, y_n).$$

证明：X 是内积空间，并且 X 是Hilbert空间的充要条件是每个 X_n 都是Hilbert空间.

3. 设 M、N 是内积空间 X 中的两个非空子集. 如果 $M \subset N$，则 $N^{\perp} \subset M^{\perp}$.

4. 证明在 $C[a,b]$ 中不可能引进一种内积 $(\cdot,\cdot)$，使其满足

$$(f,f)^{\frac{1}{2}}=\max_{a \leqslant x \leqslant b}|f(x)| \quad (\forall f \in C[a,b]).$$

5. 设 X 是内积空间，D 是 X 的稠密子集，$x \in X$. 如果 $x \perp D$，则 $x=0$.

6. 设 X 是内积空间，M 是 X 的非空子集. 如果 $\bar{M}$ 是完备子空间，则 $\bar{M}=(M^{\perp})^{\perp}$.

7. 设 X 是内积空间，M、N 是 X 的非空子集. 设 L 是 M 和 N 张成的线性子空间，则 $L^{\perp}=M^{\perp} \cap N^{\perp}$.

8. 设 M、N 为内积空间 X 中的非空子集，且 $M \perp N$，则 $M \subset N^{\perp}$，$N \subset M^{\perp}$.

9. 设 X 是一个内积空间，$\forall x_0 \in X$，$\forall r>0$，令

$$M=\{x \in X \mid \|x-x_0\| \leqslant r\}.$$

(1) 求证：M 是 X 中的闭凸集.

(2) $\forall x \in X$，令

$$y=\begin{cases} x_0+r(x-x_0)/\|x-x_0\|, & \text{当 } x \notin M, \\ x, & \text{当 } x \in M. \end{cases}$$

求证：$\|x-y\|=\inf_{z \in M}\|x-z\|$.

10. 在Hilbert空间 R^2 中，取 $e_1=(1,0)$，$e_2=(0,1)$，$M=\mathrm{co}\{e_1, e_2\}$. $\forall x \in R^2$，求出 $x_0 \in M$，使得

$$\|x-x_0\|=\inf_{y \in M}\|x-y\|.$$

11. 举例说明在正交分解定理 8.1.7 中，空间X的完备性条件不可少。

12. 设X是 Hilbert 空间，X_0是X的闭线性子空间，$\{e_n\}$，$\{f_n\}$分别是X_0和$X_0^\perp$的完备标准正交系. 求证：$\{e_n\}\cup\{f_n\}$是X的完备标准正交系.

13. 设$\{e_n\}$ $(n=1,2,\cdots)$和$\{f_n\}$ $(n=1,2,\cdots)$是 Hilbert 空间X中的两个标准正交系，满足条件

$$\sum_{n=1}^{\infty}\|e_n-f_n\|^2<1.$$

求证：$\{e_n\}$和$\{f_n\}$两者中一个完备蕴含另一个完备.

14. 设 X 是内积空间，$\{e_n\}$是 X 中的标准正交系，求证

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}(x,e_n)\overline{(y,e_n)}\right|\leqslant\|x\|\|y\|\quad(\forall x,y\in X).$$

15. 证明$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{inx}\right\}$ $(n=0,\ \pm1,\pm2,\cdots)$是$L^2[0,2\pi]$中的完备标准正交系.

16. 证明三角函数系$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\frac{\cos x}{\sqrt{\pi}},\frac{\sin x}{\sqrt{\pi}},\ \cdots,\ \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}},\frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}},\cdots\right\}$是实$L^2[-\pi,\pi]$中的完备标准正交系.

17. 设L_1，L_2是 Hilbert 空间X的子空间，$L_1\perp L_2$，$L=L_1\oplus L_2$. 证明L是闭子空间$\Leftrightarrow L_1$、L_2均为闭子空间.

18. 设X为内积空间，若X有有限的或可数的完备标准正交系，则X是可分的.

§8.2 Riesz 表示定理

8.2.1 Hilbert 空间上连续线性泛函的表示

设X是一个内积空间，$\forall y\in X$，在X上作泛函f_y如下：

$$f_y(x)=(x,y)\quad(\forall x\in X).\tag{8.2.1}$$

由内积对第一个变元的线性知f_y是线性的. 由 Schwarz 不等式得到

$$\|f_y(x)\|=|(x,y)|\leqslant\|x\|\|y\|\quad(\forall x\in X).$$

因此 $f_y \in X^*$，而且 $\|f_y\| \leqslant \|y\|$. 另一方面，取 $x=y$，由(8.2.1)式就可推得 $\|f_y\| \geqslant \|y\|$，从而

$$\|f_y\| = \|y\|. \tag{8.2.2}$$

我们称 f_y 是由向量 y 导出的有界线性泛函.

当 X 是 Hilbert 空间时，上述事实的逆命题也是成立的，就是说，X 上的任何一个连续线性泛函都有(8.2.1)的形式.

定理 8.2.1(F. Riesz **表示定理**)　**设** X **是 Hilbert 空间，**f **是** X **上的连续线性泛函，则必有唯一的** $y \in X$**，使得**

$$f(x) = (x, y) \quad (\forall x \in X), \tag{8.2.3}$$

而且 $\|f\| = \|y\|$.

证明　如果 $f=\theta$，只要取 $y=\theta$ 就好了. 因此不妨设 $f \neq \theta$. 令 $M = \{x \in X \mid f(x)=0\}$，因 f 是连续线性泛函，由定理 7.1.4 知，M 是 X 的闭子空间. 又 $f \neq \theta$，所以 $M \neq X$. 据正交分解定理，必有 $z \in X - \{\theta\}$，使得 $z \perp M$. 由于 $M \cap M^{\perp} = \{\theta\}$，从而 $z \bar{\in} M$，所以 $f(z) \neq 0$. $\forall x \in X$，由于 $f(x - f(x)z/f(z)) = 0$，所以 $x - f(x)z/f(z) \in M$. 于是

$$(x - f(x)z/f(z), z) = 0.$$

从而，$f(x) = f(z)(x, z)/\|z\|^2$. 取 $y = \overline{f(z)}z/\|z\|^2$，就得到 $f(x) = (x, y)(\forall x \in X)$.

泛函 f 既然表示成(8.2.1)的形式，即 f 是由向量 y 导出的，所以 $\|f\| = \|y\|$.

最后证明向量 y 是由 f 唯一确定的. 假若还有 $z \in X$，使得

$$f(x) = (x, y) = (x, z) \quad (\forall x \in X),$$

则 $(x, y-z) = 0 (\forall x \in X)$，取 $x = y-z$，就得到 $y=z$. 证毕.

8.2.2　Hilbert 空间的"自共轭性"

设 X 是内积空间，作 X 到它的共轭空间 X^* 的映射

$$V: y \mapsto f_y \quad (\forall y \in X), \tag{8.2.4}$$

其中 f_y 就是((8.2.1)式所规定的)由向量 y 导出的泛函. 容易看出,当 X 是复空间时,映射 V 是共轭线性的,即

$$V(\alpha y+\beta z)=\bar{\alpha}Vy+\bar{\beta}Vz \quad (\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall y, z \in X).$$

这直接由

$$\begin{aligned} f_{\alpha y+\beta z}(x) &= (x, \alpha y+\beta z)=\bar{\alpha}(x, y)+\bar{\beta}(x, z) \\ &= \bar{\alpha} f_y(x)+\bar{\beta} f_z(x) \quad (\forall x \in X) \end{aligned}$$

可以得到. 此外,由(8.2.2)式知 V 是保范映射,从而 V 还是单射. 综上所述, V 是 X 到 X^*(中)的一一的保范的共轭线性映射. 我们称映射 V 是 X 到 X^* 的自然映射.

当 X 是 Hilbert 空间时,由 Riesz 定理,此时 X 到 X^* 的自然映射 V 是双射,从而,V 是 X 到 X^* 上的一一的保范的共轭线性映射(注: 这时 V 的逆映射 V^{-1} 也是 X^* 到 X 上的一一的保范的共轭线性映射). 我们称 V 是 X 到 X^* 上的保范的共轭线性同构映射,简称共轭同构映射. 在这种同构意义下,今后我们将把 y 和 f_y 视为同一,从而把 X 和 X^* 视为同一,并称 X 是自共轭的空间,简单地记作 $X^*=X$. 但要注意的是,对于 $\alpha \in \mathbb{K}$ 及 $y \in X$,把 αy 作为泛函看待时,它在 x 点的值是泛函 y 在 x 点的值乘以 $\bar{\alpha}$,这是由于

$$(\alpha y)(x)=(x, \alpha y)=\bar{\alpha}(x, y)=\bar{\alpha} y(x) \quad (\forall x \in X).$$

这和第七章的情况略有不同.

*8.2.3 Hilbert 空间上连续共轭双线性泛函的表示

本节先引入共轭双线性泛函的概念,然后介绍 Riesz 定理的一个重要推论——Lax-Milgram 定理,这是偏微分方程理论中的一个很有用的定理.

定义 8.2.1 线性空间 X 上的一个二元函数 $\varphi(\cdot, \cdot)$: $X \times X \to \mathbb{K}$,称为是共轭双线性泛函,如果 $\forall x, y, z \in X, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$,成立

(1) $\varphi(\alpha x+\beta y, z)=\alpha\varphi(x, z)+\beta\varphi(y, z)$;

(2) $\varphi(x, \alpha y+\beta z)=\bar{\alpha}\varphi(x, y)+\bar{\beta}\varphi(x, z)$.

定义 8.2.2 设X是内积空间，$\varphi(\cdot, \cdot)$是X上的一个共轭双线性泛函，如果存在$M>0$，使得

$$|\varphi(x, y)|\leqslant M\|x\|\|y\| \quad (\forall x, y\in X), \tag{8.2.5}$$

则称$\varphi(\cdot, \cdot)$是X上的有界共轭双线性泛函. 当$\varphi(\cdot, \cdot)$是X上的有界共轭双线性泛函时，记

$$\|\varphi\|=\sup_{\substack{(x, y)\in X\times X\\ x\neq\theta, y\neq\theta}}\frac{|\varphi(x, y)|}{\|x\|\|y\|}, \tag{8.2.6}$$

称$\|\varphi\|$是泛函$\varphi(\cdot, \cdot)$的范数.

显然，当$\varphi(\cdot, \cdot)$是内积空间X上的有界共轭双线性泛函时，它的范数是有限数，并且成立

$$|\varphi(x, y)|\leqslant\|\varphi\|\|x\|\|y\| \quad (\forall x, y\in X). \tag{8.2.7}$$

此外，还容易证明，对于内积空间X上的共轭双线性泛函$\varphi(\cdot, \cdot)$而言，它的有界性和(关于两个变元的)连续性(即对任何$x_n\to x$，$y_n\to y$，必有$\varphi(x_n, y_n)\to\varphi(x, y)$)是等价的. 证明留给读者.

定理 8.2.2(Lax-Milgram 定理) 设$\varphi(x, y)$是 Hilbert 空间X上的一个有界共轭双线性泛函，如果$\exists\,\delta>0$，使得

$$|\varphi(x, x)|\geqslant\delta\|x\|^2 \quad (\forall x\in X), \tag{8.2.8}$$

则必存在唯一的有连续逆的连续线性算子$T\in\mathscr{B}(X)$，满足

$$\varphi(x, y)=(x, Ty) \quad (\forall x, y\in X); \tag{8.2.9}$$

$$\|T\|=\|\varphi\|; \tag{8.2.10}$$

$$\|T^{-1}\|\leqslant\frac{1}{\delta}. \tag{8.2.11}$$

证明 分三步进行.

1. 证明存在唯一的$T\in\mathscr{B}(X)$，满足(8.2.9)和(8.2.10). 固

定 $y\in X$, $x\mapsto\varphi(x,y)$是 X 上的一个连续线性泛函. 由 Riesz 定理, $\exists$ 唯一的 $z=z(y)\in X$, 使得

$$\varphi(x,y)=(x,z)\quad(\forall x\in X).$$

作 X 到 X 的映射

$$T: y\mapsto z(y),$$

便有

$$\varphi(x,y)=(x,Ty)\quad(\forall x,y\in X).$$

即 T 满足(8.2.9). 又因为 $\forall x,y_1,y_2\in X$, $\forall\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{K}$, 有

$$\begin{aligned}(x,T(\alpha_1y_1+\alpha_2y_2))&=\varphi(x,\alpha_1y_1+\alpha_2y_2)\\&=\bar{\alpha}_1\varphi(x,y_1)+\bar{\alpha}_2\varphi(x,y_2)\\&=\bar{\alpha}_1(x,Ty_1)+\bar{\alpha}_2(x,Ty_2)\\&=(x,\alpha_1Ty_1+\alpha_2Ty_2),\end{aligned}$$

所以 T 是线性的, 并且

$$\|Ty\|=\sup_{x\in X\setminus\{\theta\}}|\varphi(x,y)|/\|x\|\leqslant\|\varphi\|\|y\|.$$

从而 $T\in\mathscr{B}(X)$, 并且 $\|T\|=\|\varphi\|$. 即 T 满足(8.2.10). 此外, 满足(8.2.9)式的算子 T 显然是由 $\varphi(\cdot,\cdot)$唯一确定的.

2. 证明 T 是双射. (1)证明 T 是单射. 事实上, 若有 $y_1,y_2\in X$, 满足 $Ty_1=Ty_2$, 则

$$\varphi(x,y_1)=\varphi(x,y_2)\quad(\forall x\in X),$$

从而

$$\varphi(x,y_1-y_2)=0\quad(\forall x\in X),$$

特别取 $x=y_1-y_2$, 由(8.2.8)即得 $y_1=y_2$. 因此 T 是单射.

(2) 证明 T 是满射. 先证 $T(X)$是闭的. 事实上, $\forall w\in\overline{T(X)}$, $\exists v_n\in X\,(n=1,2,\cdots)$, 使得

$$w=\lim_{n\to\infty}Tv_n.\tag{8.2.12}$$

由不等式(8.2.8)得

$$\begin{aligned}\delta\|v_{n+p}-v_n\|^2&\leqslant|\varphi(v_{n+p}-v_n,v_{n+p}-v_n)|\\&=|(v_{n+p}-v_n,T(v_{n+p}-v_n))|\\&\leqslant\|v_{n+p}-v_n\|\,\|Tv_{n+p}-Tv_n\|\quad(\forall n,p\in\mathbb{N}),\end{aligned}$$

即得

$$\|v_{n+p}-v_n\|\leqslant\frac{1}{\delta}\|Tv_{n+p}-Tv_n\|\to 0\ (当\ n\to\infty,\forall p\in\mathbb{N}).$$

从而$\{v_n\}$是基本列. 由 X 的完备性知 $\exists v^*\in X$, 使得 $v_n\to v^*$. 再由 T 的连续性和(8.2.12), 就得到 $w=Tv^*$, 即 $w\in T(X)$. 因此 $T(X)$是闭的.

再证$(T(X))^\perp=\{\theta\}$. 倘若 $w\in(T(X))^\perp$,则

$$(w,Tv)=0\quad(\forall v\in X),$$

即 $\varphi(w,v)=0\quad(\forall v\in X)$. 特别取 $v=w$, 再利用假设(8.2.8),即得 $w=\theta$. 因此 $T(X)=X$,即 T 是满射.

3. 证明$T^{-1}\in\mathscr{B}(X)$, 且满足(8.2.11). 事实上, 由于$T\in\mathscr{B}(X)$是双射, 因而T^{-1}存在, 由 Banach 逆算子定理, $T^{-1}\in\mathscr{B}(X)$. 又因为

$$\delta\|x\|^2\leqslant|\varphi(x,x)|=|(x,Tx)|\leqslant\|x\|\|Tx\|\quad(\forall x\in X),$$

所以$\delta\|x\|\leqslant\|Tx\|(\forall x\in X)$,即 $\delta\|T^{-1}x\|\leqslant\|x\|(\forall x\in X)$. 故 $\|T^{-1}\|\leqslant\frac{1}{\delta}$. 证毕.

推论 8.2.3 **设$\varphi(\cdot,\cdot)$是 Hilbert 空间 X 上的有界共轭双线性泛函,如果 $\exists\delta>0$,使得**

$$|\varphi(x,x)|\geqslant\delta\|x\|^2\quad(\forall x\in X),$$

则 $\forall f\in X^*$,$\exists$ 唯一的 $y\in X$,满足

$$\varphi(x,y)=f(x)\quad(\forall x\in X),\tag{8.2.13}$$

并且$\|y\|\leqslant\frac{1}{\delta}\|f\|$.

证明 由 Riesz 定理，$\forall f\in X^*$，$\exists$ 唯一的 $y^*\in X$，使得

$$f(x)=(x,y^*)\quad(\forall x\in X),$$

而且 $\|f\|=\|y^*\|$. 再由定理 8.2.2，存在唯一的双射 $T\in\mathscr{B}(X)$，满足

$$\varphi(x,z)=(x,Tz)\,(\forall x,z\in X),$$

而且 $T^{-1}\in\mathscr{B}(X)$，$\|T^{-1}\|\leqslant\frac{1}{\delta}$. 令 $y=T^{-1}y^*$，则

$$\varphi(x,y)=(x,Ty)=(x,y^*)=f(x)\quad(\forall x\in X),$$

而且 $\|y\|=\|T^{-1}y^*\|\leqslant\|T^{-1}\|\|y^*\|\leqslant\frac{1}{\delta}\|f\|$. 证毕.

由上面的讨论还可以看出，推论 8.2.3 有一个等价的算子形式：

推论 8.2.3′ **设 X 是 Hilbert 空间，$T\in\mathscr{B}(X)$. 如果 $\exists\delta>0$，使得**

$$|(x,Tx)|\geqslant\delta\|x\|^2\quad(\forall x\in X),\tag{8.2.8′}$$

那末方程

$$Ty=f\tag{8.2.13′}$$

对任何 $f\in X$，必有唯一解 $y\in X$，并且 $\|y\|\leqslant\frac{1}{\delta}\|f\|$.

证明 令 $\varphi(x,y)=(x,Ty)\,(\forall x,y\in X)$，则 $\varphi(\cdot,\cdot)$ 满足定理 8.2.2 的全部条件，于是 T 有连续逆 $T^{-1}\in\mathscr{B}(X)$，并且 $\|T^{-1}\|\leqslant\frac{1}{\delta}$. 证毕.

注 如果推论 8.2.3 中的有界共轭双线性泛函 $\varphi(\cdot,\cdot)$ 在复空间 X 上满足比 (8.2.8) 更强的条件：

$$\mathrm{Re}\,\varphi(x,x)\geqslant\delta\|x\|^2\quad(\forall x\in X),\tag{8.2.14}$$

那末称 $\varphi(\cdot,\cdot)$ 为椭圆的有界共轭双线性泛函. 这时还可给出 (8.2.13) 求解的简单方法.

事实上，(8.2.14)等价于相应于 $\varphi(\cdot,\cdot)$ 的推论 8.2.3′ 中的算子 T 满足

$$\operatorname{Re}(x,Tx)\geqslant\delta\|x\|^2 \quad (\forall x\in X). \tag{8.2.15}$$

求方程(8.2.13)的解 y 等价于求映射

$$T_r: y\mapsto y-r(Ty-f) \quad (\forall y\in X, r \text{ 是非零常数}) \tag{8.2.16}$$

的不动点. 我们只要适当选取常数 r，使得 T_r 是压缩映射，那末，(8.2.16)的不动点就可利用压缩映射原理很方便地获得. 由于

$$\begin{aligned}\|T_rx-T_ry\|^2&=\|x-y-rT(x-y)\|^2\\&=\|x-y\|^2-2r\operatorname{Re}(x-y,T(x-y))+r^2\|T(x-y)\|^2\\&\leqslant(1-2r\delta+r^2\|T\|^2)\|x-y\|^2 \quad (\forall x,y\in X),\end{aligned}$$

所以，只要取 $r\in\left(0,\dfrac{2\delta}{\|T\|^2}\right)$ (注意 $\|T\|=\|\varphi\|$)，那末 $\alpha=1-2r\delta+r^2\|T\|^2\in[0,1)$，于是 T_r 是压缩映射. 特别，取 $r=\dfrac{\delta}{\|T\|^2}$ 时，α 达到最小值. 自然，这时求((8.2.13)的)解(即求 T_r 的不动点)的迭代过程收敛速度最快.

习 题 8.2

1. 设 X 是 Hilbert 空间，V 是 X 到它的共轭空间 X^* 的自然映射. 证明

$$(f_1,f_2)=\overline{(V^{-1}f_1,V^{-1}f_2)} \quad (\forall f_1,f_2\in X^*)$$

是 X^* 上的内积，并且由此内积导出的范数与 X^* 上的原有范数一致.

2. 设 T 是 Hilbert 空间 X 到内积空间 Y 上的有界线性算子，并且是正则的，证明 Y 必是 Hilbert 空间.

3. 设 f 是 Hilbert 空间 X 的子空间 X_0 上的有界线性泛函. 证明 f 在 X 上存在唯一的保范延拓.

4. 设 X 是内积空间，V 是 X 到它的共轭空间 X^* 的自然映射. 如果 V 是双射，则 X 是 Hilbert 空间.

5. 证明 $L^2[a,b]$ 上每一个连续线性泛函 f 都可以表示成 $f(x)=\int_a^b x(t)\overline{y(t)}dt$，其中 $y\in L^2[a,b]$.

6. 设 $\varphi(\cdot,\cdot)$ 是内积空间 X 上的共轭双线性泛函. 则 $\varphi(\cdot,\cdot)$ 是有界的 $\Leftrightarrow \varphi(\cdot,\cdot)$ 是二元连续的.

7. 设 X 是 Hilbert 空间, $T\in\mathscr{B}(X)$. 如果 $\exists\delta>0$, 使得

$$|(Tx,x)|\geqslant\delta\|x\|^2 \quad (\forall x\in X),$$

则 $\exists T^{-1}\in\mathscr{B}(X)$, 而且 $\|T^{-1}\|\leqslant\frac{1}{\delta}$.

8. 设 f 是 Hilbert 空间 X 上的泛函, 如果 $\forall x, y\in X, \forall\alpha, \beta\in\mathbb{K}$, $f(\alpha x+\beta y)=\bar{\alpha}f(x)+\bar{\beta}f(y)$, 称 f 是 X 上的共轭线性泛函. 证明下述 Riesz 表示定理: 对 Hilbert 空间 X 上的任何共轭线性泛函 f, 必存在唯一的 $y\in X$, 使得 $f(x)=(y,x)$ $(\forall x\in X)$.

9. **定义** 线性空间 X 上的一个二元函数 $\varphi(\cdot,\cdot): X\times X\to\mathbb{K}$, 称为是 Hermite 泛函, 如果

$$\varphi(x,y)=\overline{\varphi(y,x)} \quad (\forall x,y\in X).$$

设 X 是一个 Hilbert 空间 $\varphi(x,y)$ 是 X 上的共轭双线性 Hermite 泛函, 并且 $\exists M>0, \delta>0$, 使得

$$\delta\|x\|^2\leqslant\varphi(x,x)\leqslant M\|x\|^2 \quad (\forall x\in X),$$

又设 $u_0\in X$, E 是 X 中的一个闭凸子集.

求证: (1) $\varphi(\cdot,\cdot)$ 是 X 上的有界共轭双线性泛函, 并且 $\|\varphi\|\leqslant M$;

(2) 函数

$$x\mapsto\varphi(x,x)-\mathrm{Re}(u_0,x) \quad (x\in X)$$

在 E 上达到最小值, 并且达到最小值的点 x_0 满足

$$\mathrm{Re}[2\varphi(x_0,x-x_0)-(u_0,x-x_0)]\geqslant 0 \quad (\forall x\in E).$$

§8.3 Hilbert空间上的几种有界线性算子

8.3.1 Hilbert 共轭算子

定义 8.3.1 设 X、Y 是内积空间, $T\in\mathscr{B}(X,Y)$. 如果有 $T'\in\mathscr{B}(Y,X)$ 适合

$$(Tx,y)=(x,T'y) \quad (\forall x\in X, \forall y\in Y), \tag{8.3.1}$$

则称 T' 是 T 的 Hilbert 共轭算子或 Hilbert 伴随算子.

在定义中, 当 X 是 Hilbert 空间时, 有 Hilbert 共轭算子的

存在唯一性结论.

定理8.3.1 设X是 Hilbert 空间, Y是内积空间,$T\in\mathscr{B}(X,Y)$,则T有唯一的 Hilbert 共轭算子$T'\in\mathscr{B}(Y,X)$,并且$\|T'\|=\|T\|$.

证明 $\forall y\in Y$,因为

$$|(Tx,y)|\leqslant\|Tx\|\|y\|\leqslant\|T\|\|x\|\|y\|\quad(\forall x\in X),$$

所以

$$f_y(x)=(Tx,y)\quad(\forall x\in X)$$

是X上的有界线性泛函. 因X是 Hilbert 空间,据定理 8.2.1 (Riesz 表示定理),存在唯一的$z\in X$,使得

$$f_y(x)=(x,z)\quad(\forall x\in X),\tag{8.3.2}$$

且$\|f_y\|=\|z\|$. 作Y到X的算子$T':y\mapsto z$,则由(8.3.2)得到

$$(Tx,y)=(x,T'y)\quad(\forall x\in X,\forall y\in Y),\tag{8.3.3}$$

即T'适合(8.3.1)式.

下面证明$T'\in\mathscr{B}(Y,X)$. $\forall y_1,y_2\in Y,\forall\alpha,\beta\in\mathbb{K}$,由(8.3.3)式,

$$\begin{aligned}&(x,T'(\alpha y_1+\beta y_2))=(Tx,\alpha y_1+\beta y_2)\\&=\bar{\alpha}(Tx,y_1)+\bar{\beta}(Tx,y_2)\\&=\bar{\alpha}(x,T'y_1)+\bar{\beta}(x,T'y_2)\\&=(x,\alpha T'y_1+\beta T'y_2)\quad(\forall x\in X),\end{aligned}$$

因此,$T'(\alpha y_1+\beta y_2)=\alpha T'y_1+\beta T'y_2$. 即$T'$是线性算子. 又由$T'$的定义知,$\forall y\in Y$,有

$$\|T'y\|=\|f_y\|\leqslant\|T\|\|y\|,\tag{8.3.4}$$

因此$T'\in\mathscr{B}(Y,X)$,即T'是T的 Hilbert 共轭算子.

假若还有一个$T'_1\in\mathscr{B}(Y,X)$,使得

$$(Tx,y)=(x,T'_1y)\quad(\forall x\in X,\forall y\in Y),\tag{8.3.5}$$

则由式(8.3.3)与(8.3.5)得到

$$(x,(T'-T'_1)y)=0\quad(\forall x\in X,\forall y\in Y).$$

令 $x=(T'-T_1')y$，就得到 $(T'-T_1')y=\theta\ (\forall y\in Y)$，因此 $T'=T_1'$. 可见 T 的 Hilbert 共轭算子是唯一的.

最后证明 $\|T\|=\|T'\|$. 由(8.3.4)式知 $\|T'\|\leqslant\|T\|$. 只须再证 $\|T'\|\geqslant\|T\|$. 在(8.3.3)式中，令 $y=Tx$，则有

$$\|Tx\|^2=(x,T'(Tx))\leqslant\|x\|\|T'(Tx)\|\leqslant\|x\|\|T'\|\|Tx\|,$$

因此，当 $Tx\neq\theta$ 时，成立

$$\|Tx\|\leqslant\|T'\|\|x\|, \tag{8.3.6}$$

当 $Tx=\theta$ 时，(8.3.6)式自然成立，从而 $\|T\|\leqslant\|T'\|$. 证毕.

注 在定理8.3.1的条件下，即当 X 是 Hilbert 空间，Y 是内积空间，$T\in\mathscr{B}(X,Y)$ 时，由于内积空间是赋范线性空间，据定理7.5.3的(1)，T 有唯一的共轭算子 $T^*\in\mathscr{B}(Y^*,X^*)$. 我们自然要问，$T$ 的 Hilbert 共轭算子 $T'\in\mathscr{B}(Y,X)$ 和 T^* 之间有何关系？下面来讨论这个问题.

设 V 是 X 到 X^* 的自然映射，W 是 Y 到 Y^* 的自然映射. 由于

$$\begin{aligned}(Tx,y)&=(Wy)(Tx)=(T^*(Wy))(x)\\&=(x,(V^{-1}T^*W)y)\quad(\forall x\in X,\forall y\in Y),\end{aligned}$$

所以 Y 到 X 的映射 $V^{-1}T^*W$ 适合(8.3.1)式. 又由映射 V^{-1}、W 的保范性和共轭线性及 T^* 的有界性可以看出，$V^{-1}T^*W\in\mathscr{B}(Y,X)$，从而 $V^{-1}T^*W$ 是 T 的 Hilbert 共轭算子，再由 T 的 Hilbert 共轭算子的唯一性知

$$T'=V^{-1}T^*W. \tag{8.3.7}$$

此外，由 $\|T'\|=\|T\|$ 和 $\|T^*\|=\|T\|$ 还知道

$$\|T'\|=\|T^*\|. \tag{8.3.8}$$

特别，当 $T\in\mathscr{B}(X)$ 时，

$$T'=V^{-1}T^*V. \tag{8.3.9}$$

为简便起见，今后我们将内积空间上有界线性算子 T 的 Hilbert 共轭算子仍简称为共轭算子，并仍用符号 T^* 记之. 请读者视

具体情况加以区分.

例 1 考察 n 维复欧几里得空间 $\boldsymbol{R}^n$ 中由方阵

$$A=(a_{ij})\quad(i,j=1,2,\cdots,n)$$

定义的算子

$$T: x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mapsto x'=(x_1',x_2',\cdots,x_n'),$$

其中 $x_i'=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j$ $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$. 由 §7.1 例 1 和例 5 知 $T\in\mathscr{B}(\boldsymbol{R}^n)$.

现在求 T 的共轭算子 T^*. $\forall x=(x_1,x_2,\cdots,x_n),\ y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in\boldsymbol{R}^n$, 有

$$(x,T^*y)=(Tx,y)=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\right)\overline{y}_i$$

$$=\sum_{j=1}^{n}x_j\overline{\left(\sum_{i=1}^{n}\overline{a}_{ij}y_i\right)}=\sum_{i=1}^{n}x_i\overline{\left(\sum_{j=1}^{n}\overline{a}_{ji}y_j\right)}.$$

由此可见 T^* 是由 (a_{ij}) 的共轭转置方阵 $(\overline{a}_{ji})$ 所定义.

例 2 设 $K(s,t)$ 是 $[a,b]\times[a,b]$ 上的平方可积函数. 令

$$(Tx)(s)=\int_a^b K(s,t)x(t)dt\quad(\forall x\in L^2[a,b]),$$

由 §7.5 例 5 知 $T\in\mathscr{B}(L^2[a,b])$.

现在求 T 的共轭算子 T^*. $\forall x,y\in L^2[a,b]$, 有

$$(x,T^*y)=(Tx,y)=\int_a^b\left(\int_a^b K(s,t)x(t)dt\right)\overline{y(s)}ds$$

$$=\int_a^b x(t)\left(\overline{\int_a^b\overline{K(s,t)}y(s)ds}\right)dt$$

$$=\int_a^b x(s)\left(\overline{\int_a^b\overline{K(t,s)}y(t)dt}\right)ds,$$

因此

$$(T^*y)(s)=\int_a^b \overline{K(t,s)}y(t)dt \quad (\forall y\in L^2[a,b]).$$

即 T^*是以$K^*(s,t)=\overline{K(t,s)}$ 为核的积分算子.（积分方程论中通常称 $K^*(s,t)$是核$K(s,t)$的共轭核.）

共轭算子有下面的性质.

定理 8.3.2 设 X、Z 是 Hilbert 空间，Y 是内积空间，T，$T_1\in\mathscr{B}(X,Y)$，$T_2\in\mathscr{B}(Z,X)$，$\alpha,\beta\in\mathrm{K}$，则

(1) $I_Y^*=I_Y$;

(2) $T^{**}=(T^*)^*=T$;

(3) $\|T\|^2=\|T^*T\|$;

(4) $(\alpha T+\beta T_1)^*=\bar{\alpha}T^*+\bar{\beta}T_1^*$;

(5) $(T_1T_2)^*=T_2^*T_1^*$;

(6) T 为正则算子的充要条件是 T^*为正则算子，当 T 是正则算子时，有

$$(T^*)^{-1}=(T^{-1})^*.$$

证明 (1) 显然成立.

(2) $\forall x\in X,\forall y\in Y$，因为$(Tx,y)=(x,\ T^*y)$，所以$(T^*y,x)=(y,Tx)$，从而$(T^*)^*=T$.

(3) 由定理 7.1.8 和定理 8.3.1 知

$$\|T^*T\|\leqslant\|T^*\|\|T\|=\|T\|^2.$$

另一方面，$\forall x\in X$，$\|x\|=1$，由 Schwarz 不等式有

$$\|Tx\|^2=(Tx,Tx)=(T^*Tx,x)\leqslant\|T^*Tx\|\|x\|\leqslant\|T^*T\|,$$

所以$\|T\|^2=\sup\limits_{\|x\|=1}\|Tx\|^2\leqslant\|T^*T\|$. 从而$\|T\|^2=\|T^*T\|$.

(4) $\forall x\in X,\forall y\in Y$，由于

$$\begin{aligned}((\alpha T+\beta T_1)x,y)&=\alpha(Tx,y)+\beta(T_1x,y)\\&=\alpha(x,T^*y)+\beta(x,T_1^*y)=(x,(\bar{\alpha}T^*+\bar{\beta}T_1^*)y),\end{aligned}$$

所以 $$(\alpha T+\beta T_1)^*=\bar{\alpha}T^*+\bar{\beta}T_1^*.$$

(5) $\forall x\in Z,\forall y\in Y$, 由于

$$(T_1T_2x,y)=(T_2x,T_1^*y)=(x,T_2^*T_1^*y),$$

所以 $$(T_1T_2)^*=T_2^*T_1^*.$$

(6) 当 T 是正则算子时, $T^{-1}\in\mathscr{B}(Y,X)$, 且 $TT^{-1}=I_Y$, $T^{-1}T=I_X$, 由(1)和(5)知

$$(T^{-1})^*T^*=I_Y,\ T^*(T^{-1})^*=I_X.$$

又 $T^*\in\mathscr{B}(Y,X)$, $(T^{-1})^*\in\mathscr{B}(X,Y)$, 据引理 7.4.1, T^*是正则算子, 并且$(T^*)^{-1}=(T^{-1})^*$.

反过来, 当T^*是正则算子时, 由于$T=(T^*)^*$, 从而T也是正则算子.

8.3.2 自共轭算子

定义 8.3.2 设X为 Hilbert 空间, $T\in\mathscr{B}(X)$. 若 $T=T^*$, 则称T为X上的自共轭算子或自伴算子.

从定义容易看出, T为自共轭算子$\Leftrightarrow\forall x,y\in X$, 有

$$(Tx,y)=(x,Ty).$$

现在考察前面谈到的两个例子. 如果在例 1 中,

$$a_{ij}=\bar{a}_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n),$$

则由方阵(a_{ij})定义的算子T是自共轭的. 如果在例 2 中,

$$K(s,t)=\overline{K(t,s)},$$

则以$K(s,t)$为核的积分算子T也是自共轭的.

在线性代数中, 如果矩阵 $A=(a_{ij})$ $(i,j=1,2,\cdots,n)$满足

$$(\bar{A})^T=A(\text{即 }\bar{a}_{ji}=a_{ij},\ i,j=1,2,\cdots,n),$$

则称A为自共轭矩阵或 Hermite 矩阵. 由此可见, 自共轭算子是自共轭矩阵的推广.

为了讨论自共轭算子的性质, 先引进一个恒等式. 容易验证,

若 X 是复内积空间，$T\in\mathscr{B}(X)$，则 $\forall x,y\in X$，成立

$$(Tx,y)=\frac{1}{4}[(T(x+y),x+y)-(T(x-y),x-y)$$
$$+i(T(x+iy),x+iy)-i(T(x-iy),x-iy)]. \tag{8.3.10}$$

这个恒等式类似于 §8.1 的极化恒等式(8.1.8)，也称为极化恒等式.

从恒等式(8.3.10)看出，若 $(Tx,x)=0(\forall x\in X)$，则 $(Tx,y)=0$ $(\forall x,y\in X)$. 特别，$\|Tx\|^2=(Tx,Tx)=0(\forall x\in X)$. 因此，$T$ 是零算子. 反之，若 T 是零算子，显然 $(Tx,y)=0(\forall x,y\in X)$. 所以，我们得到如下结论：

T 是零算子 $\Leftrightarrow(Tx,y)=0,\forall x,y\in X\Leftrightarrow(Tx,x)=0,\forall x\in X$.

定理 8.3.3 **设 X 是复 Hilbert 空间，$T\in\mathscr{B}(X)$，则 T 是自共轭算子 $\Leftrightarrow\forall x\in X$，$(Tx,x)$ 是实数.**

证明 "$\Rightarrow$"：设 $T=T^*$，则 $\forall x\in X$，有

$$(Tx,x)=(x,Tx)=\overline{(Tx,x)},$$

所以 (Tx,x) 是实数.

"$\Leftarrow$"：由定理 8.3.1，T 有唯一的共轭算子 $T^*\in\mathscr{B}(X)$，又 $\forall x\in X$，(Tx,x) 是实数，因此

$$(Tx,x)=\overline{(Tx,x)}=\overline{(x,T^*x)}=(T^*x,x),\ \forall x\in X.$$

即

$$((T-T^*)x,x)=0,\ \forall x\in X.$$

于是 $T-T^*$ 是零算子，所以 $T=T^*$. 证毕.

定理 8.3.4 **设 T_1、T_2 是 Hilbert 空间 X 上的自共轭算子，λ_1、λ_2 是实数，则**

(1) $\lambda_1T_1+\lambda_2T_2$ 是自共轭算子.

(2) T_1T_2 是自共轭算子 $\Leftrightarrow T_1T_2=T_2T_1$.

证明 (1) 由于

$$(\lambda_1 T_1+\lambda_2 T_2)^*=\bar{\lambda}_1 T_1^*+\bar{\lambda}_2 T_2^*=\lambda_1 T_1+\lambda_2 T_2,$$

所以 $\lambda_1 T_1+\lambda_2 T_2$ 是自共轭算子.

(2) "$\Rightarrow$": 设T_1T_2是自共轭算子，则

$$T_1T_2=(T_1T_2)^*=T_2^*T_1^*=T_2T_1.$$

"$\Leftarrow$": 设 $T_1T_2=T_2T_1$，则

$$(T_1T_2)^*=T_2^*T_1^*=T_2T_1=T_1T_2,$$

因此，T_1T_2是自共轭算子. 证毕.

定理 8.3.5 **设$\{T_n\}$是 Hilbert 空间X上的一列自共轭算子，并且$\lim\limits_{n\to\infty}T_n=T$，则$T$也是$X$上的自共轭算子.**

证明 由题设知，$T\in\mathscr{B}(X)$，从而T有唯一的共轭算子$T^*\in\mathscr{B}(X)$. 由于

$$\begin{aligned}\|T-T^*\|&\leqslant\|T-T_n\|+\|T_n-T^*\|\\&=\|T_n-T\|+\|(T_n-T)^*\|\\&=2\|T_n-T\|\to 0\,(n\to\infty),\end{aligned}$$

所以$\|T-T^*\|=0$，即$T=T^*$. 证毕.

定理 8.3.6 **设T为 Hilbert 空间X上的自共轭算子，令**

$$m=\inf_{\|x\|=1}(Tx,x),M=\sup_{\|x\|=1}(Tx,x),$$

则$\|T\|=\max\{|m|,|M|\}=\sup\limits_{\|x\|=1}|(Tx,x)|$. (注：$m$, M分别称为算子T的下界与上界.)

证明 令$K=\max\{|m|,|M|\}=\sup\limits_{\|x\|=1}|(Tx,x)|$. 当$\|x\|=1$时，

$$|(Tx,x)|\leqslant\|Tx\|\|x\|\leqslant\|T\|\|x\|^2=\|T\|,$$

从而

$$K\leqslant\|T\|.$$

下面证明$\|T\|\leqslant K$，为此只须证明，$\forall z\in X$，有$\|Tz\|\leqslant K\|z\|$. 当

$Tz=\theta$ 时，上式显然成立. 下设 $Tz\neq\theta$，从而 $z\neq\theta$. 取 $\lambda^2=\frac{\|Tz\|}{\|z\|}$，并令 $u=\frac{1}{\lambda}Tz$，即得

$$\begin{aligned}\|Tz\|^2&=(Tz,Tz)=\left(T\lambda z,\ T\frac{1}{\lambda}z\right)\\&=\frac{1}{4}[(T(\lambda z+u),\lambda z+u)-(T(\lambda z-u),\lambda z-u)]\\&\leqslant\frac{1}{4}K[\|\lambda z+u\|^2+\|\lambda z-u\|^2]\\&=\frac{1}{2}K\left[\lambda^2\|z\|^2+\frac{1}{\lambda^2}\|Tz\|^2\right]\\&=K\|z\|\|Tz\|,\end{aligned}$$

于是

$$\|Tz\|\leqslant K\|z\|.$$

即

$$\|T\|\leqslant K.$$

因此，$\|T\|=K=\max\{|m|,|M|\}=\sup\limits_{\|x\|=1}|(Tx,\ x)|$. 证毕.

8.3.3 投影算子

设 X 是 Hilbert 空间，M 是 X 的闭线性子空间，由正交分解定理(定理8.1.7)，每一个 $x\in X$ 可唯一地分解为

$$x=x_0+x_1\quad(x_0\in M,\ x_1\in M^{\perp}).$$

作 X 到 M 的算子

$$P:x\mapsto x_0,$$

称 P 为(X 到) M 上的投影算子.

有时为了标出 P 是在 M 上的投影算子，记 P 为 P_M. 容易证明，P_M 是有界线性算子，且当 $M\neq\{\theta\}$ 时，$\|P_M\|=1$.

事实上，$\forall x_1,x_2\in X$，$\forall\alpha,\beta\in\mathbb{K}$，有 $x_1=P_Mx_1+z_1$，$x_2=P_Mx_2+z_2$，这里 z_1、$z_2\in M^{\perp}$. 于是

$$\alpha x_1+\beta x_2=(\alpha P_Mx_1+\beta P_Mx_2)+(\alpha z_1+\beta z_2),$$

而且 $\alpha P_M x_1+\beta P_M x_2\in M$, $\alpha z_1+\beta z_2\in M^\perp$. 所以

$$P_M(\alpha x_1+\beta x_2)=\alpha P_M x_1+\beta P_M x_2,$$

即P_M是线性算子. 另外, $\forall x\in X$, $x=P_M x+(x-P_M x)$, $P_M x\perp x-P_M x$. 根据勾股定理,

$$\|x\|^2=\|P_M x\|^2+\|x-P_M x\|^2\geqslant\|P_M x\|^2,$$

所以$\|P_M\|\leqslant 1$. 可见 P_M 是有界算子. 又当 $M\neq\{\theta\}$时, 有 $x\in M$, $x\neq\theta$, 这时$P_M x=x$, 从而

$$\|x\|=\|P_M x\|\leqslant\|P_M\|\|x\|,$$

因此$\|P_M\|\geqslant 1$, 故$\|P_M\|=1$.

例 3 考察 Hilbert 空间 $\boldsymbol{R}^n$中的投影算子. 设M是 $\boldsymbol{R}^n$的一个子空间, $e_1, e_2, \cdots, e_m$ 是M中的一组标准正交系, $e_{m+1}, \cdots, e_n$ 是$M^\perp$中的标准正交系, 则$e_1, e_2, \cdots, e_n$是 $\boldsymbol{R}^n$中的一组标准正交系. 设P是$\boldsymbol{R}^n$到M上的投影算子. 因为

$$Pe_i=\begin{cases}e_i, & i\leqslant m,\\ \theta, & i>m,\end{cases}$$

所以在基 $e_1, e_2, \cdots, e_n$之下, 和算子P相应的矩阵(a_{ij})为

$$a_{ij}=(Pe_j, e_i)=\begin{cases}0, & i\neq j,\\ 0, & i=j>m,\\ 1, & i=j\leqslant m.\end{cases}$$

所以$(a_{ij})_{n\times n}$形如

$$\begin{bmatrix} \overbrace{1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0}^{m} & 0 & \cdots & 0\\ 0 \quad 1 \quad \cdots \quad 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots \quad \vdots \quad \ddots \quad \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 \quad 0 \quad \cdots \quad 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots \quad \vdots \quad \ddots \quad \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

下面的定理说明了投影算子的特征.

定理 8.3.7 设 X 是 Hilbert 空间, $P\in\mathscr{B}(X)$. 则下列三条件等价:

(1) P 是投影算子;

(2) P 是自共轭且等幂($P^2=P$)的算子;

(3) $\|Px\|^2=(Px,x)$, $\forall x\in X$.

证明 (1)⇒(2): 设 P 是 X 到 X 的闭线性子空间 M 上的投影算子. $\forall x_1,x_2\in X$, 有

$$x_1=Px_1+z_1,\ x_2=Px_2+z_2,\ z_1,z_2\in M^{\perp}.$$

从而

$$(Px_1,z_1)=(Px_2,z_2)=0.$$

于是

$$\begin{aligned}(Px_1,x_2)&=(Px_1,Px_2+z_2)=(Px_1,Px_2)\\&=(Px_1+z_1,Px_2)=(x_1,Px_2).\end{aligned}$$

所以 P 是自共轭算子. 又 $\forall x\in X$, $Px\in M$, 因此 $P(Px)=Px$, 即有 $P^2=P$.

(2)⇒(3): 由于 P 是等幂且自共轭的算子, 因此, $\forall x\in X$, 有

$$(Px,x)=(P^2x,x)=(Px,Px)=\|Px\|^2.$$

(3)⇒(1): 因为 $\forall x\in X$, $(Px,x)=\|Px\|^2$ 是实数, 由定理8.3.3知道 P 是自共轭算子, 于是有

$$(Px,x)=\|Px\|^2=(Px,Px)=(P^2x,x),\ \forall x\in X.$$

令 $M=\{x\in X\mid Px=x\}$, 显然 M 是 X 的闭线性子空间. 我们证明 P 是 X 到 M 上的投影算子. 由于

$$((P-P^2)x,x)=(Px,x)-(P^2x,x)=0,\ \forall x\in X,$$

从而 $P=P^2$. 因此 $\forall x\in X$,

$$P(Px)=P^2x=Px,$$

即有 $Px\in M$. 现对每个 $x\in X$, 作分解 $x=Px+(x-Px)$,

则 $Px\in M$，且 $\forall y\in M$，

$$(x-Px,y)=(x,y)-(Px,y)=(x,y)-(x,Py)$$
$$=(x,y-Py)=0,$$

可见 $x-Px\in M^{\perp}$。因此 Px是 x 在M上的投影. 这就是说，P是X到M上的投影算子. 证毕.

*8.3.4 正算子

定义 8.3.3 设X是 Hilbert 空间，$T\in\mathscr{B}(X)$. 如果 $\forall x\in X$，$(Tx,x)\geqslant 0$，则称T是正算子，记为 $T\geqslant\theta$.

设 $T_1,T_2\in\mathscr{B}(X)$，且 $T_1-T_2\geqslant\theta$，则称 T_1 不小于 T_2(或称 T_2 不大于T_1)，记为$T_1\geqslant T_2$(或$T_2\leqslant T_1$).

显然，正算子必为自共轭算子，反之，则不然.

以下设X是 Hilbert 空间，由正算子的定义可以得到下列性质：

1° 设T是X上的正算子，则T的任何非负整数幂 T^n 也是正算子，因此T的任何具有非负实系数的多项式$P(T)$也是正算子.

注 设 $P(\lambda)=a_0+a_1\lambda+\cdots+a_n\lambda^n$ 是 λ 的 n 次多项式，则称

$$P(T)=a_0I+a_1T+\cdots+a_nT^n$$

是T的 n 次多项式.

事实上，若 n 为偶数，设 $n=2k$，则

$$(T^nx,x)=(T^{2k}x,x)=(T^kx,T^kx)\geqslant 0\quad(\forall x\in X).$$

若 n 为奇数，设 $n=2k+1$，则

$$(T^nx,x)=(T^{2k+1}x,x)=(T(T^kx),T^kx)\geqslant 0\quad(\forall x\in X).$$

从而 $\forall n\in\mathbb{N}$，T^n 是正算子. 由此可知

$$(P(T)x,x)=a_0(x,x)+a_1(Tx,x)+\cdots+a_n(T^nx,x)$$
$$\geqslant 0\quad(\forall x\in X;a_i\geqslant 0,i=0,1,2,\cdots,n).$$

因此$P(T)$也是正算子.

2° （广义 Schwarz 不等式） 设T是X上的正算子，则$\forall x, y\in X$，有

$$|(Tx,y)|^2\leqslant(Tx,x)(Ty,y). \tag{8.3.11}$$

事实上，令$z_\lambda=x+\lambda(Tx,y)y$，其中$\lambda$为实数，则

$$0\leqslant(Tz_\lambda,z_\lambda)=(Tx,x)+2\lambda|(Tx,y)|^2+\lambda^2|(Tx,y)|^2(Ty,y).$$

上式右端是λ的二次三项式，它的值总是非负的，故其判别式不大于零，即

$$4|(Tx,y)|^4\leqslant4|(Tx,y)|^2(Tx,x)(Ty,y),$$

因此不等式(8.3.11)成立.

为了讨论下面的问题，我们先引人单调自共轭算子列的概念. 设$\{T_n\}(n=1,2,\cdots)$是 Hilbert 空间X上的自共轭算子列，如果$T_n\leqslant T_{n+1}(n=1,2,\cdots)$，则称$\{T_n\}$是单调上升的，如果$T_n\geqslant T_{n+1}(n=1,2,\cdots)$，则称$\{T_n\}$是单调下降的. 单调上升或单调下降的自共轭算子列统称为单调自共轭算子列.

定理 8.3.8 **设$\{T_n\}$是Hilbert 空间X上的一致有界的单调自共轭算子列，则存在唯一的自共轭算子$T\in\mathscr{B}(X)$，使得**

$$T_n \xrightarrow{\text{强}} T.$$

证明 不妨设$\{T_n\}$是单调上升的，$\forall n,m\in\mathbb{N}$，设$n>m$，令$T_{nm}=T_n-T_m$，则T_{nm}是正算子. 因$\{T_n\}$一致有界，从而$\{T_{nm}\}$也一致有界，即$\exists M>0$，使得

$$\|T_{nm}\|\leqslant M.$$

由定理 8.3.6 及T_{nm}的正性，得

$$0\leqslant(T_{nm}x,x)\leqslant M(x,x)\quad(\forall x\in X).$$

再由广义 Schwarz 不等式，$\forall x\in X$，有

$$\begin{aligned}\|T_{nm}x\|^4&=|(T_{nm}x,T_{nm}x)|^2\\&\leqslant(T_{nm}x,x)(T_{nm}^2x,T_{nm}x)\\&\leqslant M(T_{nm}x,x)\|T_{nm}x\|^2.\end{aligned}$$

因此

$$\|T_{nm}x\|^2 \leqslant M(T_{nm}x, x) \quad (\forall x \in X). \tag{8.3.12}$$

因$\{T_n\}$单调上升且一致有界，从而$\{(T_nx, x)\}(\forall x\in X)$是单调上升的有界数列，因此它有有限的极限，于是当$n$，$m\to\infty$时，$(T_{nm}x, x)\to 0$．由(8.3.12)式知，

$$\|(T_n - T_m)x\| = \|T_{nm}x\| \to 0 (n, m\to\infty).$$

从而$\{T_nx\}$是X中的基本列，由于X完备，因此$\{T_nx\}$收敛．由定理 7.6.1 知，∃唯一的$T\in\mathscr{B}(X)$，使得

$$T_n \xrightarrow{\text{强}} T.$$

$\forall x, y\in X$，由

$$(Tx, y) = \lim_{n\to\infty}(T_nx, y) = \lim_{n\to\infty}(x, T_ny) = (x, Ty)$$

知，T是X上的自共轭算子．证毕．

定理 8.3.9 设T是 Hilbert 空间X上的正算子，则存在唯一的正算子$S\in\mathscr{B}(X)$，使得 $S^2 = T$，称S为T的正平方根，记为$T^{\frac{1}{2}}$．$T^{\frac{1}{2}}$是T的某一多项式序列在强收敛意义下的极限．于是与T可交换的任何算子必与$T^{\frac{1}{2}}$可交换．

证明 不妨设 $0\leqslant T\leqslant I$，否则用$\|T\|^{-1}T$代替T即可．若T存在正平方根S，则由$T = S^2$得

$$-2S = -T + S^2 - 2S,$$

即

$$2(I-S) = I - T + (I-S)^2.$$

令 $A = I - S, B = I - T$，得到

$$A = \frac{1}{2}(B + A^2). \tag{8.3.13}$$

因此问题归结为证明满足(8.3.13)的算子A存在．我们用迭代法证明这一事实．令

$$A_0=\theta, A_1=\frac{1}{2}(B+A_0^2), \cdots, A_{n+1}=\frac{1}{2}(B+A_n^2), \cdots. \quad (8.3.14)$$

现在用归纳法证明 $\{A_n\}$ 是单调上升的. 显然 A_0, A_1 以及 A_1-A_0都是正算子B的非负实系数多项式, 因此都是正算子. 今设 A_{n-1}, A_n 以及 A_n-A_{n-1} 也都是B的具有非负实系数的多项式, 由(8.3.14)可以看出 A_n, A_{n-1}可交换, 从而

$$A_{n+1}-A_n=\frac{1}{2}(A_n^2-A_{n-1}^2)=\frac{1}{2}(A_n+A_{n-1})(A_n-A_{n-1})$$

也是B的具有非负实系数的多项式, 故为正算子. 至此我们证明了$\{A_n\}$是单调上升的.

其次再用归纳法证明$\|A_n\|\leqslant 1$对 $n=0,1,2,\cdots$成立. 当 $n=0$ 时显然成立. 现设$\|A_n\|\leqslant 1$对某个 $n\in\mathbf{N}$成立, 于是

$$\|A_{n+1}\|\leqslant\frac{1}{2}(\|B\|+\|A_n\|^2)\leqslant 1.$$

因此$\|A_n\|\leqslant 1$ 对一切 $n\in\mathbf{N}$成立, 即$\{A_n\}$一致有界. 由定理8.3.8, $\{A_n\}$强收敛于某一自共轭算子 $A\in\mathscr{B}(X)$. 据此可以证明$\{A_n^2\}$强收敛于A^2. 在等式

$$A_{n+1}x=\frac{1}{2}(B+A_n^2)x \quad (\forall x\in X)$$

中, 令$n\to\infty$, 得

$$Ax=\frac{1}{2}(B+A^2)x,$$

即
$$A=\frac{1}{2}(B+A^2).$$

每个 A_n都是 $B=I-T$ 的多项式, 因此也是T的多项式, 故$S=I-A$是T的多项式序列在强收敛意义下的极限. 由于凡与T可交换的有界线性算子必与T的任一多项式可交换, 因而必与S可交换.

最后证明S的唯一性. 设 S' 也是T的一个正平方根, 即

$S'^2=T$. 由于 $S'T=S'^3=TS'$，即 S' 与 T 可交换. 于是 S' 与 S 可交换. 令 C、C' 分别是 S、S' 按照上面的作法而得到的正平方根. $\forall x\in X$，令 $y=(S-S')x$，则

$$\begin{aligned}\|Cy\|^2+\|C'y\|^2&=(Cy,Cy)+(C'y+C'y)\\&=(C^2y,y)+(C'^2y,y)=(Sy,y)+(S'y,y)\\&=((S+S')y,y)=((S+S')(S-S')x,y)\\&=((S^2-S'^2)x,y)=((T-T)x,y)=0,\end{aligned}$$

从而 $Cy=C'y=\theta$. 于是

$$\begin{aligned}\|y\|^2=(y,y)&=((S-S')x,y)\\&=(C^2x,y)-(C'^2x,y)\\&=(Cx,Cy)-(C'x,C'y)\\&=0,\end{aligned}$$

即 $\forall x\in X$，$Sx=S'x$，因此 $S'=S$. 唯一性成立. 证毕.

推论 8.3.10 设 T 为 Hilbert 空间 X 上的正算子，$x_0\in X$，若 $(Tx_0,x_0)=0$，则 $Tx_0=\theta$.

这是因为

$$0=(Tx_0,x_0)=(T^{\frac{1}{2}}T^{\frac{1}{2}}x_0,\ x_0)=\|T^{\frac{1}{2}}x_0\|^2,$$

即 $T^{\frac{1}{2}}x_0=\theta$，故 $Tx_0=T^{\frac{1}{2}}(T^{\frac{1}{2}}x_0)=\theta$. 证毕.

推论 8.3.11 设 X 是 Hilbert 空间，X 上的自共轭算子 T_1、T_2 满足 $T_1\geqslant T_2$，X 上的正算子 T 与 T_1、T_2 可交换，则 $TT_1\geqslant TT_2$.

这是因为，$\forall x\in X$，

$$\begin{aligned}(TT_1x,x)&=(T_1T^{\frac{1}{2}}x,\ T^{\frac{1}{2}}x)\geqslant(T_2T^{\frac{1}{2}}x,T^{\frac{1}{2}}x)\\&=(TT_2x,x),\end{aligned}$$

所以 $TT_1\geqslant TT_2$.

例 4 在 Hilbert 空间 $L^2(0,1)$ 上考察算子 T：

$$Tx(t)=tx(t),\ \forall x\in L^2(0,1).$$

由于

$$(Tx,x)=\int_0^1 tx(t)\overline{x(t)}dt=\int_0^1 t|x(t)|^2dt\geqslant 0 \quad (\forall x\in L^2(0,1)),$$

所以T是正算子. 定义算子S:

$$Sx(t)=\sqrt{t}\,x(t), \forall x\in L^2(0,1).$$

显然, S也是正算子,而且$\forall x\in L^2(0,1)$,

$$S^2x(t)=S(Sx(t))=S(\sqrt{t}\,x(t))=tx(t)=Tx(t),$$

因此$S^2=T$. 根据平方根的唯一性, S是T的唯一平方根.

*8.3.5 正常算子

定义8.3.4 设X是Hilbert空间,$T\in\mathscr{B}(X)$. 如果$TT^*=T^*T$,则称T是正常算子.

显然自共轭算子是正常算子.

下面举两个正常算子的例子.

例5 设X是 Hilbert 空间,$T\in\mathscr{B}(X)$. 显然,$T+T^*$是自共轭算子,从而也是正常算子.

例6 设X是 Hilbert 空间,M是X的闭子空间,P_1是M上的投影算子,P_2是$M^\perp$上的投影算子. 考虑算子$T=\lambda_1P_1+\lambda_2P_2$,这里$\lambda_1$、$\lambda_2$是复数. 因为$P_1$、$P_2$是自共轭算子,所以$T^*=\overline{\lambda}_1P_1+\overline{\lambda}_2P_2$. 又因为

$$P_1P_2x=P_2P_1x=\theta, \forall x\in X,$$

所以P_1P_2与P_2P_1是零算子,从而有

$$TT^*=|\lambda_1|^2P_1+|\lambda_2|^2P_2=T^*T.$$

因此T是正常算子,容易看出,只有当λ_1、λ_2是实数时,T才是自共轭算子.

例6说明正常算子可以不是自共轭算子. 因此自共轭算子全体只是正常算子类的一个子集.

下面给出正常算子的一个特征性质.

定理 8.3.12 设 X 是 Hilbert 空间, $T\in\mathscr{B}(X)$, 则 T 是正常算子 $\Leftrightarrow \|T^*x\|=\|Tx\|$, $\forall x\in X$.

证明 "$\Rightarrow$": 设 T 是正常算子, 则

$$\begin{aligned}\|Tx\|^2&=(Tx,Tx)=(x,T^*Tx)\\&=(x,TT^*x)=(T^*x,T^*x)\\&=\|T^*x\|^2\quad(\forall x\in X),\end{aligned}$$

即 $\|T^*x\|=\|Tx\|\quad(\forall x\in X)$.

"$\Leftarrow$": 设 $\|T^*x\|=\|Tx\|\quad(\forall x\in X)$, 则

$$\begin{aligned}&((TT^*-T^*T)x,x)=(TT^*x,x)-(T^*Tx,x)\\&=(T^*x,T^*x)-(Tx,Tx)\\&=\|T^*x\|^2-\|Tx\|^2=0\quad(\forall x\in X).\end{aligned}$$

于是, TT^*-T^*T 是零算子, 即 $TT^*=T^*T$. 证毕.

一般, 两个正常算子 T_1、T_2 的和 T_1+T_2 与积 T_1T_2 不是正常算子. 但正常算子 T 与任何 $\alpha\in\mathbb{K}$ 的数乘 αT 是正常算子.

定理 8.3.13 设 T 是 Hilbert 空间 X 上的正常算子, λ 是任一复数, 则 $\lambda I-T$ 是正常算子.

证明 因为 $T^*T=TT^*$, 所以

$$\begin{aligned}&(\lambda I-T)(\lambda I-T)^*=(\lambda I-T)(\bar{\lambda}I-T^*)\\&=|\lambda|^2I-\bar{\lambda}T-\lambda T^*+TT^*\\&=|\lambda|^2I-\bar{\lambda}T-\lambda T^*+T^*T\\&=(\lambda I-T)^*(\lambda I-T).\end{aligned}$$

证毕.

*8.3.6 酉算子

定义 8.3.5 设 X 是 Hilbert 空间, $T\in\mathscr{B}(X)$ 是双射. 如果 $T^*=T^{-1}$, 则称 T 为酉算子.

显然, 酉算子必为正常算子, 反之则不然.

下面给出酉算子的一个特征性质.

定理 8.3.14 T 是 Hilbert 空间 X 上的酉算子 $\Leftrightarrow T$ 是 X 到 X 的满射,且是保范算子,即 $\forall x\in X$, $\|Tx\|=\|x\|$.

证明 "$\Rightarrow$":设 T 是酉算子,由酉算子的定义知 T 是 X 到 X 的满射,且 $T^*=T^{-1}$. 于是

$$\|Tx\|^2=(Tx,Tx)=(x,T^*Tx)=(x,T^{-1}Tx)$$
$$=(x,x)=\|x\|^2 \quad (\forall x\in X)$$

即 $\|Tx\|=\|x\| \quad (\forall x\in X)$.

"$\Leftarrow$":设 T 是 X 到 X 的满射,且是保范算子,于是 $T\in\mathscr{B}(X)$ 是双射,从而 T^{-1} 在全空间 X 上有定义. 又因为

$$((T^*T-I)x,x)=(T^*Tx,x)-(x,x)$$
$$=(Tx,Tx)-(x,x)=0 \quad (\forall x\in X),$$

从而 $T^*T=I$. 于是 $T^*TT^{-1}=T^{-1}$,即 $T^*=T^{-1}$. 因此 T 是酉算子. 证毕.

例 7 在 Hilbert 空间 $L^2[0,2\pi]$ 上作算子 T 如下:

$$Tx(t)=e^{it}x(t) \quad (\forall x\in L^2[0,2\pi]).$$

显然,$T\in\mathscr{B}(L^2[0,2\pi])$ 是双射,并且

$$T^{-1}x(t)=e^{-it}x(t) \quad (\forall x\in L^2[0,2\pi]).$$

又

$$(Tx,y)=\int_0^{2\pi} e^{it}x(t)\,\overline{y(t)}dt=\int_0^{2\pi} x(t)\,\overline{e^{-it}y(t)}dt$$
$$=(x,e^{-it}y) \quad (\forall x,y\in L^2[0,2\pi]),$$

从而得到 T 的共轭算子 T^*:

$$T^*x(t)=e^{-it}x(t) \quad (\forall x\in L^2[0,2\pi]).$$

因此 $T^*=T^{-1}$,即 T 是酉算子.

习 题 8.3

1. 试求下列 l^2 上算子的共轭算子:

(1) $T:(x_1,x_2,\cdots)\mapsto(0,x_1,x_2,\cdots)$;

(2) $T:(x_1,x_2,\cdots)\mapsto(x_2,x_3,\cdots)$;

(3) $T:(x_1,x_2,\cdots)\mapsto(\alpha_1x_1,\alpha_2x_2,\cdots)\quad(\alpha_i\in\mathbb{K})$;

(4) $T:(x_1,x_2,\cdots)\mapsto(x_1,x_2,\cdots,x_n,0,\cdots)$;

(5) $T:(x_1,x_2,\cdots)\mapsto(\underbrace{0,\cdots,0}_{n-1\text{个}},x_1,0,\cdots)$;

(6) $T:(x_1,x_2,\cdots)\mapsto(\alpha_nx_n,\alpha_{n+1}x_{n+1},\cdots)\quad(\alpha_n\in\mathbb{K})$.

2. 试求下列 $L^2(-\infty,+\infty)$ 上算子的共轭算子:

(1) $T:x(t)\mapsto x(t+h)$;

(2) $T:x(t)\mapsto x(t)x(t+h)$;

(3) $T:x(t)\mapsto\frac{1}{2}[x(t)+x(-t)]$.

3. 第1题与第2题中,哪些算子是自共轭的?

4. 若 T 是 Hilbert 空间 X 上的自共轭算子且可逆, 则 T^{-1} 也是自共轭算子.

5. 设 X 是 Hilbert 空间, $T\in\mathscr{B}(X)$, $\{e_n\}$ 是 X 中的完备标准正交系, 若 $\forall m,n\in\mathbb{N}$, 有 $(Te_n,e_m)=\overline{(Te_m,e_n)}$, 则 T 是自共轭的.

6. 设 P 是 Hilbert 空间 X 的闭子空间 M 上的投影算子, 则 $Px=x\Leftrightarrow x\in M$; $Px=\theta\Leftrightarrow x\in M^{\perp}$.

7. 设 $\{e_k\}(k=1,2,\cdots)$ 是 Hilbert 空间 X 中的标准正交系, $M=\overline{\text{span}\{e_k\}}$, 则 X 到 M 上的投影算子 P 可表成

$$Px=\sum_{k=1}^{\infty}(x,e_k)e_k,\ \forall x\in X.$$

8. 设 P 与 Q 分别是Hilbert 空间 X 到闭子空间 V 与 W 上的投影算子, 则下列诸条件等价:

(1) $Q-P$ 是投影算子;

(2) $Q-P$ 是正算子;

(3) $\|Px\|\leqslant\|Qx\|,\forall x\in X$;

(4) $V\subset W$;

(5) $QP=P$;

(6) $PQ=P$.

9. 设 X 是复 Hilbert 空间, $T\in\mathscr{B}(X)$. 则 $T=-T^*\Leftrightarrow\forall x\in X$, $\text{Re}(Tx,x)$

$=0$.

10. 设 T 是 Hilbert 空间 X 上的正常算子，则 $\forall n\in\mathbf{N}$，有

$$\|T^n\|=\|T\|^n.$$

11. 设 X 是 Hilbert 空间，$T\in\mathscr{B}(X)$，$|\alpha|+|\beta|=1$，则 $\alpha T+\beta T^*$ 是正常算子.

12. T 为 Hilbert 空间 X 上的正常算子 $\Leftrightarrow T$ 可表为 $T=T_1+iT_2$，其中 T_1、T_2 为可交换的自共轭算子.

13. 第 1 题与第 2 题中，哪些算子是酉算子？

14. 设 X 是 Hilbert 空间，$T\in\mathscr{B}(X)$，则 T 是酉算子 $\Leftrightarrow T^*$ 是酉算子.

*第九章　线性算子的谱

谱论是线性代数中矩阵特征值理论的自然推广，它是线性泛函分析中算子理论的重要内容. 一般情况下，为了弄清楚一个线性算子的结构形式，首先需要研究它的谱性质.

§9.1　有界线性算子的谱

9.1.1　谱的概念

本章中用 $\mathbb{C}$ 表示复数域，并且假定所讨论的空间一般都是复的.

考察 n 个未知数的线性方程组：

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=y_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=y_2,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=y_n. \end{aligned}\right\} \tag{9.1.1}$$

其中，$a_{ij}, x_j, y_i\in\mathbb{C}(i, j=1, 2, \cdots, n)$. 记 $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，$y=(y_1, y_2, \cdots, y_n)$. 用 A 表示方程组(9.1.1)的系数矩阵 $(a_{ij})_{n\times n}$ 所对应的线性算子，则 $A\in\mathscr{B}(\boldsymbol{R}^n)$，并且方程组(9.1.1)可以写成

$$Ax=y.$$

对于 $\lambda\in\mathbb{C}$，若存在 $x\neq\theta$，使得

$$Ax=\lambda x,$$

则称 λ 是 A 的特征值. 它意味着 $(A-\lambda I)x=\theta$ 有非零解，即算子 $(A-\lambda I)$ 不存在逆算子. 因此，我们为了弄清楚算子 A 的特征值，必须考察算子 $(A-\lambda I)$ 是否有逆算子的问题.

现在我们转向讨论无限维空间的情形.

定义 9.1.1 设X是复赋范线性空间，$T\in\mathscr{B}(X)$，$\lambda\in\mathbb{C}$. 如果算子$T-\lambda I$是正则的，则称λ是算子T的正则点，T的正则点全体称为T的正则集或豫解集，记为$\rho(T)$. 当$\lambda\in\rho(T)$时，称$(T-\lambda I)^{-1}$是T的豫解算子，记为$R_\lambda(T)$或R_λ. 不是正则点的复数λ称为T的谱点，其全体称为T的谱，记为$\sigma(T)$.

显然，$\rho(T)\cup\sigma(T)=\mathbb{C}$, $\rho(T)\cap\sigma(T)=\varnothing$.

从方程

$$(T-\lambda I)x=y \tag{9.1.2}$$

求解问题的角度来看，T的正则点、谱点的意义如下：

(1) 如果$\lambda\in\rho(T)$，那末$(T-\lambda I)^{-1}$就是定义在全空间X上的有界线性算子. 这等价于(9.1.2)对任何$y\in X$，有唯一解

$$x=(T-\lambda I)^{-1}y,$$

而且当$y_n\to y$时，解$x_n=(T-\lambda I)^{-1}y_n\to$解$x=(T-\lambda I)^{-1}y$（即解$x$连续地依赖于自由项$y$）.

(2) 当$\lambda\in\sigma(T)$时，方程(9.1.2)的可解性以及解的情况非常复杂，可分下列三种情形：

(i) $T-\lambda I$不是单射，即相应于(9.1.2)的齐次方程

$$(T-\lambda I)x=\theta \tag{9.1.3}$$

有非零解，即$\exists x_0\in X$, $x_0\neq\theta$，使得

$$(T-\lambda I)x_0=\theta,$$

这时，称λ是T的特征值，称x_0是T的相应于λ的特征向量，并称T的相应于λ的特征向量全体所张成的线性子空间是T相应于特征值λ的特征子空间，记为$\Phi_\lambda(T)$或Φ_λ，显然

$$\Phi_\lambda(T)=\{x\in X\mid(T-\lambda I)x=\theta\},$$

因此，$\Phi_\lambda(T)$是X的闭子空间. T的特征值全体称为T的点谱，记为$\sigma_p(T)$.

(ii) $\lambda\in\sigma(T)-\sigma_p(T)$，然而$\mathscr{R}(T-\lambda I)\neq X$. 这时，$T-\lambda I$虽

是单射，但 $\mathscr{D}((T-\lambda I)^{-1})\neq X$. 它等价于齐次方程(9.1.3)虽没有非零解，但方程(9.1.2)并不是对任何 $y\in X$ 都可解.

(iii) $\lambda\in\sigma(T)-\sigma_p(T)$，并且 $\mathscr{R}(T-\lambda I)=X$，然而 $(T-\lambda I)^{-1}$ 并不是有界的，它等价于方程(9.1.2)虽对任何 $y\in X$ 有唯一解 x，但 x 并不连续地依赖于 y.

(ii)、(iii) 两类谱点合称为 T 的连续谱，记为 $\sigma_c(T)$.

由逆算子定理知，当 X 是 Banach 空间时，(iii) 的情况不会出现.

下面举几个例子.

例 1 在 l^2 中作"右移"算子

$$Tx=(0,x_1,x_2,\cdots),\ \forall x=(x_1,x_2,\cdots)\in l^2.$$

显然 $T\in\mathscr{B}(l^2)$. 我们证明 $\sigma_p(T)=\varnothing$.

当 $\lambda=0$ 时，由 $Tx=(0,x_1,x_2,\cdots)=\theta$，立即可知 $x_1=x_2=\cdots=0$，即 $x=\theta$.

当 $\lambda\neq 0$ 时，由

$$\begin{aligned}\theta=(T-\lambda I)x&=(0,x_1,x_2,\cdots)-(\lambda x_1,\lambda x_2,\lambda x_3,\cdots)\\&=(-\lambda x_1,x_1-\lambda x_2,x_2-\lambda x_3,\cdots)\end{aligned}$$

可知 $x_1=x_2=\cdots=0$，即 $x=\theta$. 因此 $\sigma_p(T)=\varnothing$.

此外，容易看出，算子 T 的值域不会充满 l^2，因为 Tx 的第一个坐标都是 0，因此 $0\in\sigma_c(T)$. 证毕.

例 2 设 $T: C[0,1]\to C[0,1]$ 是乘法算子，即

$$Tx(t)=tx(t),\ \forall x(t)\in C[0,1],$$

则 $T\in\mathscr{B}(C[0,1])$，并且 $\sigma(T)=\sigma_c(T)=[0,1]$.

证明 $T\in\mathscr{B}(C[0,1])$ 是显然的. 我们先证明 $\sigma(T)\subset[0,1]$. $\forall\lambda\overline{\in}[0,1]$，容易看出 $T-\lambda I$ 是 $C[0,1]$ 到 $C[0,1]$ 的双射，由逆算子定理，$(T-\lambda I)^{-1}$ 是 $C[0,1]$ 上的有界线性算子，从而 $\lambda\in\rho(T)$，即 $\lambda\overline{\in}\sigma(T)$，因此 $\sigma(T)\subset[0,1]$.

再证$[0,1]\subset\sigma_c(T)$. $\forall\lambda\in[0,1]$,方程

$$(T-\lambda I)x(t)=0,$$

即方程

$$(t-\lambda)x(t)=0$$

只有零解$x(t)\equiv 0(\forall t\in[0,1])$,但$\mathscr{R}(T-\lambda I)\neq C[0,1]$,例如$x(t)\equiv 1\in C[0,1]$,而$1\bar{\in}\mathscr{R}(T-\lambda I)$.因此$\lambda\in\sigma_c(T)$,即$[0,1]\subset\sigma_c(T)$.再由

$$[0,1]\subset\sigma_c(T)\subset\sigma(T)\subset[0,1]$$

就知道 $\sigma(T)=\sigma_c(T)=[0,1]$. 证毕.

例 3 设l_0是l^1中只有有限个坐标不为0的复数列全体按l^1的范数所成的赋范线性空间. 令

$$Tx=\left(x_1,\ \frac{x_2}{2},\cdots,\frac{x_n}{n},\ 0,0,\cdots\right),$$

$$\forall x=(x_1,x_2,\cdots,x_n,0,0,\cdots)\in l_0.$$

显然$T\in\mathscr{B}(l_0)$,并且T^{-1}存在, T^{-1}的定义域是l_0,

$$T^{-1}x=(x_1,2x_2,\cdots,nx_n,0,0,\cdots),$$

$$\forall x=(x_1,x_2,\cdots,x_n,0,0,\cdots)\in l_0.$$

T^{-1}作为l_0上的线性算子是无界的. 事实上,

$$\|T^{-1}\|=\sup_{\|x\|=1}\|T^{-1}x\|\geqslant\|T^{-1}e_n\|$$

$$=\|(0,0,\cdots,n,0,0,\cdots)\|=n,$$

其中$e_n=(\underbrace{0,0,\cdots,0}_{n-1\text{个}},1,0,\cdots)$. 因此0是$T$的第三类谱点.

9.1.2 有界线性算子的谱性质

从上面的讨论可以看出,谱的性质依赖于所考虑算子的定义空间及算子的类型,本节主要讨论定义在复Banach空间上的有界线性算子的谱性质.

定理 9.1.1 设X是复 Banach空间,$T\in\mathscr{B}(X)$. 如果$\|T\|<1$,则$I-T$有定义在全空间X上的有界逆算子

$$(I-T)^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty}T^k=I+T+T^2+\cdots+T^k+\cdots,$$

(这里$T^0=I$)并且$\|(I-T)^{-1}\|\leqslant\frac{1}{1-\|T\|}$.

证明 因为X是 Banach 空间,所以$\mathscr{B}(X)$是 Banach 空间. 由定理 7.1.8 知,$\|T^2\|\leqslant\|T\|^2$,从而$\|T^n\|\leqslant\|T\|^n$. 又$\|T\|<1$,于是$\sum\limits_{k=0}^{\infty}\|T^k\|\leqslant\sum\limits_{k=0}^{\infty}\|T\|^k<+\infty$. 记$S_n=\sum\limits_{k=0}^{n}T^k$,则$S_n$是 Banach 空间$\mathscr{B}(X)$中的基本列,设$S_n\to T_0\in\mathscr{B}(X)$,则$T_0=\sum\limits_{k=0}^{\infty}T^k$. 经过简单验算就知道

$$(I-T)S_n=S_n(I-T)=I-T^{n+1}.$$

在上式中令$n\to\infty$,并注意到$T^{n+1}\to\theta$,就得到

$$(I-T)T_0=T_0(I-T)=I.$$

因此

$$T_0=(I-T)^{-1}=I+T+T^2+\cdots+T^k+\cdots,$$

并且

$$\|(I-T)^{-1}\|\leqslant\sum_{k=0}^{\infty}\|T^k\|\leqslant\sum_{k=0}^{\infty}\|T\|^k=\frac{1}{1-\|T\|}.$$ 证毕.

推论 9.1.2 设X是复 Banach 空间,$T\in\mathscr{B}(X)$具有有界逆算子,则$\forall\Delta T\in\mathscr{B}(X)$,当$\|\Delta T\|<\|T^{-1}\|^{-1}$时,算子$S=T+\Delta T$也有有界的逆算子$S^{-1}$,且

$$S^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty}(-T^{-1}\Delta T)^kT^{-1}.$$

证明 因$S=T+\Delta T=T(I+T^{-1}\Delta T)$,且$\|T^{-1}\Delta T\|\leqslant\|T^{-1}\|\cdot\|\Delta T\|<1$,由定理9.1.1,$I+T^{-1}\Delta T$有有界逆算子$(I+T^{-1}\Delta T)^{-1}$.

容易验证$(I+T^{-1}\Delta T)^{-1}T^{-1}$便是$S$的逆算子. 其实

$$S(I+T^{-1}\Delta T)^{-1}T^{-1}=T(I+T^{-1}\Delta T)(I+T^{-1}\Delta T)^{-1}T^{-1}$$
$$=TT^{-1}=I,$$

同理$(I+T^{-1}\Delta T)^{-1}T^{-1}S=I$. 再由定理 9.1.1 就得到

$$S^{-1}=(I+T^{-1}\Delta T)^{-1}T^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty}(-T^{-1}\Delta T)^k T^{-1}.$$ 证毕.

定理 9.1.3 设X是复 Banach 空间, $T\in\mathscr{B}(X)$, 则

(1) 当$|\lambda|>\|T\|$时, $\lambda\in\rho(T)$, 且相应的豫解算子 R_λ 按算子范数收敛的意义可展成如下级数:

$$R_\lambda=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{T^n}{\lambda^{n+1}},$$

R_λ 的范数满足不等式

$$\|R_\lambda\|\leqslant\frac{1}{|\lambda|-\|T\|};$$

(2) 设$\lambda\in\rho(T)$, 当$|\Delta\lambda|<\frac{1}{\|R_\lambda\|}$时, $\mu=\lambda+\Delta\lambda\in\rho(T)$, 且 R_μ 按算子范数收敛的意义可展成如下的级数:

$$R_\mu=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}(\mu-\lambda)^n R_\lambda^{n+1};$$

(3) $\rho(T)$是开集, $\sigma(T)$是有界闭集.

证明 (1) 当$|\lambda|>\|T\|$时, 有$\frac{\|T\|}{|\lambda|}<1$, 由定理 9.1.1, $I-\frac{1}{\lambda}T$ 有有界逆算子, 从而$-\lambda\left(I-\frac{1}{\lambda}T\right)=T-\lambda I$ 有有界逆算子, 故$\lambda\in\rho(T)$, 并且

$$R_\lambda=(T-\lambda I)^{-1}=\left[-\lambda\left(I-\frac{1}{\lambda}T\right)\right]^{-1}$$

$$=-\frac{1}{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{T}{\lambda}\right)^n=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{T^n}{\lambda^{n+1}},$$

$$\|R_\lambda\|\leqslant\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{|\lambda|}\left(\frac{\|T\|}{|\lambda|}\right)^n=\frac{1}{|\lambda|}\ \frac{1}{1-\frac{\|T\|}{|\lambda|}}$$

$$=\frac{1}{|\lambda|-\|T\|}.$$

(2) 因 $\lambda\in\rho(T)$，所以 $T-\lambda I$ 是正则算子．又

$$T-\mu I=T-\lambda I-\Delta\lambda I,\ 且\|-\Delta\lambda I\|=|\Delta\lambda|<\frac{1}{\|R_\lambda\|},$$

据推论 9.1.2，$T-\mu I$ 是正则算子，从而 $\mu\in\rho(T)$，并且

$$R_\mu=\sum_{n=0}^{\infty}[-R_\lambda(-\Delta\lambda I)]^n R_\lambda=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}(\mu-\lambda)^n R_\lambda^{n+1}.$$

(3) 由(2)，$\rho(T)$的每一个点都是内点，从而 $\rho(T)$是复平面 $\mathbb{C}$ 上的开集，因此 $\sigma(T)=\mathbb{C}-\rho(T)$ 是复平面 $\mathbb{C}$ 上的闭集．又 $\sigma(T)\subset\{\lambda\in\mathbb{C}\,\big|\,|\lambda|\leqslant\|T\|\}$，故 $\sigma(T)$是有界闭集．证毕．

例 4 在 l^1 中定义算子 T 如下：

$$Tx=(0,-x_1,-x_2,\cdots,-x_{n-1},\cdots),$$
$$\forall x=(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)\in l^1.$$

试研究 T 的谱．

T 显然是线性算子，因为

$$\|Tx\|=\|x\|=\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|,\ \forall x=(x_1,x_2,\ \cdots)\in l^1,$$

所以 $T\in\mathscr{B}(l^1)$，且$\|T\|=1$．

(1) 当$|\lambda|>\|T\|=1$时，$\lambda\in\rho(T)$．

(2) 如果$(T-\lambda I)x=\theta$，即

$$(-\lambda x_1,-x_1-\lambda x_2,\cdots,-x_{n-1}-\lambda x_n,\cdots)=\theta,$$

分以下两种情况讨论：

(i) 当 $\lambda=0$ 时，可推知 $x_1=x_2=\cdots=x_n=\cdots=0$.

(ii) 当 $\lambda\neq0$ 时，也可推知 $x_1=x_2=\cdots=x_n=\cdots=0$.

总之，不论哪一种情况，都得 $x=\theta$，因此 $\sigma_p(T)=\varnothing$.

(3) 当 $|\lambda|\leqslant1$ 时，由(2)，$T-\lambda I$ 是单射. 分以下两种情形讨论：

(i) 当 $\lambda=0$ 时，显然 $(T-\lambda I)(l^1)=T(l^1)\neq l^1$.

(ii) 当 $0<|\lambda|\leqslant1$ 时，任取一复数 $a\neq0$，则 $y=(a,0,0,\cdots)\in l^1$，假如 $\exists x=(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)\in l^1$，使得

$$(T-\lambda I)x=y,$$

则有

$$(a,0,0,\cdots,0,\cdots)=(-\lambda x_1,-x_1-\lambda x_2,-x_2-\lambda x_3,\cdots,-x_{n-1}-\lambda x_n,\cdots),$$

从而可推知

$$x_1=-\frac{a}{\lambda},\ x_2=(-)^2\frac{a}{\lambda^2},\cdots,\ x_n=(-1)^n\frac{a}{\lambda^n},\cdots.$$

于是

$$\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a|}{|\lambda|^n}\text{发散}\left(\frac{1}{|\lambda|}\geqslant1\right).$$

这说明 $x\overline{\in}l^1$. 所得矛盾说明不存在 $x\in l^1$，使得

$$(T-\lambda I)x=y.$$

即 $(T-\lambda I)(l^1)\neq l^1$.

因此，$\{\lambda\in\mathbf{C}\,\big|\,|\lambda|\leqslant1\}\subset\sigma_c(T)$.

综上所述，$\rho(T)=\{\lambda\in\mathbf{C}\ |\lambda|>1\}$，$\sigma(T)=\sigma_c(T)=\{\lambda\in\mathbf{C}\,\big|\,|\lambda|\leqslant1\}$. 显然，$\rho(T)$ 是复平面 $\mathbf{C}$ 上的开集，$\sigma(T)$ 是复平面 $\mathbf{C}$ 上的有界闭集. 证毕

习 题 9.1

1. 赋范线性空间 X 上的恒等算子 I 的特征值与相应的特征子空间是什么?并求出 $\sigma(T)$ 和 $R_\lambda(T)$.

2. 设 $X=C[0,2\pi]$, $Tx(t)=e^{it}x(t)$, $\forall x\in X$. 证明 $\sigma(T)=\{\lambda\in\mathbf{C}\,\big|\,|\lambda|=1\}$.

3. 设 $X=C[0,1]$, $x_0\in X$, $Tx=x_0x$, $\forall x\in X$, 求 $\sigma(T)$.

4. 设 T 是 l^2 上如下的算子:

$$T:(x_1,x_2,\cdots)\mapsto(x_2,x_3,\cdots).$$

求证: $\sigma_p(T)=\{\lambda\in\mathbf{C}\,\big|\,|\lambda|<1\}$, $\sigma_c(T)=\{\lambda\in\mathbf{C}\,\big|\,|\lambda|=1\}$, 并且 $\sigma(T)=\sigma_p(T)\cup\sigma_c(T)$.

5. 设 F 是复平面 $\mathbf{C}$ 上的有界无穷闭集, $\{\alpha_n\}$ 是 F 的稠密子集, 在 l^1 中定义算子 T 如下:

$$T:(x_1,x_2,\cdots)\mapsto(\alpha_1x_1,\alpha_2x_2,\cdots).$$

则 $\alpha_n(n=1,2,\cdots)$ 都是 T 的特征值, $\sigma(T)=F$, $F-\{\alpha_n\}$ 中每个点是 T 的连续谱.

6. 设 X 是 Banach 空间, $T\in\mathscr{B}(X)$, $\lambda_0\in\rho(T)$. 又设 $T_n\in\mathscr{B}(X)$ $(n=1,2,\cdots)$, 且 $\|T_n-T\|\to0$, 则当 n 充分大后, T_n 也以 λ_0 为正则点.

7. 设 X 是 Hilbert 空间, $T\in\mathscr{B}(X)$, T^* 为 T 的共轭算子, 则 $\sigma(T^*)=\{\lambda\in\mathbf{C}\,|\,\bar{\lambda}\in\sigma(T)\}$.

§9.2 全连续算子的谱

9.2.1 全连续算子的定义和基本性质

定义 9.2.1 设 X、Y 都是赋范线性空间, T 是 X 到 Y 中的线性算子, 如果 T 把 X 中的任何有界集映成 Y 中的列紧集, 则称 T 是全连续线性算子, 简称全连续算子.

由于赋范线性空间中的列紧集是有界的, 所以全连续算子是有界(连续)线性算子.

例 1 设 X、Y 是赋范线性空间, $T\in\mathscr{B}(X,Y)$, 如果 TX 是有限维的, 则 T 是全连续算子.

事实上，设M是X中的任一有界集，因T有界，从而TM是Y中的有界集，又$TM\subset TX$，而TX是Y的有限维子空间，故TM是列紧的，即T是全连续算子.

例 2 设$K(s,t)$是$a\leqslant s\leqslant b$，$a\leqslant t\leqslant b$上二元连续函数，作$C[a,b]$到$C[a,b]$的算子T如下：

$$(T\varphi)(s)=\int_a^b K(s,t)\varphi(t)dt,\ \varphi\in C[a,b].$$

今证T是$C[a,b]$上的全连续算子. 事实上，设M是$C[a,b]$中任一有界集，即$\exists L>0$，使当$\varphi\in M$时，$\|\varphi\|\leqslant L$. 由此得到

$$\begin{aligned}|(T\varphi)(s_1)-(T\varphi)(s_2)|&\leqslant\int_a^b|K(s_1,t)-K(s_2,t)||\varphi(t)|dt\\&\leqslant L\int_a^b|K(s_1,t)-K(s_2,t)|dt.\end{aligned}$$

因为$K(s,t)$是二元连续函数，所以$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，使得当$|s_1-s_2|<\delta$时，

$$|K(s_1,t)-K(s_2,t)|<\frac{\varepsilon}{L(b-a)}.$$

于是$\forall\varphi\in M$，有

$$|(T\varphi)(s_1)-(T\varphi)(s_2)|<\varepsilon,$$

所以，TM是$C[a,b]$中等度连续的集. 又因为TM显然是$C[a,b]$中的有界集，据 Arzela-Ascoli 定理，TM是$C[a,b]$中的列紧集，即T是全连续算子. 证毕.

以下用$\mathscr{C}(X,Y)$表示赋范线性空间X到赋范线性空间Y的全连续算子全体，用$\mathscr{C}(X)$表示赋范线性空间X到X的全连续算子全体.

定理 9.2.1 设X、Y是赋范线性空间，则$\mathscr{C}(X,Y)$是赋范线性空间$\mathscr{B}(X,Y)$的线性子空间. 如果Y还是 Banach 空间，则$\mathscr{C}(X,Y)$是 Banach 空间$\mathscr{B}(X,Y)$的闭线性子空间.

证明 设 $T, S\in\mathscr{C}(X,Y)$，今证 $T+S\in\mathscr{C}(X,Y)$．任取 X 中一有界集 M，对 $(T+S)M$ 中任何一个点列 $\{(T+S)f_n\}$ $(f_n\in M, n=1,2,\cdots)$，由于 TM 是列紧的，所以 $\{Tf_n\}$ 有收敛子列 $\{Tf_{n_i}\}$．又由于 SM 是列紧的，所以 $\{Sf_{n_i}\}$ 又有收敛子列 $\{Sf_{n_{i_k}}\}$．从而 $\{(T+S)f_n\}$ 的子列 $\{(T+S)f_{n_{i_k}}\}$ 是收敛的．所以 $(T+S)M$ 是列紧集．因此 $T+S\in\mathscr{C}(X, Y)$．类似地可以证明，$\forall\alpha\in\mathbb{C}$，$\alpha T\in\mathscr{C}(X,Y)$．这样便得到 $\mathscr{C}(X,Y)$ 是 $\mathscr{B}(X, Y)$ 的线性子空间．

当 Y 是 Banach 空间时，$\mathscr{B}(X, Y)$ 是 Banach 空间．要证明 $\mathscr{C}(X,Y)$ 是 $\mathscr{B}(X,Y)$ 的闭子空间，就是要证明：如果 $T_n\in\mathscr{C}(X, Y)$ $(n=1,2,\cdots)$，而且 $\exists T_0\in\mathscr{B}(X,Y)$，使得 $\|T_n-T_0\|\to 0$ 时，必有 $T_0\in\mathscr{C}(X,Y)$．事实上，设 M 是 X 中任一有界集，并记 $L=\sup\limits_{x\in M}\|x\|$．$\forall\varepsilon>0$，由于 $\|T_n-T_0\|\to 0$，因而 $\exists n_0\in\mathbb{N}$，使得 $\|T_{n_0}-T_0\|<\dfrac{\varepsilon}{L+1}$．于是，$\forall x\in M$，

$$\|T_{n_0}x-T_0x\|\leqslant\|T_{n_0}-T_0\|\,\|x\|<\varepsilon.$$

因此列紧集 $T_{n_0}M$ 是 T_0M 的一个 ε-网．又因为 Y 是 Banach 空间，据推论 6.7.6，T_0M 是 Y 中的列紧集，即 $T_0\in\mathscr{C}(X,Y)$．证毕．

例 3 设 $K(s, t)$ 是 $[a, b]\times[a, b]$ 上的平方可积函数，令

$$(Tx)(s)=\int_a^b K(s, t)x(t)dt \quad (\forall x\in L^2[a, b]),$$

则 T 是全连续线性算子．

证明 由 §7.5 例 5 知 $T\in\mathscr{B}(L^2[a, b])$．今证明 T 是全连续的．

1° 先设 $K(s, t)$ 是连续的，并设 A 是 $L^2[a, b]$ 中的任一有界集．$\forall x\in A$，

$$|Tx(s)|=\left|\int_a^b K(s, t)x(t)dt\right|$$

$$\leqslant\left(\int_a^b |K(s,t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_a^b |x(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=\left(\int_a^b |K(s,t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}\|x\|,$$

$$|Tx(s_1)-Tx(s_2)|=\left|\int_a^b (K(s_1,t)-K(s_2,t))x(t)dt\right|$$

$$\leqslant\left(\int_a^b |K(s_1,t)-K(s_2,t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}\|x\|.$$

由于 $K(s,t)$ 在 $[a,b;a,b]$ 上一致连续，因而上面两式说明 TA 是 $C[a,b]$ 中有界的等度连续集，据 Arzela-Ascoli 定理，TA 是 $C[a,b]$ 中的列紧集，从而 TA 也是 $L^2[a,b]$ 中的列紧集，因此 T 是全连续的。

2° 设 $K(s,t)\in L^2[a,b;\ a,b]$，据定理 6.4.5 及其注，必有 $[a,b;a,b]$ 上的连续函数列 $\{K_n(s,t)\}$ $(n=1,2,\cdots)$，使得

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b\int_a^b |K_n(s,t)-K(s,t)|^2 dt\,ds=0.$$

考虑算子列 T_n：

$$T_n x(s)=\int_a^b K_n(s,t)x(t)dt \quad (\forall x\in L^2[a,b]),\ n=1,2,\cdots.$$

由 1° 所证 T_n 是全连续的，并且

$$\|T_n-T\|\leqslant\left(\int_a^b\int_a^b |K_n(s,t)-K(s,t)|^2 dt\,ds\right)^{\frac{1}{2}}\|x\|\to 0$$

$$(n\to\infty).$$

由定理 9.2.1 知 T 全连续。证毕。

定理 9.2.2 设 X、Y 是赋范线性空间，$T\in\mathscr{C}(X,Y)$，则

(1) TX 是 Y 中的可分集；

(2) 如果 Z 是赋范线性空间，$T_1\in\mathscr{B}(Y,Z)$，$T_2\in\mathscr{B}(Z,X)$，必有 $T_1T\in\mathscr{C}(X,Z)$，$TT_2\in\mathscr{C}(Z,Y)$；

(3) $T^*\in\mathscr{C}(Y^*, X^*)$.

证明 (1) 因为 $X=\bigcup_{n=1}^{\infty}O(\theta, n)$, 并且 $\forall n\in\mathbf{N}$, $TO(\theta, n)$ 是 Y 中列紧集, 由推论 6.7.7, $TO(\theta, n)$ 是可分的, 由此可知 $TX=\bigcup_{n=1}^{\infty}TO(\theta, n)$ 是 Y 中的可分集.

(2) 设 M 是 X 中任一有界集, TM 便是 Y 中的列紧集, 由于 T_1 是连续映射, 据推论 6.7.13, T_1TM 是 Z 中列紧集, 即 $T_1T\in\mathscr{C}(X, Z)$.

同样, 如果 M 是 Z 中任一有界集, 因 T_2 是有界的, 所以 T_2M 是 X 中的有界集, 因而 TT_2M 是 Y 中的列紧集, 即 $TT_2\in\mathscr{C}(Z, Y)$.

(3) 设 $\{\varphi_n\}$ 是 Y^* 中任一有界点列, 今证明必有子列 $\{\varphi_{n_i}\}$, 使得 $\{T^*\varphi_{n_i}\}$ 在 X^* 中按范数收敛. 设 G 是 TX 在 Y 中的闭包, 则 G 是 Y 的闭子空间, 并且是可分的, 所以 G 中有可数的稠密子集 $\{y_k\}$ $(k=1, 2, \cdots)$. 根据 $\{\varphi_n\}$ 是有界点列, 用类似于证明定理 7.6.6 的"对角线"方法, 可从 $\{\varphi_n\}$ 中抽出子列 $\{\varphi_{n_i}\}$ 在 $\{y_k\}$ $(k=1, 2, \cdots)$ 上处处收敛. 由于 $\{\|\varphi_{n_i}\|\}$ 有界, $\{y_k\}$ 在 G 中稠密, 据定理 7.6.2, 存在 G 上的连续线性泛函 φ, 使得 $\forall y\in G$, 有

$$\varphi_{n_i}(y)\to\varphi(y)\quad(i\to\infty). \tag{9.2.1}$$

再按泛函延拓定理, 将 φ 保持范数不变地延拓成 Y 上的连续线性泛函, 仍记为 φ. 今证明

$$\|T^*\varphi_{n_i}-T^*\varphi\|\to 0\quad(i\to\infty). \tag{9.2.2}$$

事实上, 设 S 是 X 的单位球面, 则

$$\|T^*\varphi_{n_i}-T^*\varphi\|=\sup_{x\in S}|\varphi_{n_i}(Tx)-\varphi(Tx)|$$
$$=\sup_{y\in TS}|\varphi_{n_i}(y)-\varphi(y)|.$$

由于 $\{\varphi_n\}$ 是有界点列, φ 是有界泛函, 所以 $\exists M>0$, 使得 $\|\varphi_n\|\leqslant M$

$(n=1,2,\cdots)$，$\|\varphi\|\leqslant M$. $\forall\varepsilon>0$，由于 TS 是列紧的，$\{y_k\}$ 在 G 中稠密，因而在 $\{y_k\}$ 中存在有限个向量，不妨设为 y_1、y_2、$\cdots$、y_m 构成 TS 的 $\frac{\varepsilon}{3(M+1)}$-网. 因此，$\forall x\in S$，必存在某个 $y_{j_0}(1\leqslant j_0\leqslant m)$，使得

$$\|Tx-y_{j_0}\|<\frac{\varepsilon}{3(M+1)}.$$

又由于 $\{y_1,y_2,\cdots,y_m\}\subset G$，据(9.2.1)，对于 y_1、y_2、$\cdots$、y_m，必有 $i_0\in\mathbb{N}$，使当 $i\geqslant i_0$ 时，

$$|\varphi_{n_i}(y_j)-\varphi(y_j)|<\frac{\varepsilon}{3},\ j=1,2,\cdots,m.$$

所以当 $i\geqslant i_0$ 时，$\forall x\in S$，都有

$$\begin{aligned}|\varphi_{n_i}(Tx)-\varphi(Tx)|&\leqslant|(\varphi_{n_i}-\varphi)(Tx-y_{j_0})|\\&\quad+|(\varphi_{n_i}-\varphi)(y_{j_0})|\\&<2M\cdot\frac{\varepsilon}{3(M+1)}+\frac{\varepsilon}{3}<\varepsilon.\end{aligned}$$

因此当 $i\geqslant i_0$ 时，$\sup\limits_{x\in S}|\varphi_{n_i}(Tx)-\varphi(Tx)|\leqslant\varepsilon$，即(9.2.2)式成立；证毕.

下面是定理 9.2.2 的一个重要推论.

推论9.2.3 设 X、Y 是赋范线性空间，$T\in\mathscr{C}(X,Y)$，则 T 必将 X 中弱收敛于 x_0 的点列 $\{x_n\}$ 映成 Y 中强收敛于 Tx_0 的点列 $\{Tx_n\}$.

证明留为习题.

9.2.2 全连续算子的谱

定理 9.2.4 设 X 是复 Banach 空间，$T\in\mathscr{C}(X)$，$\lambda\in\mathbb{C}$，如果 $\mathscr{R}(\lambda I-T)=X$，则 $\lambda\in\rho(T)$.

证明 当 $\dim X<+\infty$ 时，定理的结论是明显的，所以不妨设

$\dim X = +\infty$.

因为 $\mathscr{R}(\lambda I-T)=X$, 我们说必有 $\lambda\neq 0$. 事实上, 如果 $\mathscr{R}(T)=X$, 则由定理 7.4.5(开映射定理)的证明中得到的(7.4.2)式知道, 存在 $a>0$, 使得

$$TB(\theta,a)\supset O(\theta,2)\supset S(\theta,1),$$

其中 $S(\theta,1)=\{x\in X\mid \|x\|=1\}$. 由定理 6.8.4 的充分性证明知, 当 $\dim X=+\infty$时, $S(\theta,1)$不是列紧集, 这与T是全连续的相矛盾, 因而 $\mathscr{R}(T)\neq X$. 即 $\lambda\neq 0$.

要证 $\lambda\in\rho(T)$, 根据逆算子定理, 只要证明 $\lambda I-T$ 是单射就可以了, 即当$(\lambda I-T)x_1=\theta$ 时, 证明必有 $x_1=\theta$.

令

$$E_n=\{x\in X\mid (\lambda I-T)^n x=\theta\}\quad (n=1,2,\cdots).$$

由于$(\lambda I-T)^n$ 是有界线性算子, 因而 $E_n\ (n=1,2,\cdots)$ 都是闭线性子空间. 又显然

$$E_1\subset E_2\subset\cdots\subset E_n\subset\cdots,$$

如果 $E_1\neq\{\theta\}$, 则必有 $x_1\neq\theta, x_1\in E_1$. 根据$(\lambda I-T)X=X$, 必有 $x_2\in X$, 使得 $x_1=(\lambda I-T)x_2$, 依次类推, 有

$$x_{n-1}=(\lambda I-T)x_n,\ n=2,3,\cdots,$$

$x_n\neq\theta\,(n=1,2,\cdots)$. 因为$(\lambda I-T)^{n-1}x_n=x_1$, 所以 $x_n\in E_n$, 并且 $x_n\overline{\in} E_{n-1}$. 根据引理 6.8.3, 在 E_n 中有 y_n, 使得

$$\|y_n\|=1,\ \rho(y_n,\ E_{n-1})>\frac{1}{2},\ n=2,3,\cdots. \qquad (9.2.3)$$

如果 $p>q$ (p, q 为自然数), 从

$$E_{p-1}\supset E_q,\ (\lambda I-T)E_q\subset(\lambda I-T)E_p\subset E_{p-1},$$

得到

$$y_q-\frac{(\lambda I-T)}{\lambda}y_q+\frac{(\lambda I-T)}{\lambda}y_p\in E_{p-1},$$

因此,从(9.2.3)又得到

$$\|Ty_p-Ty_q\|=|\lambda|\left\|y_p-\left(y_q-\frac{(\lambda I-T)}{\lambda}y_q+\frac{(\lambda I-T)}{\lambda}y_p\right)\right\|$$

$$>\frac{1}{2}|\lambda|,$$

这和T是全连续的假设相矛盾. 证毕.

定理 9.2.5 设X是复 Banach 空间, $T\in\mathscr{C}(X)$, $\lambda\in\mathbf{C}$, $\lambda\neq0$. 则$\mathscr{R}(\lambda I-T)$是闭线性子空间.

证明 分以下四步证明.

(1) 假设$\{f_n\}\subset\mathscr{R}(\lambda I-T)$,并且是收敛的点列, g_n 是 f_n 的一个原象,即

$$(\lambda I-T)g_n=f_n \quad n=2,3,\cdots. \tag{9.2.4}$$

如果$\{g_n\}$是有界点列,则$\{g_n\}$必有收敛子列.

事实上,从(9.2.4)得到 $g_n=\frac{1}{\lambda}(f_n+Tg_n)$. 由$\{g_n\}$的有界性,有子列$\{g_{n_i}\}$,使得$\{Tg_{n_i}\}$收敛,从而$\{g_{n_i}\}$本身也收敛.

(2) 设$f\in\mathscr{R}(\lambda I-T)$,我们证明在$\{g|(\lambda I-T)g=f\}$中一切向量$g$的范数的下确界$m=\inf\limits_{(\lambda I-T)g=f}\|g\|$是可达的.

事实上,取$\{g_n\}$,使得

$$(\lambda I-T)g_n=f,\ \|g_n\|\to m(n\to\infty),$$

则$\{g_n\}$是有界点列. 取第(1)步中的$f_n=f(n=1, 2,\cdots)$, 由(1), $\{g_n\}$必有子列$\{g_{n_i}\}$收敛于f'. 再由$(\lambda I-T)$的连续性, 立即得到

$$(\lambda I-T)f'=\lim_{i\to\infty}(\lambda I-T)g_{n_i}=f.$$

显然$\|f'\|=m$,即f'是达到下确界的,并且适合$(\lambda I-T)f'=f$. 当然,对给定的f, 相应的f'不必是唯一的. 以后用f'表示达到上述下确界的某个向量.

(3) 证明存在与任何f无关的常数M,使得$\|f'\|\leqslant M\|f\|$.

假如不对，就有一列$\{f_n\}\subset\mathscr{R}(\lambda I-T)$，使得

$$\|f'_n\|\geqslant n\|f_n\|,\ n=1,2,\cdots,\tag{9.2.5}$$

于是

$$(\lambda I-T)\frac{f'_n}{\|f'_n\|}=\frac{f_n}{\|f'_n\|}\to\theta\quad(n\to\infty).\tag{9.2.6}$$

由第一步知道，必存在$\left\{\frac{f'_n}{\|f'_n\|}\right\}$的收敛子列$\left\{\frac{f'_{n_i}}{\|f'_{n_i}\|}\right\}$，记其极限为$f_0$，从而

$$(\lambda I-T)f_0=\theta.\tag{9.2.7}$$

显然$\|f_0\|=1$. 由(9.2.6)、(9.2.7)就得到

$$(\lambda I-T)(f'_n-\|f'_n\|f_0)=f_n.$$

又因为f'_n是f_n的原象中达到下确界的向量，所以

$$\|f'_n\|\leqslant\|f'_n-\|f'_n\|f_0\|,$$

即

$$\left\|\frac{f'_n}{\|f'_n\|}-f_0\right\|\geqslant 1,$$

这和假设$\frac{f'_{n_i}}{\|f'_{n_i}\|}\to f_0$相矛盾. 所以，必存在$M$，使得

$$\|f'\|\leqslant M\|f\|.$$

(4) 证明$\mathscr{R}(\lambda I-T)$是闭集.

如果$\{f_n\}\subset\mathscr{R}(\lambda I-T)$，$f_n\to f$，则必有正数$C$，使得$\|f_n\|\leqslant C$. 对每个$f_n$，取相应的$f'_n$，由第(3)步，$\|f'_n\|\leqslant M\|f_n\|\leqslant MC$. 再根据第(1)步，可从$\{f'_n\}$中找到子列$\{f'_{n_i}\}$收敛于某个$g$，因而

$$(\lambda I-T)g=\lim_{i\to\infty}(\lambda I-T)f'_{n_i}=\lim_{i\to\infty}f_{n_i}=f,$$

即$\mathscr{R}(\lambda I-T)$是闭集. 证毕.

定理 9.2.6 设X是复 Banach 空间，$T\in\mathscr{C}(X)$，$\lambda\in\mathbf{C}$，$\lambda\neq 0$，而且λ不是T的特征值，则$\lambda\in\rho(T^*)$.

证明 令$L=\mathscr{R}(\lambda I-T)$，据定理 9.2.5，$L$是闭线性子空间.

因为 λ 不是特征值，所以$\lambda I-T$是单射. 视 $\lambda I-T$ 是X到L上的算子，由逆算子定理，存在L到X的有界线性算子 T_λ^{-1}，它是 $\lambda I-T$ 的逆算子.

今证 $\mathscr{R}(\lambda I-T^*)=X^*$. 设 $f\in X^*$，在 L 上作线性泛函 ψ 如下：

$$\psi(x)=f(T_\lambda^{-1}x),\ x\in L. \tag{9.2.8}$$

(ψ 的线性是显然的)，由于

$$|\psi(x)|\leqslant\|f\|\|T_\lambda^{-1}\|\|x\|,$$

所以 ψ 还是连续的. 由泛函延拓定理，将 ψ 延拓到X上，仍记为ψ，因而从

$$\begin{aligned}((\lambda I-T)^*\psi)(y)&=\psi((\lambda I-T)y)=f(T_\lambda^{-1}(\lambda I-T)y)\\&=f(y)\end{aligned}$$

立即得到$(\lambda I-T)^*\psi=f$，即 $\mathscr{R}(\lambda I-T^*)=X^*$.

然而，$T^*\in\mathscr{C}(X^*)$，对 T^*用定理 9.2.4，则 $\lambda\in\rho(T^*)$. 证毕.

下面是 Riesz-Schauder 关于全连续算子的特征值和特征子空间的定理.

定理 9.2.7 设X是复 Banach 空间，$T\in\mathscr{C}(X)$，那末

(1) 当 $\dim X=+\infty$时，$0\in\sigma(T)$；

(2) $\lambda\in\sigma(T)$，如果 $\lambda\neq0$，必有 $\lambda\in\sigma_p(T)$；

(3) $\lambda\in\sigma_p(T)$，如果 $\lambda\neq0$，则相应于 λ 的特征子空间 $\Phi_\lambda(T)$ 是有限维的；

(4) 设 $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots,\ \lambda_n\in\sigma_p(T)$，并且 $\lambda_i\neq\lambda_j(i\neq j,\ i,j=1,2,\ \cdots,\ n)$，$x_i$ 是相应于 λ_i 的特征向量，则 $x_1,\ x_2,\ \cdots,x_n$ 必线性无关；

(5) $\sigma(T)$ 只能以 0 作为极限点，从而 $\sigma(T)$ 或是有限集或是可数集.

证明 (1) 当 $\dim X=+\infty$时，在定理 9.2.4 中已经证明必

有$\mathscr{R}(T)\neq X$，因而$0\in\sigma(T)$.

(2) 因为$\lambda\neq 0$，$\lambda\in\sigma(T)$，根据定理 9.2.5 和定理 9.2.4，$\mathscr{R}(\lambda I-T)$ 是X的真闭线性子空间，从而 $\forall x_0\in X-\mathscr{R}(\lambda I-T)$，$\rho(x_0,\mathscr{R}(\lambda I-T))>0$. 据泛函延拓定理的推论 7.2.5，必有非零泛函 $f\in X^*$，使得

$$f[(\lambda I_X-T)x]=0,\ \forall x\in X,$$

从而

$$(\lambda I_X-T)^*f=(\lambda I_{X^*}-T^*)f=\theta,$$

因此$\lambda\in\sigma_p(T^*)$，自然$\lambda\overline{\in}\rho(T^*)$. 据定理 9.2.6，$\lambda\in\sigma_p(T)$.

(3) 设$\lambda\in\sigma_p(T)$，$\lambda\neq 0$. $\forall x\in\Phi_\lambda(T)$，显然$Tx=\lambda x$，即视$T$为$\Phi_\lambda(T)$空间上算子时，$T$在$\Phi_\lambda(T)$上是$\lambda I$. 如果$\Phi_\lambda(T)$是无限维的，由定理 6.8.4 的充分性证明知$\Phi_\lambda(T)$的单位球面$S$不列紧，所以$\lambda S=TS$也不列紧. 显然，这和假设$T\in\mathscr{C}(X)$相矛盾，因此$\Phi_\lambda(T)$是有限维的.

(4) 如果$x_1,x_2,\cdots,x_n$线性相关，不妨设$x_n=\sum_{i=1}^{n-1}\alpha_i x_i$，其中$\alpha_i\in\mathbb{C}\ (i=1,2,\cdots,n-1)$. 利用

$$(\lambda_i I-T)(\lambda_j I-T)=(\lambda_j I-T)(\lambda_i I-T)$$

便得到

$$\begin{aligned}(\lambda_1-\lambda_n)\cdots(\lambda_{n-1}-\lambda_n)x_n&=(\lambda_1 I-T)\cdots(\lambda_{n-1}I-T)x_n\\&=\sum_{i=1}^{n-1}\alpha_i(\lambda_1 I-T)\cdots(\lambda_{n-1}I-T)x_i=\theta,\end{aligned}$$

然而上式左边$\neq\theta$，这是矛盾，所以$x_1,x_2,\cdots,x_n$线性无关.

(5) 设$\{\lambda_n\}$是T的一列互不相同的特征值，而且$\lambda_n\to\lambda_0\neq 0$. 不妨再设$\lambda_n\neq 0\ (n=1,2,\cdots)$. 因此存在正常数$L$，使得

$$\left|\frac{1}{\lambda_n}\right|<L,\quad n=1,2,\cdots.$$

令 x_n 是相应于 λ_n 的特征向量，$M_n=\mathrm{span}\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$. 由(4)，$M_n\subset M_{n+1}$，而且 $M_n\neq M_{n+1}$，$\dim M_n=n$. 由引理 6.8.3 就得到 $\{y_n\}$，满足

$$y_n\in M_n,\ \|y_n\|=1,\ \rho(y_n,M_{n-1})>\frac{1}{2},\ n=2,3,\cdots. \tag{9.2.9}$$

记 $y_n=\sum\limits_{i=1}^{n}\beta_i^{(n)}x_i,\ \beta_i^{(n)}\in\mathbb{C},\ n=2,3,\cdots,\ i=1,2,\cdots,n$. 显然

$$(\lambda_n I-T)y_n=\sum_{i=1}^{n-1}\beta_i^{(n)}(\lambda_n-\lambda_i)x_i\in M_{n-1},$$

所以 $y_n-T\dfrac{y_n}{\lambda_n}\in M_{n-1}$. 由此可知，当 $n>m$ 时，

$$z=y_n-T\frac{y_n}{\lambda_n}+T\frac{y_m}{\lambda_m}\in M_{n-1},$$

然而 $T\dfrac{y_n}{\lambda_n}-T\dfrac{y_m}{\lambda_m}=y_n-z$，所以

$$\left\|T\frac{y_n}{\lambda_n}-T\frac{y_m}{\lambda_m}\right\|=\|y_n-z\|\geqslant\rho(y_n,\ M_{n-1})>\frac{1}{2}. \tag{9.2.10}$$

但是 $\left\|\dfrac{y_n}{\lambda_n}\right\|\leqslant L$，根据 $T\in\mathscr{C}(X)$，$\left\{T\dfrac{y_n}{\lambda_n}\right\}$ 必有收敛子列 $\left\{T\dfrac{y_{n_i}}{\lambda_{n_i}}\right\}$，这和(9.2.10)相冲突. 所以 $\sigma(T)$ 如有极限点，只能是 0. 证毕.

全连续算子的谱还有一些重要的结果，如 Riesz-Schauder 理论中 T 与 T^* 关系的部分等等，限于篇幅，我们这里就不再介绍了.

习 题 9.2

1. 设 X、Y 是赋范线性空间，$T\in\mathscr{B}(X,Y)$. 如果 X 和 Y 中有一个是有限维的，则 T 是全连续的.

2. 设 X 为 Banach 空间，$T\in\mathscr{C}(X)$，则 $I-T$ 映 X 中的有界闭集为有界闭集.

3. 设X为自反空间，$T\in\mathscr{B}(X)$，且T把X中弱收敛序列映成强收敛序列，则T是全连续的.

4. 设$T:l^2\to l^2$由下式定义：

$$T:(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)\longmapsto\left(x_1,\frac{1}{2}x_2,\cdots,\frac{1}{n}x_n,\cdots\right),$$

则T是全连续线性算子.

5. 证明推论 9.2.3.

6. 设X、Y是 Banach 空间，$T\in\mathscr{B}(X,Y)$，$S\in\mathscr{C}(X,Y)$. 如果$\mathscr{R}(T)\subset\mathscr{R}(S)$，则$T\in\mathscr{C}(X,Y)$.

7. 设$\sum\limits_{j,k=1}^{\infty}|\alpha_{jk}|^2<+\infty$，记$e_n=(\underbrace{0,\cdots,0}_{n-1\text{个}},1,0,\cdots)$，$T$是$l^2$上的线性算子：

$$Te_k=\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_{jk}e_j,\quad k=1,2,\cdots.$$

证明T是全连续算子.

8. 在l^2中取e_n如上题，T是l^2中线性算子：

$$Te_k=\frac{1}{k}e_{k+1},k=1,2,\cdots.$$

证明T是全连续算子，且$\sigma(T)=\{0\}$，$\sigma_p(T)=\varnothing$.

9. 设X是无限维 Banach 空间，$T\in\mathscr{C}(X)$，如果T^{-1}存在，则T^{-1}一定是无界算子.

10. 设X、Y、Z是 Banach 空间，$T_1\in\mathscr{B}(X,Y)$，$T_2\in\mathscr{B}(Y,Z)$，如果T_1，T_2中有一个是全连续的，则$T_2T_1\in\mathscr{C}(X,Z)$.

§9.3 自共轭算子的谱

9.3.1 自共轭算子的谱性质

根据定义 8.3.2，我们这里所讨论的自共轭算子都是定义在 Hilbert 空间上的有界线性算子，因此它的谱除了具有有界线性算子的谱性质外，还具有一些特殊的性质.

定理 9.3.1 设X是复 Hilbert 空间，$T\in\mathscr{B}(X)$是自共轭算

子，记 $G_\lambda=\mathscr{R}(T-\lambda I)$，则

(1) T 的所有特征值都是实数；

(2) T 的不同的特征值所对应的特征向量互相正交；

(3) $\lambda\in\sigma_p(T)\Rightarrow\overline{G}_\lambda=\Phi_\lambda^{\perp}$①, $X=\overline{G}_\lambda\oplus\Phi_\lambda$.

证明 (1) 设 $\lambda\in\sigma_p(T)$，x 是 T 相应于 λ 的特征向量，即有 $Tx=\lambda x, x\neq\theta$，从而

$$(Tx,x)=(\lambda x,x)=\lambda\|x\|^2. \qquad (9.3.1)$$

由定理 8.3.3，(Tx,x) 是实数，因此从 (9.3.1) 式推出 λ 是实数.

(2) 设 $\lambda_1、\lambda_2\in\sigma_p(T)$，$\lambda_1\neq\lambda_2$，$x_1$ 与 x_2 是 T 分别相应于 $\lambda_1、\lambda_2$ 的特征向量，则由 T 的自共轭性及(1)得到

$$\lambda_1(x_1,x_2)=(Tx_1,x_2)=(x_1,Tx_2)=\lambda_2(x_1,x_2).$$

因为 $\lambda_1\neq\lambda_2$，所以 $(x_1,x_2)=0$，即 x_1 与 x_2 正交.

(3) 设 $y\in G_\lambda$，$x\in\Phi_\lambda$，则 $\exists x'\in X$ 使得 $y=(T-\lambda I)x'$，又 $(T-\lambda I)x=\theta$，从而

$$\begin{aligned}(y,x)&=((T-\lambda I)x',x)=(x',(T-\lambda I)x)\\&=(x',\theta)=0.\end{aligned}$$

若 $y\in\overline{G}_\lambda$ 是 G_λ 的极限点，则有 $\{y_n\}\subset G_\lambda$，使得 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=y$. 于是，$\forall x\in\Phi_\lambda$，有 $(y_n,x)=0(n=1,2,\cdots)$，从而

$$(y,x)=\lim_{n\to\infty}(y_n,x)=0.$$

这就是说

$$(y,x)=0 \quad (\forall y\in\overline{G}_\lambda,\forall x\in\Phi_\lambda).$$

因此，$\overline{G}_\lambda\perp\Phi_\lambda$，从而 $(\overline{G}_\lambda)^\perp\supset\Phi_\lambda$.

反之，$\forall x\in(\overline{G}_\lambda)^\perp$，则 $(y,x)=0(\forall y\in\overline{G}_\lambda)$. 因为 $\forall x'\in X$，有

---

① Φ_λ 的意义请见 §9.1 第1段.

$(T-\lambda I)x'\in G_\lambda$，所以

$$(x',(T-\lambda I)x)=((T-\lambda I)x',x)=0.$$

在上式中取 $x'=(T-\lambda I)x$，推出 $(T-\lambda I)x=\theta$，即 $x\in\Phi_\lambda$. 因此又有 $(\overline{G}_\lambda)^\perp\subset\Phi_\lambda$. 于是 $(\overline{G}_\lambda)^\perp=\Phi_\lambda$ 或 $\overline{G}_\lambda=\Phi_\lambda^\perp$，从而 $X=\overline{G}_\lambda\oplus\Phi_\lambda$. 证毕.

定理 9.3.2　设 X 是复 Hilbert 空间，$T\in\mathscr{B}(X)$ 是自共轭算子，则 $\lambda\in\rho(T)\Leftrightarrow\exists C>0$，使得

$$\|(T-\lambda I)x\|\geqslant C\|x\|\quad(\forall x\in X). \tag{9.3.2}$$

证明　"$\Rightarrow$"：设 $\lambda\in\rho(T)$，则 $T-\lambda I$ 有定义在全空间 X 上的有界逆算子 $(T-\lambda I)^{-1}$. 令 $d=\|(T-\lambda I)^{-1}\|$. 则 $\forall x\in X$，有

$$\|x\|=\|(T-\lambda I)^{-1}(T-\lambda I)x\|\leqslant d\|(T-\lambda I)x\|,$$

从而 $\|(T-\lambda I)x\|\geqslant\dfrac{1}{d}\|x\|$.

"$\Leftarrow$"：由条件(9.3.2)容易看出 $T-\lambda I$ 是单射，并且仅当 $x=\theta$ 时 $(T-\lambda I)x=\theta$，因此 λ 不是特征值. 根据逆算子定理，只须证明 $T-\lambda I$ 是满射. 记 $G_\lambda=\mathscr{R}(T-\lambda I)$，我们先证明 $\overline{G}_\lambda=X$. 假如 $\overline{G}_\lambda$ 是 X 的真子集，则必有 $x\in X$，但 $x\overline{\in}\overline{G}_\lambda$. 由于 $\overline{G}_\lambda$ 是 X 的闭线性子空间，据正交分解定理，x 有下列唯一的正交分解：

$$x=x_0+x_1,\ x_0\in\overline{G}_\lambda,\ x_1\in(\overline{G}_\lambda)^\perp,$$

而且 $x_1\neq\theta$. 于是 $\forall y\in X$，有

$$\begin{aligned}0&=(x_1,(T-\lambda I)y)=(x_1,Ty-\lambda y)\\&=(x_1,Ty)-\overline{\lambda}(x_1,y)\\&=(Tx_1,y)-\overline{\lambda}(x_1,y)\\&=((T-\overline{\lambda}I)x_1,y),\end{aligned}$$

从而得到

$$(T-\overline{\lambda}I)x_1=\theta,$$

因此 $\overline{\lambda}$ 是 T 的特征值（x_1 是 T 相应于 $\overline{\lambda}$ 的特征向量）. 据定理

9.3.1, $\bar{\lambda}$ 是实数. 于是 $\lambda=\bar{\lambda}$ 也是 T 的特征值, 这与 λ 不是 T 的特征值矛盾. 因此 $\bar{G}_\lambda=X$.

最后证明 $G_\lambda=\bar{G}_\lambda$. 设 $\{y_n\}\subset G_\lambda\,(n=1,2,\cdots)$, $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=y$. 由 G_λ 的定义,存在 $\{x_n\}\subset X$,使得

$$y_n=(T-\lambda I)x_n,\ n=1,2,\cdots.$$

因此

$$\|y_n-y_m\|=\|(T-\lambda I)(x_n-x_m)\|\geqslant C\|x_n-x_m\|.$$

由此推出 $\{x_n\}$ 是基本列,从 X 的完备性知道, $\exists x\in X$ 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$ 因而

$$(T-\lambda I)x=\lim_{n\to\infty}(T-\lambda I)x_n=\lim_{n\to\infty}y_n=y,$$

即 $y\in G_\lambda$. 所以 G_λ 是闭集. 故 $G_\lambda=\bar{G}_\lambda=X$. 证毕.

定理 9.3.3 **设 X 是复 Hilbert 空间, $T\in\mathscr{B}(X)$ 是自共轭算子,则 T 的谱 $\sigma(T)\subset\mathbf{R}$.**

证明 设 $\lambda=\alpha+i\beta\in\mathbf{C}(\alpha,\beta\in\mathbf{R})$, $y=(T-\lambda I)x\ \ (\forall x\in X)$, 则

$$(x,y)-(y,x)=(\lambda-\bar{\lambda})(x,x)=2i\beta\|x\|^2.$$

从而

$$2|\beta|\|x\|^2\leqslant|(x,y)|+|(y,x)|\leqslant 2\|x\|\|y\|,$$

即

$$\|(T-\lambda I)x\|\geqslant|\beta|\|x\|\quad(\forall x\in X).$$

据定理 9.3.2, 当 $\beta\neq 0$ 时, $\lambda\in\rho(T)$. 因此 $\lambda\in\sigma(T)$ 时,必有 $\beta=0$, 即 T 的谱点 λ 都是实数. 证毕.

定理 9.3.4 **设 X 是复 Hilbert 空间, $T\in\mathscr{B}(X)$ 是自共轭算子, $M=\sup\limits_{\|x\|=1}(Tx,x)$, $m=\inf\limits_{\|x\|=1}(Tx,x)$,则 T 的谱 $\sigma(T)\subset[m,M]$, 并且 $m,M\in\sigma(T)$. 因此,每一个复 Hilbert 空间上的自共轭算子都有非空的谱.**

证明 设 $\lambda > M$, $\forall x \in X$, 则由

$$|((T-\lambda I)x, x)| \leqslant \|(T-\lambda I)x\| \|x\|$$

及

$$\begin{aligned}((T-\lambda I)x, x) &= (Tx, x) - (\lambda x, x) \\ &\leqslant (M-\lambda)\|x\|^2 \\ &= -(\lambda - M)\|x\|^2\end{aligned}$$

推出

$$\|(T-\lambda I)x\| \geqslant (\lambda - M)\|x\|.$$

因此 $\lambda \in \rho(T)$. 同理可证 $\lambda < m$ 时, 也有 $\lambda \in \rho(T)$. 因此 $\sigma(T) \subset [m, M]$.

现在证明 M, $m \in \sigma(T)$. 由于 $T + \mu I (\mu > 0)$ 仍是自共轭算子, 且其下界、上界分别为 $m+\mu$、$M+\mu$, 即 $\sigma(T+\mu I) \subset [m+\mu, M+\mu]$. 因此不失一般性, 可假设 $M \geqslant m \geqslant 0$. 这时, 由定理 8.3.6 知, $M = \|T\|$. 根据 M 的定义, 对于任意取定的正数列 $\{\varepsilon_n\}$, $\varepsilon_n \to 0 \quad (n \to \infty)$, 存在点列 $\{x_n\} \subset X$, $\|x_n\| = 1$, 使得

$$(Tx_n, x_n) > M - \varepsilon_n, n = 1, 2, \cdots.$$

但

$$\|Tx_n\| \leqslant \|T\| \|x_n\| = \|T\| = M,$$

于是有

$$\begin{aligned}\|Tx_n - Mx_n\|^2 &= (Tx_n - Mx_n, Tx_n - Mx_n) \\ &= \|Tx_n\|^2 - 2M(Tx_n, x_n) + M^2\|x_n\|^2 \\ &\leqslant M^2 - 2M(M - \varepsilon_n) + M^2 \\ &= 2M\varepsilon_n,\end{aligned}$$

从而

$$\|Tx_n - Mx_n\| = \|(T - MI)x_n\| \to 0 (n \to \infty).$$

由定理 9.3.2 可以推知 $M \in \sigma(T)$. 类似地可证 $m \in \sigma(T)$. 证毕.

9.3.2 例

例 1 任何 Hilbert 空间 X 上的单位算子 I 是自共轭算子，它的谱仅含一个特征值 1，相应的特征子空间 $\Phi_1=X$. 显然，当 $\lambda\neq 1$ 时，$\lambda\in\rho(I)$，并且 $R_\lambda=(I-\lambda I)^{-1}=(1-\lambda)^{-1}I$.

例 2 在 $L^2[0,1]$ 中作算子 T 如下：

$$Tx(t)=tx(t),\ \forall x\in L^2[0,1].$$

显然 $T\in\mathscr{B}(L^2[0,1])$，并且

$$\begin{aligned}(Tx,y)&=\int_0^1 tx(t)\overline{y(t)}\,dt\\&=\int_0^1 x(t)\overline{ty(t)}\,dt\\&=(x,Ty)\quad(\forall x,y\in L^2[0,1]),\end{aligned}$$

因此 T 是自共轭算子.

现在证明 $\sigma(T)=\sigma_c(T)=[0,1]$. 由于

$$0\leqslant(Tx,x)=\int_0^1 tx(t)\overline{x(t)}=\int_0^1 t|x(t)|^2dt$$

$$\leqslant\int_0^1|x(t)|^2dt=\|x\|^2\quad(\forall x\in L^2[0,1]),$$

所以

$$0\leqslant m=\inf_{\|x\|=1}(Tx,x)\leqslant\sup_{\|x\|=1}(Tx,x)=M\leqslant 1.$$

据定理 9.3.4，$\sigma(T)\subset[0,1]$.

再证 $[0,1]\subset\sigma(T)$. $\forall\lambda\in[0,1]$，按以下方式取一闭区间 $\Delta\subset[0,1]$：

$$\Delta=\begin{cases}[\lambda,\lambda+\varepsilon],\ 0<\varepsilon\leqslant 1-\lambda, & \text{当 }\lambda\in[0,1)\text{ 时},\\ [\lambda-\varepsilon,\lambda],\ 0<\varepsilon\leqslant\lambda, & \text{当 }\lambda=1\text{ 时}.\end{cases}$$

令

$$x_\varepsilon(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}, & t\in\Delta,\\ 0, & t\in[0,1]-\Delta.\end{cases}$$

显然 $x_\varepsilon \in L^2[0,1]$，且 $\|x_\varepsilon\|=1$. 于是

$$\|(T-\lambda I)x_\varepsilon\|^2=\int_0^1 |tx_\varepsilon(t)-\lambda x_\varepsilon(t)|^2dt$$

$$=\frac{1}{\varepsilon}\int_\Delta (t-\lambda)^2dt$$

$$=\frac{\varepsilon^2}{3},$$

因此，当 $\varepsilon\to 0$ 时，$\|(T-\lambda I)x_\varepsilon\|\to 0$. 根据定理 9.3.2，$\lambda\in\sigma(T)$，即 $[0,1]\subset\sigma(T)$. 因此 $\sigma(T)=[0,1]$.

最后证明每个 $\lambda\in\sigma(T)$ 都不是 T 的特征值. 由于

$$(T-\lambda I)x(t)=(t-\lambda)x(t)\quad(\forall x\in L^2[0,1]),$$

如果 $(T-\lambda I)x(t)=\theta$，则 $x(t)=0$ a.e. 于 $[0,1]$，即 $x(t)$ 也是 $L^2[0,1]$ 中的零元素. 所以 λ 不是 T 的特征值，即 $\sigma_p(T)=\varnothing$. 因此 $\sigma(T)=\sigma_c(T)=[0,1]$. 证毕.

习 题 9.3

1. 设 $T:l^2\to l^2$ 定义为

$$T:(x_1,x_2,\cdots)\longmapsto(\lambda_1x_1,\lambda_2x_2,\cdots),$$

其中 $\{\lambda_i\}$ 是有界实数列，$a=\inf\limits_i \lambda_i$，$b=\sup\limits_i \lambda_i$. 证明 λ_i 是 T 的特征值. 在什么条件下有 $\sigma(T)\supset[a,b]$.

2. 利用定理 9.3.2 证明上题中算子 T 的谱集是 T 的特征值集的闭包.

3. 证明定理 9.3.4 中，$m\in\sigma(T)$.

4. 设 X 是复 Hilbert 空间，$T\in\mathscr{B}(X)$ 是自共轭算子，则

$$\sigma(T)\subset\left[\inf_{x\neq\theta}\frac{(Tx,x)}{(x,x)},\ \sup_{x\neq\theta}\frac{(Tx,x)}{(x,x)}\right].$$

§9.4 自共轭全连续算子的谱分解

9.4.1 自共轭全连续算子的谱分解

在本节中恒设 X 是复 Hilbert 空间，$T\in\mathscr{B}(X)$ 是自共轭全连

续线性算子，且 $T\neq\theta$. 仍记 $\Phi_\lambda=\{x\in X\mid(T-\lambda I)x=\theta\}$，$G_\lambda=\mathscr{R}(T-\lambda I)$，其中 $\lambda\in\mathbb{C}$. 在这两个记号下，Φ_0 就是 T 的零子空间，G_0 就是 T 的值域 $\mathscr{R}(T)$.

由§9.2和§9.3的结果可以得到下列四个结论:

1° T 有非零特征值，T 的所有特征值全是实数.

2° T 只有有限个或可数个特征值 λ_n. 如果 T 有可数个特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots$，则 $\lambda_n\to0(n\to\infty)$. T 的对应于每个非零特征值的特征子空间是有限维的.

3° $\Phi_\lambda=G_\lambda^\perp$，当 $\lambda\neq0$ 时，G_λ 是 X 的闭子空间，从而 $X=\Phi_\lambda\oplus G_\lambda$，$X=\Phi_0\oplus\overline{G}_0$.

4° 当 $\lambda_1\neq\lambda_2$ 时，$\Phi_{\lambda_1}\perp\Phi_{\lambda_2}$.

定义 9.4.1 设 B 是线性空间 Y 到 Y 的线性算子，L 是 Y 的一个线性子空间，如果 $BL\subset L$，则称 L 是 B 的不变子空间.

引理 9.4.1 $\forall\lambda\in\mathbb{C}$，$\Phi_\lambda$ 与 G_λ 都是 T 的不变子空间.

证明 $\forall x\in\Phi_\lambda$，$(T-\lambda I)x=\theta$，由于

$$(T-\lambda I)(Tx)=T(T-\lambda I)x=\theta,$$

所以 $Tx\in\Phi_\lambda$，即 Φ_λ 是 T 的不变子空间.

$\forall y\in G_\lambda$，$\exists x\in X$，使得 $y=(T-\lambda I)x$，所以

$$Ty=T(T-\lambda I)x=(T-\lambda I)(Tx),$$

由于 $Tx\in X$，所以 $Ty\in G_\lambda$，即 G_λ 是 T 的不变子空间. 证毕.

引理 9.4.2 设 $\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots\}$ 是 T 的非零特征值全体，则 $\bigcap\limits_n G_{\lambda_n}=\Phi_0$.

证明 设 $E=\bigcap\limits_n G_{\lambda_n}$. 因为每个 G_{λ_n} 都是 X 的闭子空间，所以 E 是 X 的闭子空间，从而 E 也是一个Hilbert 空间. 下证 $E\subset\Phi_0$. 由引理 9.4.1 知 E 是 T 的不变子空间，所以把 T 看成是 E 上的算

子时，它也是自共轭全连续线性算子. 如果T在E上不是零算子，则它有非零特征值λ. 于是必有自然数n_0使得$\lambda=\lambda_{n_0}$，这样一来，$E\cap\Phi_{\lambda_{n_0}}\neq\{\theta\}$. 但$E\subset G_{\lambda_{n_0}}$，所以$\Phi_{\lambda_{n_0}}\cap G_{\lambda_{n_0}}\neq\{\theta\}$，此与$\Phi_{\lambda_{n_0}}=(G_{\lambda_{n_0}})^{\perp}$矛盾. 因此$T$作为$E$上的算子是零算子，即$\forall x\in E$，$Tx=\theta$. 从而$E\subset\Phi_0$. 再证$\Phi_0\subset E$. $\forall x\in\Phi_0$，由本节第一段的结论4°，$x\perp\Phi_{\lambda_n}(n=1,2,\cdots)$，再由结论3°，$x\in G_{\lambda_n}(n=1,2,\cdots)$. 从而$\Phi_0\subset G_{\lambda_n}(n=1,\ 2,\ \cdots)$，即$\Phi_0\subset\bigcap\limits_n G_{\lambda_n}=E$. 因此$\Phi_0=E=\bigcap\limits_n G_{\lambda_n}$. 证毕.

现在设$\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots\}$是$T$的全体非零特征值，由本节第一段的结论2°，每个$\Phi_{\lambda_i}$都是有限维的. 设$\Phi_{\lambda_i}$的维数为$k_i$. 在每个$\Phi_{\lambda_i}$中取一组标准正交基$\{x_1^{(i)},x_2^{(i)},\cdots,x_{k_i}^{(i)}\}(i=1,2,\cdots)$. 由本节第一段结论4°，$\{x_j^{(i)}\mid 1\leqslant j\leqslant k_i,\ i=1,2,\cdots\}$是$X$中的一个标准正交系，把它的元排成一列记为$e_1,e_2,\cdots,e_k,\cdots$，并用$\mu_k$表示$e_k$所对应的特征值（以下$e_k,\mu_k$的意义皆如此）. 记$M=\overline{\mathrm{span}\{e_k\}}$. 因为$e_k\perp\Phi_0(k=1,2,\cdots)$，所以$M\perp\Phi_0$，从而$M\subset\overline{G}_0$.

定理 9.4.3 $X=M\oplus\Phi_0$，从而$M=\overline{G}_0$.

证明 $\forall x\in X$，记$y=\sum\limits_k(x,e_k)e_k\in M$，$z=x-y$. 因为

$$(z,e_k)=(x,e_k)-(y,e_k)=0\quad(k=1,2,\cdots),$$

所以$z\perp\Phi_{\lambda_i}(i=1,\ 2,\ \cdots)$. 由本节第一段结论3°，$z\in G_{\lambda_i}(i=1,2,\cdots)$，从而$z\in\bigcap\limits_i G_{\lambda_i}=\Phi_0$. 因此$X=M\oplus\Phi_0$. 但已知$X=\overline{G}_0\oplus\Phi_0$；$M\subset\overline{G}_0$，所以$M=\overline{G}_0$. 证毕

推论 9.4.4 $\{e_k\}$是X中完备标准正交系$\Leftrightarrow 0\overline{\in}\sigma_p(T)$.

证明 $\{e_k\}$是X中完备标准正交系$\Leftrightarrow M=X\Leftrightarrow\Phi_0=\{\theta\}\Leftrightarrow 0\overline{\in}\sigma_p(T)$. 证毕.

推论 9.4.5 $\forall y\in\overline{G}_0, \exists x\in X$ 使得 $y=Tx\Leftrightarrow$ 级数 $\sum_k \frac{(y, e_k)}{\mu_k} e_k$ 收敛.

证明 "$\Rightarrow$": 由题设,

$$\sum_k \frac{(y, e_k)}{\mu_k} e_k = \sum_k \frac{(Tx, e_k)}{\mu_k} e_k$$

$$= \sum_k \frac{(x, Te_k)}{\mu_k} e_k$$

$$= \sum_k (x, e_k) e_k.$$

因 X 是 Hilbert 空间, 所以级数 $\sum_k (x, e_k) e_k$ 收敛于 x 在 M 上的投影.

"$\Leftarrow$": 设 $\sum_k \frac{(y, e_k)}{\mu_k} e_k = x\in X$. 由 T 的连续性和线性,

$$Tx = \sum_k \frac{(y, e_k)}{\mu_k} Te_k = \sum_k (y, e_k) e_k = y. \text{ 证毕.}$$

推论 9.4.6 $\forall x\in X$,

$$Tx = \sum_k (Tx, e_k) e_k = \sum_k (x, Te_k) e_k = \sum_k \mu_k (x, e_k) e_k.$$

证明 $\forall x\in X$, 由定理 9.4.3, $Tx\in M$, 由定理 8.1.13,

$$Tx = \sum_k (Tx, e_k) e_k = \sum_k (x, Te_k) e_k = \sum_k \mu_k (x, e_k) e_k. \text{ 证毕.}$$

由推论 9.4.6 以及 μ_k、e_k 与 λ_i、$x_j^{(i)}$ 的关系可以得到

$$Tx = \sum_i \lambda_i \left(\sum_{j=1}^{k_i} (x, x_j^{(i)}) x_j^{(i)} \right) \quad (\forall x\in X). \qquad (9.4.1)$$

用 P_{λ_i} 表示 X 到 T 相应于 λ_i 的特征子空间 Φ_{λ_i} 上的投影算子, 则

$$\sum_{j=1}^{k_i}(x, x_j^{(i)})x_j^{(i)} = P_{\lambda_i}x \quad (\forall x \in X). \tag{9.4.2}$$

于是(9.4.1)式可以写成

$$Tx = \sum_i \lambda_i P_{\lambda_i} x \quad (\forall x \in X). \tag{9.4.3}$$

即按算子的强收敛有

$$T = \sum_i \lambda_i P_{\lambda_i}. \tag{9.4.4}$$

(9.4.4) 式表明 Hilbert 空间上的自共轭全连续算子可以按谱进行分解. 通常称表达式(9.4.4) 为自共轭全连续算子T的谱分解.

定理 9.4.7 **X 中存在一个由T的特征向量组成的完备标准正交系.**

证明 由定理 9.4.3, $X = M \oplus \Phi_0$. 若 $\Phi_0 = \{\theta\}$, 则$\{e_k\}$就是 X 的完备标准正交系. 若 $\Phi_0 \neq \{\theta\}$, 此时 $0 \in \sigma_p(T)$, 从而 Φ_0 中的每个非零元都是T的相应于特征值 0 的特征向量. 由推论 8.1.19, Φ_0 作为X的闭子空间必存在完备标准正交系$\{e_\alpha^* | \alpha \in \Gamma\}$, 又$M$作为$X$的闭子空间存在完备标准正交系 $\{e_k\}$, 并且 $\{e_k\} \perp \{e_\alpha^* | \alpha \in \Gamma\}$, 从而$\{e_k\} \cup \{e_\alpha^* | \alpha \in \Gamma\}$就是由$T$的特征向量组成的一个$X$的完备标准正交系. 证毕.

定理 9.4.8 **设 $\lambda \neq 0$, $\lambda \neq \mu_k (k = 1, 2, \cdots)$, 则 $T - \lambda I$ 有定义在整个X上的有界逆$(T - \lambda I)^{-1}$, 且 $\forall x \in X$, 有**

$$(T - \lambda I)^{-1} x = -\frac{1}{\lambda} x - \frac{1}{\lambda} \sum_k \frac{\mu_k}{\lambda - \mu_k}(x, e_k) e_k. \tag{9.4.5}$$

证明 因为全连续线性算子的非零谱点都是特征值, 故在定理条件下 λ 是T的正则点, 所以$(T - \lambda I)^{-1}$ 存在并且是定义在 X 上的有界算子. 下证(9.4.5)式成立.

首先指出，(9.4.5)式右端的级数收敛．事实上，当T有无限多个特征值时，必有$\mu_k\to 0(k\to\infty)$，所以$c=\sup\limits_k\left|\frac{\mu_k}{\lambda-\mu_k}\right|<+\infty$．由此可知

$$\sum_k\left|\frac{\mu_k}{\lambda-\mu_k}(x,e_k)\right|^2\leqslant\sum_k c^2|(x,e_k)|^2\leqslant c^2\|x\|^2.$$

由定理 8.1.16(Riesz-Fischer) 知(9.4.5) 式右端的级数对任何$x\in X$都收敛．设

$$y=-\frac{1}{\lambda}x-\frac{1}{\lambda}\sum_k\frac{\mu_k}{\lambda-\mu_k}(x,e_k)e_k(\forall x\in X),\qquad(9.4.6)$$

则$(y,e_k)=-\frac{1}{\lambda}(x,e_k)-\frac{\mu_k(x,e_k)}{\lambda(\lambda-\mu_k)}=-\frac{(x,e_k)}{\lambda-\mu_k}$．由推论 9.4.6,

$$Ty=\sum_k\mu_k(y,e_k)e_k=-\sum_k\frac{\mu_k}{\lambda-\mu_k}(x,e_k)e_k.\qquad(9.4.7)$$

比较(9.4.6)与(9.4.7)即得$y=-\frac{1}{\lambda}x+\frac{1}{\lambda}Ty$，所以，$x=Ty-\lambda y=(T-\lambda I)y$，即$(T-\lambda I)^{-1}x=y$．证毕．

定理 9.4.9　设$\lambda\neq 0$是T的特征值，并设$\lambda=\lambda_{i_0}$，则方程

$$Tx-\lambda_{i_0}x=y\qquad(9.4.8)$$

有解的充分必要条件是$y\perp\Phi_{\lambda_{i_0}}$，当有解时方程(9.4.8)的一般解是

$$x=-\frac{1}{\lambda_{i_0}}y-\frac{1}{\lambda_{i_0}}\sum_{\mu_k\neq\lambda_{i_0}}\frac{\mu_k}{\lambda_{i_0}-\mu_k}(y,e_k)e_k+\omega,$$

其中$\omega\in\Phi_{\lambda_{i_0}}$．

证明留为习题．

9.4.2 应用

最后，我们给出谱论在积分方程中的一个应用.

设 $K(s, t)\in L^2[a, b; a, b]$, $K(s, t)=\overline{K(t, s)}$, T 表以 $K(s,t)$ 为核的积分算子:

$$Tx(s)=\int_a^b K(s,t)x(t)dt, \forall x\in L^2[a,b]. \qquad (9.4.9)$$

T 称为具有平方可积对称核的积分算子. 由§8.3例2及§9.2例3, T: $L^2[a,b]\to L^2[a,b]$ 是自共轭全连续线性算子. 于是，有下列事实:

(i) T 有有限个或可数个特征值 $\{\lambda_i\}$, 并且 T 的所有特征值 $\{\lambda_i\}$ 全是实数;

(ii) T 的对应于每个非零特征值 λ_i 的特征子空间是有限维的;

(iii) $L^2[a,b]$ 中存在一个由 T 的特征向量组成的完备标准正交系 $\{e_i(x)\}$.

现在我们考察具有对称核的积分方程

$$x(s)=y(s)+\int_a^b K(s,t)x(t)dt=y(s)+Tx(s), \quad (9.4.10)$$

其中 $y(s)\in L^2[a, b]$, $K(s,t)$ 的条件同 (9.4.9). 求满足条件 (9.4.10) 的 $x(s)$.

定理 9.4.10 (1) **在方程(9.4.10)中，如果 T 的特征值 $\{\lambda_k\}$ 都不等于 1，则(9.4.10)有唯一解**

$$x(s)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(y, e_k)}{1-\lambda_k}e_k,$$

其中 e_k 是相应于 λ_k 的特征向量.

(2) **在方程(9.4.10)中，如果 T 的特征值 $\{\lambda_i\}$ 中有些等于 1,**

这些等于 1 的特征值记为$\{\lambda_j\}$(最多只有有限个)，与λ_j相应的特征向量为e_j. 这时若对于某一个e_j, $(y, e_j)\neq 0$，则方程(9.4.10)有解，而且解可以精确到加上由这些e_j张成的子空间中的一个向量.

证明 (1) 将方程$x=y+Tx$两边与e_k作内积，得到

$$\begin{aligned}(x, e_k)&=(y, e_k)+(Tx, e_k)=(y, e_k)+(x, Te_k)\\&=(y, e_k)+\lambda_k(x, e_k).\end{aligned}$$

由$\lambda_k\neq 1$得到

$$(x, e_k)=\frac{(y, e_k)}{1-\lambda_k}\quad(k=1,2,\cdots).$$

考察级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(y, e_k)}{1-\lambda_k}e_k \tag{9.4.11}$$

的收敛性. 由于$\{e_k\}$是$L^2[a,b]$的完备标准正交系，$y\in L^2[a,b]$，从而

$$\sum_{k=1}^{\infty}|(y, e_k)|^2=\|y\|^2<+\infty.$$

又因为$\{\lambda_k\}$没有非零极限点，故$\inf\limits_k|1-\lambda_k|>0$，因而$\exists c>0$，使得$\frac{1}{|1-\lambda_k|}\leqslant c$. 于是

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{(y, e_k)}{1-\lambda_k}\right|^2<+\infty.$$

据 Riesz-Fischer 定理，必有唯一的$x\in L^2[a,b]$，使得

$$x(s)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(y, e_k)}{1-\lambda_k}e_k.$$

现在验证$x(s)$是方程(9.4.10)的解. 由于

$$Tx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(y, e_k)}{1-\lambda_k} Te_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(y, e_k)}{1-\lambda_k} \lambda_k e_k$$

$$= -\sum_{k=1}^{\infty} (y, e_k) e_k + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(y, e_k)}{1-\lambda_k} e_k$$

$$= -y + x.$$

从而

$$x = y + Tx.$$

因此，$x(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(y, e_k)}{1-\lambda_k} e_k$ 是方程(9.4.10)的唯一解.

(2) 若对某个 e_j, $(y, e_j) \neq 0$，则方程(9.4.10)不可能有解. 如若不然，设方程(9.4.10)有解 $x(s)$，则

$$(x, e_j) = (y, e_j) + \lambda_j (x, e_j) = (y, e_j) + (x, e_j),$$

导出 $(y, e_j) = 0$，这和 $(y, e_j) \neq 0$ 矛盾.

若对一切 e_j，都有 $(y, e_j) = 0$. 令 $x = x' + x''$，其中

$$x' = \sum \frac{(y, e_i)}{1-\lambda_i} e_i \quad (\lambda_i \neq 1),$$

$$x'' = \sum \alpha_j e_j \quad (\lambda_j = 1, \alpha_j \text{ 是任意常数}).$$

由于 y 和诸 e_j 正交，和(1)一样可证

$$Tx' = -y + x'.$$

对 x''，我们有

$$Tx'' = \sum \alpha_j \lambda_j e_j = \sum \alpha_j e_j = x''.$$

所以

$$Tx = Tx' + Tx'' = -y + x' + x'' = -y + x,$$

即

$$x = y + Tx.$$

这说明 $x = x' + x''$ 是方程(9.4.10)的解. 由于 x'' 在 $\{e_j \mid \lambda_j = 1\}$ 张

成的子空间中可以任意取，而 x' 是唯一确定的，故解 x 在精确到一个被加向量 x'' 的意义下是唯一确定的。

习 题 9.4

1. 设 $\{e_n\}$ 是 Hilbert 空间 X 中的标准正交系，$\lambda_n \to 0 (n\to\infty)$，且每个 λ_n 是实数，令

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (x, e_n) e_n \quad (\forall x \in X),$$

则 T 是自共轭全连续算子。

2. 设 T 为 $L^2[a,b]$ 上的自共轭全连续算子，而且有 $L^2[a,b]$ 中的完备标准正交系 $\{e_n\}$，使得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|Te_n\|^2 < +\infty.$$

证明必存在 $[a,b;a,b]$ 上可测的平方可积函数 $K(s,t)$ 适合

$$K(s,t) = \overline{K(t,s)},$$

且 $\forall x \in L^2[a,b]$，

$$Tx(s) = \int_a^b K(s,t) x(t) dt.$$

3. 设 $K(s,t) = \sum_{j=1}^{n} p_j(s) q_j(t) \in L^2[a,b;a,b]$，其中 $\{p_j\}$ 为线性无关的函数组，T 是以 $K(s,t)$ 为核的积分算子：

$$Tx(s) = \int_a^b K(s,t) x(t) dt, \forall x \in L^2[a,b]$$

证明 T 的非零特征值 λ 相应的特征向量有形式

$$e(t) = \sum_{j=1}^{n} c_j p_j(t), c_j \text{ 是常数.}$$

若记

$$\alpha_{ij} = \int_a^b q_i(t) p_j(t) dt,$$

则 c_j 可由下式决定：

$$\lambda c_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} c_i, \quad j = 1, 2, \cdots, n.$$

4. 在第3题中，若 $p_i(t)=q_i(t)$，$(p_i, q_j)=0(i\neq j)$. 试求T的特征值和特征向量.

5. 在第3题中，若 $K(s,t)=\cos(s+t)$，$0\leqslant s$，$t\leqslant\pi$，试求T的特征值和特征向量.

6. 解方程 $x(s)=2\int_0^\pi \cos(s+t)x(t)dt+1 \quad (x\in L^2[0,\pi])$.

7. 解方程 $x(s)=3\int_0^2 stx(t)dt+3s-2 \quad (x\in L^2[0,2])$.

参考文献

[1] 夏道行等,实变函数论与泛函分析(下册),高等教育出版社,第二版,1985.

[2] 郑维行、王声望,实变函数与泛函分析概要(第二册),人民教育出版社,1980.

[3] 张恭庆、林源渠,泛函分析讲义(上册),北京大学出版社,1987.

[4] 郭大钧等,实变函数与泛函分析,山东大学出版社,1986.

[5] 丁光桂,巴拿赫空间引论,科学出版社,1984.

[6] Л. В. Канторович, Г. П. Акилов, Функциональный анализ, 1977. (上册刘证等译,下册郭宜斌译,泛函分析,高等教育出版社,1982.)

[7] А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин, Элементы теории функций и функционального анализа, 1977.

[8] А. А. Кириллов, А. Д. Гвишиани, Теоремы и задачи функционального анализа, 1988.

[9] Л. А. Люстерник и В. И. Соболев, Элементы Функционального анальза, 1965. (杨从仁译,泛函分析概要,科学出版社,1985.)

[10] У. Рудин, Функциональный анализ, 1975.

[11] J. Diestel, Sequences and Series in Banach Spaces, 1984.

[12] R. C. James, A non-reflexive Banach space isometric with its second conjugate space. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.. 37, № 3 (1951), 174—177.

符 号 索 引

符号	含意	章节段
$\rho(x,y)$	x 与 y 之间的距离	6.1.1
(X,ρ)	以 ρ 为距离的度量空间	6.1.1
$\mathbf{N}$	自然数全体	6.1.2
$\boldsymbol{R}^n$	n 维欧几里得空间	6.1.3
$C[a,b]$	连续函数空间	6.1.3
s	数列空间	6.1.3
$S(E)$	几乎处处有限可测函数空间	6.1.3
$\mathbf{K}$	复(或实)数域	6.2.1
$\mathbb{R}$	实数域	6.2.1
$\mathrm{span}A$	A 张成的子空间	6.2.1
$\dim X$	空间 X 的维数	6.2.1
$\mathrm{co}(B)$	B 的凸包	6.2.1
$\|x\|$	x 的范数	6.2.2
$(X,\|\cdot\|)$	以 $\|\cdot\|$ 为范数的赋范线性空间	6.2.2
$C^{(k)}[a,b]$	具 k 阶连续导数的函数空间	6.2.2
l^∞	有界数列空间	6.2.2
$\mathrm{V}[a,b]$	有界变差函数空间	6.2.2
$\mathrm{V}_0[a,b]$	在 (a,b) 中右连续且在 a 点取值为零的有界变差函数空间	6.2.2
$L^p(E)$	p 幂可积函数空间	6.2.2
$L^\infty(E)$	本性有界可测函数空间	6.2.2
l^p	p 幂收敛数列空间	6.2.2
$O(x_0,r)$	以 x_0 为中心以 r 为半径的开球	6.3.1
$B(x_0,r)$	以 x_0 为中心以 r 为半径的闭球	6.3.1
$S(x_0,r)$	以 x_0 为中心以 r 为半径的球面	6.3.1
A°	集 A 的内域	6.3.1

$O(x_0)$	点 x_0 的邻域	6.3.1
A'	集 A 的导集	6.3.1
A^b	集 A 的边界	6.3.1
$\bar{A}$	集 A 的闭包	6.3.1
$d(A)$	集 A 的直径	6.3.1
$\overline{\mathrm{span}\,A}$	A 张成的闭子空间	6.3.1
$B[a,b]$	有界函数空间	6.3.1
c	收敛数列空间	6.5.题[①]
$\mathscr{D}(T)$	算子 T 的定义域	7.1.1
$\mathscr{R}(T)$	算子 T 的值域	7.1.1
$\mathscr{L}(X,Y)$	X 到 Y 的线性算子空间	7.1.3
$\mathscr{B}(X,Y)$	X 到 Y 的有界线性算子空间	7.1.4
$\mathscr{B}(X)$	X 到 X 的有界线性算子空间	7.1.4
X^*	赋范线性空间 X 的共轭空间	7.1.4
c_0	收敛于零的数列空间	7.3.题
X^{**}	赋范空间 X 的二次共轭空间	7.5.1
A^*	算子 A 的共轭算子	7.5.2
$\overline{\mathrm{co}(A)}$	集 A 的凸闭包	7.6.2
(x,y)	x 与 y 的内积	8.1.1
$(X,(\cdot,\cdot))$	以 $(\cdot,\cdot)$ 为内积的内积空间	8.1.1
$x\perp y$	x 与 y 正交	8.1.2
$x\perp M$	向量 x 与集 M 正交	8.1.2
$M\perp N$	集 M 与集 N 正交	8.1.2
$M^{\perp}$	集 M 的正交补(集)	8.1.2
$\mathbf{C}$	复数域	9.1.1
$\rho(T)$	算子 T 的正则集	9.1.1
$\sigma(T)$	算子 T 的谱	9.1.1
$R_\lambda(T)\ (R_\lambda)$	算子 T 的豫解算子	9.1.1
$\Phi_\lambda(T)\ (\Phi_\lambda)$	算子 T 相应于特征值 λ 的特征子空间	9.1.1

① 6.5.题指§6.5习题，下同.

$\sigma_p(T)$	算子T的特征值全体	9.1.1
$\sigma_c(T)$	算子T的连续谱	9.1.1
$\mathscr{C}(X,Y)$	X到Y的全连续算子空间	9.2.1
$\mathscr{C}(X)$	X到X的全连续算子空间	9.2.1

索　引

Arzela-Ascoli 定理 6.7.2

Ascoli 定理 7.2.2

$B[a,b]$空间 6.3.1

Banach 空间 6.5.1

Banach 不动点定理 6.6.1

Banach 逆算子定理 7.4.2

Banach-Steinhaus 共鸣定理 7.4.4

Baire 纲定理 6.5.2

Bessel 不等式 8.1.3

$\mathscr{B}(X,Y)$ 空间 7.1.4

Cauchy 不等式 6.1.3

$C[a,b]$空间 6.1.3

　～的范数 6.2.2

　～的可分性 6.4.2

　～的完备性 6.5.1

　～的共轭空间 7.3.1

$C^{(k)}[a,b]$空间 6.2.2

　～的完备性 6.5.题

$\mathscr{C}(X,Y)$ 空间 9.2.1

c 空间 6.5.题

　～的完备性 6.5.题

　～的共轭空间 7.3.题

c_0 空间 7.3.题

　～的完备性 7.3.题

　～的共轭空间 7.3.题

Fourier 级数的发散问题 7.4.4

Fourier 级数(展开式) 8.1.3

Gross 定理 6.7.3
Gram-Schmidt 正交化方法 8.1.4
Hölder 不等式 6.2.2
Hausdorff 定理 6.7.1
Hahn-Banach 泛函延拓定理 7.2.1
Hilbert 空间 8.1.1
～的自共轭性 8.2.2
Hilbert 共轭算子 8.3.1
～的存在唯一性定理 8.3.1
～的性质 8.3.1
Lax-Milgram 定理 8.2.3
$L^p(E)$ $(1\leqslant p<+\infty)$ 空间 6.2.2
～的完备性 6.5.1
$L^2(E)$ 中的内积 8.1.1
$L^2[0,2\pi]$ 中的完备标准正交系 8.1.3
$L^p[a,b]$ $(1\leqslant p<+\infty)$ 空间的可分性 6.4.2
$L^p[a,b]$ $(1\leqslant p<+\infty)$ 空间的共轭空间 7.3.2
$L^\infty(E)$ 空间 6.2.2
～的完备性 6.5.题
～的不可分性 6.4.2
l^p $(1\leqslant p<+\infty)$ 空间 6.2.2
～的可分性 6.4.2
～的完备性 6.5.1
～的共轭空间 7.3.3
l^2 空间中的内积 8.1.1
l^∞ 空间 6.2.2
～的完备性 6.5.题
～的不可分性 6.4.2
Minkowski 不等式 6.2.2
Minkowski 泛函 7.2.2
Mazur 凸集分离定理 7.2.2
Mazur 定理 7.6.2

n 维内积空间和 R^n 的同构性 8.1.5
p 幂平均收敛 6.2.2
Pettis 引理 7.6.3
Parseval 等式 8.1.3
$\mathbf{R}^n$ 空间 6.1.3
　～的范数 6.2.2
　～的可分性 6.4.2
　～的完备性 6.5.1
　～的共轭空间 7.3.题
　～中的内积 8.1.1
Riesz 引理 6.8.2
Riesz-Fischer 定理 8.1.3
Riesz 表示定理 8.2.1
Riesz-Schauder 定理 9.2.2
Schwarz 不等式 8.1.1
$S(E)$ 空间 6.1.3
　～的完备性 6.5.题
s 空间 6.1.3
　～的完备性 6.5.题
$V[a,b]$ 空间 6.2.2
　～的完备性 6.5.题
$V_0[a,b]$ 空间 6.2.2
Колмогоров 定理 6.7.2
Стеклов 函数 6.7.2
ε-网 6.7.1

一　画

一致离散的度量空间 6.1.1

二　画

二次共轭空间 7.5.1

几乎处处一致收敛 6.2.2

三 画

三角不等式 6.1.1
子空间 6.1.1
子集张成的子空间或线性包 6.2.1

四 画

开球 6.3.1
开集 6.3.1
开映射(开算子) 7.4.2
开映射定理 7.4.2
内点 6.3.1
内域 6.3.1
内积 8.1.1
内积空间 8.1.1
～的范数 8.1.1
～中范数的特征 8.1.1
～中两个向量的正交 8.1.2
～中向量与集合的正交 8.1.2
～中两个集合的正交 8.1.2
～中集的正交补 8.1.2
～中的标准正交系成为完备系的充要条件 8.1.3
不动点 6.6.1

五 画

凸集 6.2.1
凸集分离定理 7.2.2
凸包 6.2.1
凸组合 7.6.2
凸闭包 7.6.2

半范数 6.2.2
由范数导出的距离 6.2.2
本性有界可测函数 6.2.2
边界点 6.3.1
边界 6.3.1
可分集 6.4.2
可分空间 6.4.2
可分无限维 Hilbert 空间和 l^2 的同构性 8.1.5
正则算子 7.4.1
正交分解定理 8.1.2
正交和 8.1.2
正算子 8.3.4
～的性质 8.3.4
～的正平方根存在唯一性定理 8.3.4
正常算子 8.3.5
～的特征 8.3.5
平行四边形公式 8.1.1

六　画

收敛点列 6.1.2
～的极限 6.1.2
闭球 6.3.1
闭集 6.3.1
闭包 6.3.1
闭线性子空间 6.3.1
闭球套定理 6.5.2
闭映射(闭算子) 7.4.3
闭图象定理 7.4.3
导集 6.3.1
自密集 6.3.1
自列紧集 6.7.1
自然嵌入映射 7.5.1

自然映射 8.2.2

自反空间 7.5.1

自反空间的局部弱列紧性 7.6.3

自共轭算子 8.3.2

　～的性质 8.3.2

　～的谱性质 9.3.1

自共轭全连续算子的谱分解 9.4.1

压缩映射 6.6.1

列紧集(相对紧集) 6.7.1

列紧度量空间 6.7.1

有界集 6.3.1

有限 ε-网 6.7.1

有限维线性空间 6.8.1

有限维赋范线性空间的性质 6.8.2

有限维赋范线性空间的特征 6.8.2

有界线性算子 7.1.2

　～的范数 7.1.2

　～空间 7.1.4

　～的正则点 9.1.1

　～的正则集 9.1.1

　～的谱点 9.1.1

　～的谱 9.1.1

　～的谱性质 9.1.2

有界共轭双线性泛函 8.2.3

　～的范数 8.2.3

次可加正齐性泛函 7.2.1

次可加对称泛函 7.2.1

共轭空间 7.1.4

共轭算子 7.5.2

共轭同构映射 8.2.2

共轭双线性泛函 8.2.3

向量列的弱收敛 7.6.2

向量列弱收敛的充要条件 7.6.2
全连续线性算子 9.2.1
～的性质 9.2.1
～的谱性质 9.2.2

七 画

邻域 6.3.1
极限点 6.3.1
极大线性子空间 7.2.2
极大线性流形(超平面) 7.2.2
极化恒等式 8.1.1
完全集 6.3.1
完全有界集 6.7.1
完全标准正交系 8.1.3
～存在性定理 8.1.3
完备度量空间 6.5.1
完备标准正交系 8.1.3
～存在性定理 8.1.3
两集之间的距离 6.3.1
连续映射 6.3.2
连续谱 9.1.1
泛函列的*弱收敛 7.6.2
泛函列*弱收敛的充要条件 7.6.2
局部弱列紧空间 7.6.3
局部*弱列紧空间 7.6.3
投影 8.1.2
投影算子 8.3.3
～的特征 8.3.3
酉算子 8.3.6
～的特征性质 8.3.6

八 画

线性空间 6.2.1

～的维数 6.2.1

线性相关 6.2.1

线性无关 6.2.1

线性组合 6.2.1

线性子空间 6.2.1

线性流形 6.2.1

线性基(Hamel 基) 6.2.1

线性和 6.2.1

线性同构映射 6.2.1

线性同构 6.2.1

线性算子 7.1.1

～的有界性和连续性 7.1.2

～空间 7.1.3

～的积及其性质 7.1.3

线性泛函 7.1.1

～存在性定理 7.2.1

～的连续性定理 7.1.2

直接和 6.2.1

范数 6.2.2

～的等价性 6.2.3

依范数收敛(强收敛) 6.2.2

孤立点 6.3.1

孤立点集 6.3.1

拓扑映射 6.3.2

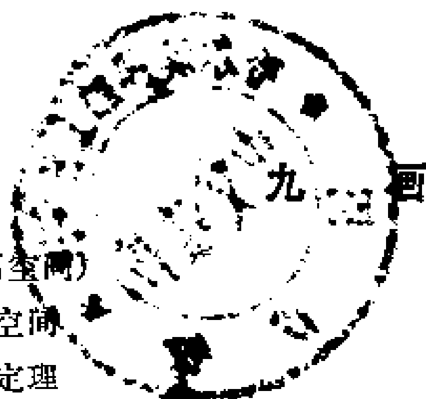
拓扑同构(同胚) 6.3.2

承托超平面 7.2.2

变分引理 8.1.2

单调自共轭算子列 8.3.4

具对称核的积分方程 9.4.2



九 画

度量空间(距离空间) 6.1.1
　～的完备化空间 6.5.3
　～的完备化定理 6.5.3
按距离收敛 6.1.2
点集的直径 6.3.1
点到集合的距离 6.3.1
保范线性同构映射 7.3[①]
保范线性同构 7.3
映射的图象 7.4.3
标准正交系 8.1.3

十 画

乘积度量空间 6.1.题
乘积赋范线性空间 7.4.3
离散度量空间 6.3.1
紧集 6.7.3
紧度量空间 6.7.3
紧集上连续映射(函数)的性质 6.7.3
弱列紧集 7.6.3
　*～ 7.6.3
特征值 9.1.1
特征向量 9.1.1
特征子空间 9.1.1

十 一 画

距离 6.1.1
球面 6.3.1
接触点 6.3.1

---

① 7.3 表示第七章第3节,即 §7.3,下同.



第一纲集 6.4.1
第二纲集 6.4.1
基本列(Cauchy 列) 6.5.1

十 二 画

赋范线性空间 6.2.2
集 A 张成的闭线性子空间 6.3.1
疏朗集 6.4.1
等距同构映射 6.5.3
等距同构 6.5.3
等度连续 6.7.2

十 三 画

稠密集 6.4.1

十 四 画

算子列的一致收敛 7.6.1
算子列的强收敛 7.6.1
算子列的弱收敛 7.6.1
算子列强收敛的充要条件 7.6.1

十 五 画

豫解算子 9.1.1



第一纲集 6.4.1

第二纲集 6.4.1

基本列(Cauchy 列) 6.5.1

十二画

赋范线性空间 6.2.2

集 A 张成的闭线性子空间 6.3.1

疏朗集 6.4.1

等距同构映射 6.5.3

等距同构 6.5.3

等度连续 6.7.2

十三画

稠密集 6.4.1

十四画

算子列的一致收敛 7.6.1

算子列的强收敛 7.6.1

算子列的弱收敛 7.6.1

算子列强收敛的充要条件 7.6.1

十五画

豫解算子 9.1.1